УДК 517.5

©2013. **Т. В. Ломако**

ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ УРАВНЕНИЙ БЕЛЬТРАМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

Работа посвящена исследованию локальных свойств регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на коэффициент. Получены необходимые и достаточные условия конформности по Белинскому и конформности, для частного случая, в точке для таких отображений.

Ключевые слова: *уравнения Бельтрами, конформность, регулярное решение, классы Соболева.*

1. Введение. Данная статья посвящена продолжению исследований локального поведения регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа, начатых в работе [1]. Отметим, что исследования в данном направлении имеют приложения к уравнениям математической физики, см., например, теорему 7.1 в [1]. В разделе 3 получены необходимые условия асимптотической однородности, раздел 4 посвящен критерию асимптотической конформности и заключительный 5 раздел посвящен необходимым и достаточным условиям конформности в точке указанных отображений. Аналоги этих результатов для квазиконформных отображений можно найти в работах [2]-[4].

2. Определения и вспомогательные утверждения. Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. *Уравнениями Бельтрами* называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z\,, \tag{1}$$

с измеримым коэффициентом $\mu : D \to \mathbb{C}$, удовлетворяющим условию $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + if_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - if_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция $K_\mu(z) = (1 + |\mu(z)|)/(1 - |\mu(z)|)$ называется *дилатационным коэффициентом* уравнения (1). *Регулярным решением* уравнения Бельтрами (1) в области D называется гомеоморфизм f класса Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ с $J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 > 0$ п.в., который удовлетворяет (1) п.в. в D. Уравнение (1) называется *вырожденным*, если $K_\mu \notin L^\infty$. Отметим, что недавно был доказан целый ряд новых теорем существования для вырожденных уравнений Бельтрами, см., например, монографию [5] и обзор [6]. Функцию $\mu_f = f_{\overline{z}}/f_z$, если $f_z \neq 0$, и $\mu_f = 0$, если $f_z = 0$, называют *комплексной дилатацией* и $K_f = K_{\mu_f}$ – *дилатацией* отображения f.

Напомним, что отображение f называется *конформным в точке* z_0, если f дифференцируемо в точке z_0 по Дарбу-Штольцу:

$$f(z) - f(z_0) = f_z(z_0)(z - z_0) + f_{\overline{z}}(z_0)\overline{(z - z_0)} + o(|z - z_0|)$$

и если $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$, а $f_z(z_0) \neq 0$, где $o\left(|z - z_0|\right)/|z - z_0| \to 0$ при $z \to z_0$.

Как показывает пример $w = z(1 - \ln|z|)$ Шабата Б.В., см., например, [7, с. 40], при непрерывной комплексной дилатации $\mu(z)$ отображение $w = f(z)$ может быть недифференцируемым по Дарбу-Штольцу.

Если комплексная дилатация $\mu(z)$ непрерывна в точке z_0, то, как впервые обнаружено Белинским П.П., см. [7, с. 41], отображение $w = f(z)$ дифференцируемо в z_0 в следующем смысле:

$$\Delta w = A(\rho)\left[\Delta z + \mu_0 \overline{\Delta z} + o(\rho)\right], \tag{2}$$

где $\mu_0 = \mu(z_0)$, $\rho = |\Delta z + \mu_0\overline{\Delta z}|$, $A(\rho)$ зависит только от ρ и $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$. Как было выяснено позже в [8], см. также [2], [3] и [9], здесь $A(\rho)$ может не иметь предела при $\rho \to 0$, однако,

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{A(t\rho)}{A(\rho)} = 1 \quad \forall\, t > 0. \tag{3}$$

Следуя [8], отображение f называем *дифференцируемым по Белинскому* в точке z_0, если выполнены условия (2)–(3) с некоторым $\mu_0 \in \mathbb{D}$. При этом, при разрывной $\mu(z)$, в соотношении (2) не обязательно $\mu_0 = \mu(z_0)$. Если $\mu_0 = 0$, то говорят также, что f *конформно по Белинскому* в точке z_0. Здесь и далее, $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $B(0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - 0| < r\}$.

Далее $dm(z)$ отвечает мере Лебега в $\mathbb{C}$, а через $dS(z) = \left(1 + |z|^2\right)^{-2} dm(z)$ обозначается *элемент сферической площади* в $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. В дальнейшем *непрерывность* функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ понимается относительно топологии $\overline{\mathbb{R}^+} := [0, \infty]$. Функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ называется *строго выпуклой*, если она является выпуклой, неубывающей и $\lim\limits_{t\to\infty} \Phi(t)/t = \infty$, см. [10, с. 37].

В следующих предложениях приведено явное описание регулярных решений уравнения Бельтрами для заданного коэффициента μ с $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}$, когда $\mu(z)$ зависит только от $\arg z$ или только от $|z|$, см. предложение 6.5 и предложение 6.4 в [11], соответственно.

Предложение 1. Пусть

$$\mu(re^{i\theta}) = \nu(\theta), \tag{4}$$

где $\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – измеримая 2π–периодичная с $|\nu(t)| < 1$ п.в. и $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Тогда функция $\Gamma(\theta) := (1 - \nu(\theta)e^{-2i\theta})/(1 + \nu(\theta)e^{-2i\theta})$, $\theta \in \mathbb{R}$, является интегрируемой по $[0, 2\pi]$ и для $\Phi(\theta) = \int_0^\theta \Gamma(t)dt$, $\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Gamma(t)dt$, функция

$$f(re^{i\theta}) = e^{\frac{1}{\alpha}(\log r + i\Phi(\theta))}, \;\; f(0) = 0, \tag{5}$$

является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с μ из (4).

Предложение 2. Пусть

$$\mu(re^{i\theta}) = k(r)e^{2i\theta}, \tag{6}$$

где $k(t)$, $t \in I := (0, \infty)$ – комплекснозначная измеримая функция с $|k(t)| < 1$ п.в. и пусть $\Gamma(t) := (1 + k(t))/(1 - k(t))t \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. Тогда

$$w = f\left(re^{i\theta}\right) = e^{i\theta + \int_1^r \Gamma(t)dt}$$

является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) в $\mathbb{C}^*$ с μ из (6). Кроме того, если $\int_1^\infty \mathrm{Re}\Gamma(t)dt < \infty$ или $\int_0^1 \mathrm{Re}\Gamma(t)dt < \infty$, то $f(\mathbb{C})$ – собственное подмножество $\mathbb{C}$. В противном случае, $f(z) \to 0$ при $z \to 0$ и $f(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ и $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

3. Об асимптотической однородности. Пусть D – область в $\mathbb{C}$ и $0 \in D$. Следуя работе [2], отображение $f : D \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, будем называть *асимтотически однородным в точке* 0, если

$$\lim_{\substack{z \to 0, \\ z \in \mathbb{C}^*}} \frac{f(z\zeta)}{f(z)} = \zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}\,. \tag{7}$$

В работе [1], теорема 6.1, см. также аналоги данного результата для квазиконформных отображений в работах [2]-[4], был получен критерий конформности по Белинскому в 0 для более широкого класса отображений, чем квазиконформные. Отметим, что одним из необходимых условий было свойство асимтотической однородности таких отображений. Следующий результат значительно облегчает проверку условия (7) и одновременно раскрывает геометрическую природу введенного понятия.

Пусть M – произвольное подмножество комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с $z = 0$ в качестве точки накопления. Полагаем

$$\varphi_M(\rho) = \frac{\inf_{|m| \geq \rho,\, m \in M} |m|}{\sup_{|m| \leq \rho,\, m \in M} |m|}\,.$$

Теорема 1. *Пусть $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ – регулярное решение уравнения Бельтрами (1), $f(0) = 0$ и*

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{1}{|B(0,\, r)|} \int_{B(0,\, r)} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dm(z) < \infty \tag{8}$$

для строго выпуклой функции $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ такой, что

$$\int_\sigma^\infty \frac{d\tau}{\tau \Phi^{-1}(\tau)} = \infty \tag{9}$$

при некотором $\sigma > \Phi(0)$. Пусть M – подмножество $\mathbb{C}$, для которого

$$\overline{\lim_{\rho \to 0}}\, \varphi_M(\rho) < \infty\,. \tag{10}$$

Если существует предел

$$\lim_{\substack{m \to 0, \\ m \in M}} \frac{f(\zeta m)}{f(m)} = \zeta \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}\,, \tag{11}$$

то f является асимптотически однородным в нуле.

Доказательство. По условию (11) имеем, что

$$\lim_{\substack{m\to 0\\ m\in M}} F(\zeta,\, m) = \zeta \quad \forall\, \zeta\in\mathbb{C}, \tag{12}$$

где функции $F(\zeta, z) = f(\zeta z)/f(z)$, $\zeta\in\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}^*$, являются по переменной ζ регулярными решениями уравнения Бельтрами (1) с комплексным коэффициентом $\mu_z(\zeta) = \frac{\overline{z}}{z}\mu(z\zeta)$ и с дилатацией $K_{\mu_z}(\zeta) = K_\mu(z\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{z,\,r} := \int\limits_{B(0,\,r)} \Phi\left(K_{\mu_z}(\zeta)\right)\, dS(\zeta) \le \frac{1}{|z|^2} \int\limits_{B(0,\,|z|r)} \Phi\left(K_\mu(\zeta)\right)\, dm(\zeta)$$

и по условию (8) $I_{z,\,r}\le M_{z,\,r}<\infty$ для малых $z\in\mathbb{C}^*$. Заметим также, что $F(0, z) = 0$, $F(1, z) = 1$. Поэтому $F(\zeta, z)$, $z\in\mathbb{C}^*$, образуют нормальное семейство относительно $\zeta\in\mathbb{C}$ по теореме 2 в [12]. Итак, $F(\zeta, z)$, $z\in\mathbb{C}^*$, – равностепенно непрерывное семейство относительно $\zeta\in\mathbb{C}$ по предложению 1 в [13], и условие (12) влечет локально равномерную сходимость относительно $\zeta\in\mathbb{C}$ по теореме 1 в [13].

Предположим, что условие (7) не выполнено для f. Тогда найдутся $\zeta\in\mathbb{C}$, $\varepsilon>0$ и последовательность $z_n\to 0$, $z_n\in\mathbb{C}^*$, $n = 1, 2, ...$, такие, что

$$|F(\zeta,\, z_n) - \zeta| \ge \varepsilon\,. \tag{13}$$

С другой стороны, по условию (10) найдется последовательность $m_n\in M$ для $n>N$ такая, что $0<\delta\le|\tau_n|\le 1<\infty$, где $\tau_n = z_n/m_n$, $\delta = 1/(\overline{\lim\limits_{\rho\to 0}}\,\varphi_M(\rho))$. Таким образом,

$$F(\zeta,\, z_n) = \frac{F(\zeta\tau_n,\, m_n)}{F(\tau_n,\, m_n)}\,.$$

В силу равномерной сходимости в (12) относительно параметра ζ на любом компакте $F(\zeta\tau_n, m_n)\sim\zeta\tau_n$ и $F(\tau_n, m_n)\sim\tau_n$. Поскольку же $\tau_n\ge\delta>0$, то $F(\zeta, z_n)\sim\zeta$ при $n\to 0$. Последнее противоречит (13) и, следовательно, сделанное выше предположение неверно. □

Отметим, что для выполнения заключения теоремы 1 условие (10) на степень возможной прореженности множества M является не только достаточным, но и необходимым, см., например, предложение 2.1 в [2].

4. Критерий конформности по Белинскому. Следующий результат является обобщением упомянутой выше теоремы 6.1 в [1], см. также лемму в [14].

Теорема 2. *Пусть $f_j:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $j\in J$, – регулярное решение уравнения Бельтрами (1) с коэффициентом μ_j, $f_j(0) = 0$, и*

$$\overline{\lim_{r\to 0}}\frac{1}{|B(0,\,r)|}\sup_{j\in J}\int_{B(0,\,r)}\Phi\left(K_{\mu_j}(z)\right)\, dm(z)\le c<\infty \tag{14}$$

где функция $\Phi : \overline{\mathbb{R}^+} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ *является строго выпуклой и удовлетворяет условию (9), и пусть* $\omega_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $j \in J$, *– семейство гомеоморфизмов таких, что* $\omega_j(0) = 0$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1) Существует предел

$$\lim_{\substack{\tau\to 0,\\ \tau>0}} \frac{f_j(\tau\zeta)}{f_j(\tau)} = \omega_j(\zeta) \quad \forall\, \zeta \in \mathbb{C}\,, \tag{15}$$

равномерный относительно параметра $j \in J$.

2) Существует предел (15), равномерный относительно $(\zeta, j) \in K \times J$ *для любых компактов* $K \subset \mathbb{C}$.

3) Существует предел

$$\lim_{z\to 0} \left\{ \frac{f_j(z')}{f_j(z)} - \frac{\omega_j(z')}{\omega_j(z)} \right\} = 0\,, \tag{16}$$

равномерный относительно параметра $j \in J$ *при* $|z'| \le \delta |z|$, $\delta \in (0,\, 1)$, *и* $z \in \mathbb{C}^*$.

4) Все функции семейства f_j *могут быть представлены в виде*

$$f_j(z) = A_j(\rho)\omega_j(w)(1 + \varepsilon_j(\rho)), \tag{17}$$

где $A_j(\rho)$ *зависят только от* $\rho = |w|$ *и*

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{A_j(t\rho)}{A_j(\rho)} = 1 \quad \forall\, t > 0, \tag{18}$$

$\varepsilon_j(\rho) \to 0$ *при* $\rho \to 0$ *равномерно относительно* $j \in J$.

Согласно указанной теореме 6.1 из [1] конформность по Белинскому отображения f из теоремы 2 эквивалентна асимптотической однородности как относительно вещественного, так и относительно комплексного параметра. В частности,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\max\limits_{|z|=r} |f(z)|}{\min\limits_{|z|=r} |f(z)|} = 1,$$

т.е. что характеристика Лаврентьева равна единице. В этом случае естественно говорить, что отображение f конформно в нуле в смысле Лаврентьева. Как мы видим, из обычной конформности следует конформность по Белинскому, а из последней – конформность по Лаврентьеву, означающей геометрически, что инфинитезимальный круг с центром в нуле переходит в инфинитезимальный круг. Отметим также, что характеристическими геометрическими свойствами для конформности по Белинскому отображения f являются асимптотическое сохранение углов между лучами, исходящими из начала в направлении соответствующих точек, и сохранение модулей инфинитезимальных колец.

Доказательство теоремы 2. Придерживаемся схемы 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1). Полагаем $f_{0,j}(\zeta) \equiv \omega_j(\zeta)$ в $\mathbb{C}$ и $f_{\tau,j}(\zeta) \equiv f_j(\zeta\,\tau)/f_j(\tau)$ при $\zeta \in \mathbb{C}$ и $\tau > 0$.

1) $\Rightarrow$ 2). Из (15) следует, что $r(f_{\tau,j},\, f_{0,j}) \to 0$, $\tau > 0$, при $\tau \to 0$ равномерно относительно $j \in J$. Здесь

$$r(g,\, h) = \Sigma_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{|g(z_m) - h(z_m)|}{1 + |g(z_m) - h(z_m)|},$$

где $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{C}$.

По условию $f_{\tau,j}$, $\tau > 0$, является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с коэффициентом $\mu_{\tau,j}(\zeta) = \mu_j(\tau\zeta)$ и с дилатацией $K_{\mu_{\tau,j}}(\zeta) = K_{\mu_j}(\tau\zeta)$ в $\mathbb{C}$. Таким образом,

$$I_{\tau,j,R} := \int\limits_{B(0,\,R)} \Phi\left(K_{\mu_{\tau,j}}(\zeta)\right)\, dS(\zeta) \le \frac{R^2}{\tau^2 R^2} \int\limits_{B(0,\,\tau R)} \Phi\left(K_{\mu_j}(z)\right)\, dm(z)$$

и по условию (14) $I_{\tau,j,R} \le \pi R^2 C < \infty$ для малых $\tau > 0$, где $C = c + 1$, величина справа в (14) не зависит от $j \in J$. Заметим также, что $f_{\tau,j}(0) = 0$, $f_{\tau,j}(1) = 1$. Поэтому $f_{\tau,j}$, $\tau > 0$, образуют нормальное семейство, см. теорему 2 в [12]. Итак, $\{f_{\tau,j}\}$, $\tau > 0$, – равностепенно непрерывное семейство по предложению 1 в [13], см. также предложение 7.1 в [15], и условие (15) влечет, что $f_{\tau,j} \to f_{0,j}$ локально равномерно в $\mathbb{C}$ по теореме 1 в [13], см. также теорему 7.1 в [15]. Заметим, что $\{f_{0,j}\}$ также равностепенно непрерывно по предложению 7.2 в [15]. Отметим, что пространство всех непрерывных функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ можно метризовать с помощью метрики

$$\rho(g,\, h) = \Sigma_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \frac{\rho_m(g,\, h)}{1 + \rho_m(g,\, h)}\,,$$

где $\rho_m(g,\, h) = \max_{|z| \le m} |g(z) - h(z)|$, которая порождает локально равномерную сходимость в $\mathbb{C}$, см. [16, с. 243]. Покажем, что $\rho(f_{\tau,j},\, f_{0,j}) \to 0$ при $\tau \to 0$ равномерно относительно $j \in J$.

Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и последовательности $\tau_n \to 0$, $\tau_n > 0$, и $j_n \in J$ такие, что $\rho(g_n,\, h_n) \ge \varepsilon$, где $g_n = f_{\tau_n, j_n}$, $h_n = f_{0,j_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, в нормальных подклассах $\{f_{\tau,j}\}$ сходимость $r(g_n,\, h_n) \to 0$ влечет $\rho(g_n,\, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$, см., например, предложение 7.2 в [15]. Действительно, в силу равностепенной непрерывности, без ограничения общности можно считать, что $g_n \to g_0$, $h_n \to h_0$ при $n \to \infty$ локально равномерно в $\mathbb{C}$. Но тогда мы имеем, что $\rho(g_n, g_0) \to 0$ и $\rho(h_n, h_0) \to 0$ при $n \to \infty$, а по неравенству треугольника: $\rho(g_n, h_n) \le \rho(g_n, g_0) + \rho(g_0, h_0) + \rho(h_0, h_n)$. Таким образом, $\rho(g_n, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$, если $g_0 = h_0$. Однако, опять же по неравенству треугольника: $r(g_0, h_0) \le r(g_0, g_n) + r(g_n, h_n) + r(h_n, h_0)$. Поэтому $r(g_n, h_n) \to 0$ влечет $\rho(g_n, h_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Однако, последнее противоречит сделанному выше предположению.

2) $\Rightarrow$ 3). Следует в силу того, что

$$f_{z,j}(\zeta) = \frac{f_{|z|,j}(\zeta z/|z|)}{f_{|z|,j}(z/|z|)} = \frac{f_j(z')}{f_j(z)}$$

при $\zeta = z'/z$. Отметим также, что в указанных обозначениях

$$\omega_j(\zeta z/|z|) = \omega_j(z')/\omega_j(|z|)\,, \qquad \omega_j(z/|z|) = \omega_j(z)/\omega_j(|z|)\,,$$

поскольку отображение ω_j, $j \in J$, обладает следующим свойством:

$$\omega_j(\zeta\rho) = \omega_j(\zeta)\omega_j(\rho) \quad \forall \zeta \in \mathbb{C},\ \ \rho > 0\,, \tag{19}$$

что следует непосредственно из (15).

3) $\Rightarrow$ 4). Для этого достаточно заметить, что при $z = \rho = |w|$ и $z' = w \in \mathbb{C}^*$ соотношение (16) эквивалентно (17), где $A_j(\rho) = f_j(\rho)/\omega_j(\rho)$, а при $z = \rho > 0$ и $z' = t\rho$, $t > 0$, соотношение (16) эквивалентно соотношению (18).

4) $\Rightarrow$ 1). Полагая в (17), (18) $w = t > 0$ и $w = t\zeta$, $\zeta \in \mathbb{C}$, соответственно, получаем (15). $\square$

Замечание. Заметим, что из (19) следует, что комплексная характеристика $\nu(z)$ отображения ω должна удовлетворять соотношению $\nu(\rho\zeta) = \nu(\zeta)$ для любого $\rho > 0$. Последнее эквивалентно тому, что ν зависит только от $\arg z$. Кроме того, в силу теоремы 1 и леммы 2 в [12], отображение ω как предел последовательностей из семейства $\{f_{\tau,j}\}$, см. п. 1) $\Rightarrow$ 2) доказательства теоремы 2, является регулярным решением уравнения Бельтрами (1) с $K_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}$. Следовательно, в качестве примера ω в теореме 2 можно взять функцию из (5).

5. О необходимых и достаточных условиях конформности отображения в точке. Пусть f некоторое отображение, заданное в единичном круге $\mathbb{D}$ и $f(0) = 0$. Будем говорить, что отображение f конформно в нуле, если

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = A \neq 0, \infty.$$

В роботе [17] были получен ряд достаточных условий в терминах дилатаций по направлению. В настоящей работе получен критерий конформности широкого класса регулярных решений уравнения Бельтрами с коэффициентом вида $\mu(z) = k(|z|)z/\overline{z}$. В случае квазиконформных отображений подобный критерий был получен в работах [2] и [3].

Теорема 3. *Пусть $k(t) : [0, 1) \to \mathbb{R}$ – произвольная измеримая функция, $|k(t)| < 1$ п.в. на $[0, 1)$, $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ – регулярное решение уравнения Бельтрами (1), $f(0) = 0$, с коэффициентом $\mu(z) = k(|z|)z/\overline{z}$ таким, что*

$$\int_{\mathbb{D}} \Phi(K_\mu(z))dm(z) < \infty,$$

где функция $\Phi : [1, \infty] \to \overline{\mathbb{R}^+}$ является строго выпуклой, удовлетворяет условию (9) для некоторого $\sigma > \Phi(1)$ и $\Phi(1) = 1$. Пусть также функция $H(t) = \ln \Phi(t)$ является гладкой возрастающей функцией и $tH'(t) \geq 5$ при больших значениях t. Тогда для конформности f в нуле необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел

$$\lim_{z\to 0} \int_{|z|}^{1} \frac{k(t)}{1 - k(t)} \frac{dt}{t} \neq \infty. \tag{20}$$

Доказательство. Положим

$$\widetilde{k}(t) = \begin{cases} k(t), & t < 1; \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

Тогда из предложения 6.4 работы [11] вытекает, что функция

$$g(z) = z \exp \left\{ 2 \int_1^{|z|} \frac{\widetilde{k}(t)}{1 - \widetilde{k}(t)} \frac{dt}{t} \right\}$$

является регулярным решением уравнения Бельтрами с коэффициентом $\widetilde{\mu}(z) = \widetilde{k}(|z|)z/\overline{z}$. Более того, из условия (9) и теоремы 2.4 монографии [5] следует, что $g(0) = 0$.

Легко видеть, что для конформности отображения g в нуле необходимо и достаточно выполнения условия (20).

Далее, согласно теоремам 20.5.2 и 20.5.1 из [18] найдется конформное отображение h в $g(\mathbb{D})$ такое, что $f = h \circ g$. Таким образом, отображение f конформно в нуле тогда и только тогда, когда таковым является отображение g, но последнее означает, что для конформности f в нуле как раз необходимо и достаточно выполнения условия (20). □

Перейдем к рассмотрению проблемы Райха-Вальчака. В работе [19] была высказана гипотеза, что каков бы ни был модуль комплексной дилатации $q(z) = |\mu(z)| \leq q < 1$, всегда можно так подобрать ее аргумент $\arg \mu(z)$, что соответствующее квазиконформное отображение $f(z)$ будет конформным в нуле. В той же работе было дано частичное решение этой проблемы, когда $q(z) = \psi(|z|)$ зависит только от $|z|$.

В настоящей работе, используя теорему 3, мы получим указанное частичное решение проблемы, но уже для отображений, которые являются более общими, чем квазиконформные.

Следствие 1. *Пусть $q(t) : [0, 1) \to \mathbb{R}^+$ – произвольная измеримая функция, $|q(t)| < 1$ п.в. в $[0, 1)$ и функция $Q(t) = (1 + |q(t)|)/(1 - |q(t)|)$ такова, что*

$$\int_0^1 (Q(t))^p t dt < \infty \quad \textit{при некотором} \quad p > 1$$

и

$$\int_0^1 \Phi\left(Q(t)\right) t dt < \infty,$$

где Φ такая же как в теореме 3. Тогда существует регулярное решение уравнения Бельтрами (1) с $|\mu(z)| = q(|z|)$, которое конформно в 0.

Доказательство. Положим в теореме 3 $k(t) = (-1)^n q(t)$ при $t \in [1/n^\alpha, 1/(n-1)^\alpha)$,

$n = 2, 3, \dots$, где $0 < \alpha < (p-1)/2$. Тогда, используя неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} &\left| \int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right| \le \int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} Q(t) \frac{dt}{t} \le \\ &\le \left(\int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} Q^p(t) t dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} \frac{dt}{t^{p'(1+1/p)}} \right)^{\frac{1}{p'}} \le \frac{C}{n^{(p-1-2\alpha)/p}}, \end{aligned} \tag{21}$$

где C – некоторая константа, не зависящая от n. При этом знак интеграла в (21) совпадает с $(-1)^n$. Таким образом, мы имеем дело со знакопеременным рядом, общий член которого строго монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. Такой ряд всегда сходится по признаку Лейбница. С другой стороны, пусть z некоторое фиксированное достаточно малое число, а N такое, что $|z| \in [1/N^\alpha, 1/(N-1)^\alpha)$. Тогда из (21) имеем

$$\left| \int_{|z|}^{1} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} - \int_{1/N^\alpha}^{1} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} \right| \le \frac{C}{N^{(p-1-2\alpha)/p}}$$

и

$$\int_{1/N^\alpha}^{1} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t} = \sum_{n=2}^{N} \int_{1/n^\alpha}^{1/(n-1)^\alpha} \frac{k(t)}{1-k(t)} \frac{dt}{t},$$

то есть интеграл сходится к тому же пределу, что и указанный ряд. Таким образом, отображение g из доказательства теоремы 3 является искомым отображением. $\square$

1. *Гутлянский В.Я., Ломако Т.В., Рязанов В.И.* К теории вариационного метода для уравнений Бельтрами // Укр. мат. вест. – 2011. – Т. 8, № 4. – С. 513-536.
2. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* К теории локального поведения квазиконформных отображений // Изв. РАН, сер. матем. – 1995. – Т. 59, № 3. – С. 31-58.
3. *Гутлянский В.Я., Рязанов В.И.* Геометрическая и топологическая теория функций и отображений. – Киев: Наук. думка, 2011. – 425 с.
4. *Рязанов В.И.* Топологические аспекты теории квазиконформных отображений: дисс. ... доктора физ.-мат. наук: 01.01.01. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 1993. – 281 с.
5. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* The Beltrami Equation: A Geometric Approach, Developments in Mathematics. – V. 26. – New York: Springer, 2012. – 301 p.
6. *Gutlyanskii V., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On recent advances in the degenerate Beltrami equations // Укр. мат. вест. – 2010. – Т. 7, № 4. – С. 467-515.
7. *Белинский П.П.* Общие свойства квазиконформных отображений. – Новосибирск: Наука, 1974. – 98 с.
8. *Рязанов В.И.* Критерий дифференцируемости по Белинскому и его следствия // Укр. мат. ж. – 1992. – Т. 44, № 2. – С. 295-300.
9. *Рязанов В.И.* О необходимых и достаточных условиях дифференцируемости по Белинскому // Доклады АН России. – 1992. – Т. 323, № 2. – С. 241-244.
10. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
11. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation // Sib. Adv. Math. – 2001. – V. 11, № 2. – P. 94-130.
12. *Ломако Т.В.* К теории сходимости и компактности для уравнений Бельтрами // Укр. мат. ж. – 2011. – Т. 63, № 3. – С. 341-349.
13. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Нормальные семейства пространственных отображений // Сиб. эл. мат. изв. – 2006. – Т. 3. – С. 216-231.

14. *Gutlyanskii V.Ya, Ryazanov V.I.* On Asymptotically Conformal Curves // Complex Variables. – 1994. – V. 25. – P. 357-366.
15. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. Springer Monographs in Mathematics. – New York: Springer, 2009. – 367 p.
16. *Куратовский К.* Топология.– Т. 1., М.: Мир, 1966. – 594 с.
17. *Brakalova M.A.* Sufficient and necessary conditions for conformality. II: Analytic viewpoint // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – V. 35, №. 1. – P. 235-254.
18. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal maps in the plane. – Princeton: Princeton University Press, 2009. – 677 p.
19. *Reich E., Walczak H.R.* On the behavior of quasiconformal mappings at a point // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – V. 117. – P. 338-351.

T. V. Lomako

The local properties of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with restrictions of the integral type.

The paper is devoted to the investigation of the local properties of regular solutions to the degenerate Beltrami equations with constraints of the integral type for its coefficient. The necessary and sufficient conditions of conformality by Belinskii and conformality, for a particular case, at a point for such mappings are obtained.

Keywords: *Beltrami equations, conformality, regular solution, Sobolev classes.*

Т. В. Ломако

Локальнi властивостi регулярних розв'язкiв виродних рiвнянь Бельтрами з обмеженнями iнтегрального типу.

Работу присвячено дослiдженню локальних властивостей регулярних розв'язкiв виродних рiвнянь Бельтрамi з обмеженнями iнтегрального типу на коефiцiєнт. Отримано необхiднi та достатнi умови конформностi за Бєлiнським i конформностi, в окремому випадку, у точцi для таких вiдображень.

Ключовi слова: *рiвняння Бельтрамi, конформнiсть, регулярний розв'язок, класи Соболєва.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`tlomako@yandex.ru`

Получено 26.05.13