УДК 531.38

©2013. **Ю. Н. Кононов, Н. В. Киселева**

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ТОНОВ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЖИДКОСТЬЮ

С учетом дополнительных тонов колебаний идеальной жидкости получены необходимые условия устойчивости равномерного вращения несимметричного твердого тела с произвольной осесимметричной полостью, содержащей жидкость. На примере цилиндрической полости оценено влияние дополнительных тонов и несимметрии твердого тела на области устойчивости.

Ключевые слова: *несимметричное твердое тело, идеальная жидкость, симметричная полость, необходимые условия устойчивости.*

1. Введение. В работах [1-2] проведены исследования необходимых условий устойчивости равномерного вращения осесимметричного твердого тела с осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость. В работе [3] с учетом основного тона колебаний идеальной жидкости получены необходимые условия устойчивости несимметричного твердого тела с произвольной осесимметричной полостью с жидкостью. В настоящей работе обобщены результаты работ [1-3] с учетом дополнительных тонов колебаний жидкости и проведены исследования для цилиндрической полости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим вращение твердого тела с произвольной осесимметричной полостью, целиком заполненной идеальной однородной жидкостью. В невозмущенном движении твердое тело и жидкость вращаются как одно целое с угловой скоростью $\omega_\mathbf{0}$. Полная постановка задачи и метод решения приведен в [3]. Так, например, характеристическое уравнение возмущенного движения несимметричного твердого тела с жидкостью имеет вид

$$\begin{aligned} &\left(\lambda A - \frac{\Gamma\lambda}{\lambda^2+\omega_0^2} - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n(\lambda^2+\omega_0\lambda_n)}{\lambda^2+\lambda_n^2}\right) * \\ &* \left(\lambda B - \frac{\Gamma\lambda}{\lambda^2+\omega_0^2} - \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n(\lambda^2+\omega_0\lambda_n)}{\lambda^2+\lambda_n^2}\right) + \\ &+ \left((C-A)\omega_0 - \frac{\Gamma\omega_0}{\lambda^2+\omega_0^2} + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n(\omega_0-\lambda_n)}{\lambda^2+\lambda_n^2}\right) * \\ &* \left((C-B)\omega_0 - \frac{\Gamma\omega_0}{\lambda^2+\omega_0^2} + \lambda^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E_n(\omega_0-\lambda_n)}{\lambda^2+\lambda_n^2}\right) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B и C – главные моменты инерции твердого тела с жидкостью относительно неподвижной точки, центр масс механической системы находится на третьей оси; Γ – опрокидывающий ($\Gamma > 0$) или восстанавливающий ($\Gamma < 0$) момент; $S_{in}(t)$ –

коэффициенты разложения относительной скорости жидкости в ряд по собственным векторным функциям, κ_n – соответствующие им собственные числа ($\lambda_n = 2\omega_0/\kappa_n$); $E_n = 2a_n^2/\ N_n^2$. Величины a_n и N_n^2 определяются только геометрией полости. Их значения приведены в [2, с. 7].

3. Метод исследования. В работе [3] были проведены исследования уравнения (1) с учетом основного тона колебаний жидкости. Оценим влияние дополнительных тонов на области устойчивости в нерезонансном случае. Условия неположительности корней (1) определяют необходимые условия устойчивости равномерного вращения несимметричного твердого тела с жидкостью. Эти условия можно получить из теоремы 2.10 из [4, с. 61].

Теорема 2.10. *Число различных отрицательных вещественных корней уравнения* $F(z) = a_k z^k + a_{k-1}z^{k-1} + ... + a_0$ $(a_k > 0)$ *равно*

$$N = \mathrm{Var}[1, -|\Delta_1^1|, |\Delta_3^1|, ..., (-1)^k|\Delta_{2k-1}^1|] - \mathrm{Var}[1, -|\Delta_2^2|, |\Delta_4^2|, ..., (-1)^k|\Delta_{2k}^2|]. \qquad (2)$$

Ввиду громоздкости Δ^1 и Δ^2 не приводим (см. [4]).

Характеристическое уравнение (1) при $n = 2$ примет вид

$$\begin{gathered}
(A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2)x^5 + \Big(\big(2(E_1 + E_2) - (A + B)\big)\Gamma + \\
+\omega_0^2\big((C - A)(B - A) + (E_1\widetilde{\lambda}_2 + E_2\widetilde{\lambda}_1)^2 + 3(E_1 + E_2)^2 - \\
-(A + B)(E_1\widetilde{\lambda}_2^2 + E_2\widetilde{\lambda}_1^2) + 2C(E_1(1 - \widetilde{\lambda}_1) + E_2(1 - \widetilde{\lambda}_2) - \\
-3(A + B)(E_1 + E_2) + AB(\widetilde{\lambda}_1^2 + 2 + \widetilde{\lambda}_2^2)))\Big)x^4 - \Big(\Gamma^2 + \\
+\big(2(2E_1\widetilde{\lambda}_1 + 2E_2\widetilde{\lambda}_2 - C) - (\widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)(A + B) + 2E_1\widetilde{\lambda}_2^2 + \\
+2E_2\widetilde{\lambda}_1^2\big)\Gamma\omega_0^2 + \big(((2 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B)) + \\
+2(2(E_1 + E_2) + \widetilde{\lambda}_1^2 E_2(1 - \widetilde{\lambda}_2) + \widetilde{\lambda}_2^2 E_1(1 - \widetilde{\lambda}_1) - \\
-2(\widetilde{\lambda}_2 E_2 + \widetilde{\lambda}_1 E_1)))C + 3((A - E_1)(B - E_1)\widetilde{\lambda}_2^2 + (A - E_2)(B - E_2)\widetilde{\lambda}_1^2) + \\
+\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2(AB\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 + 6E_1E_2) + 3(A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2))\omega_0^4\Big)x^3 + \\
+\Big((1 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)\Gamma^2 + \big(2C(1 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2) + 2E_1(2\widetilde{\lambda}_1 + 2\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2^2 - 1) + \\
+2E_2(2\widetilde{\lambda}_2 + 2\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_1 - 1) + (A + B)(1 - \widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2)\big)\Gamma\omega_0^2 + \\
+\big((1 + 2\widetilde{\lambda}_1^2 + 2\widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_2^2\widetilde{\lambda}_1^2)(C - (A + B))C + 2(1 + 2\widetilde{\lambda}_1^2 - 2\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}_2)E_2 + \\
+2(1 - 2\widetilde{\lambda}_2^2\widetilde{\lambda}_1 - \widetilde{\lambda}_1 + 2\widetilde{\lambda}_2^2)E_1\big)\omega_0^4\Big)\omega_0^2 x^2 + \Big((\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)\Gamma^2 + \\
+\big((A + B)(\widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2) - 2C(\widetilde{\lambda}_2^2\widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_1^2) + 2E_1\widetilde{\lambda}_2^2(2\widetilde{\lambda}_1 - 1) + \\
+2E_2\widetilde{\lambda}_1^2(2\widetilde{\lambda}_2 - 1)\big)\Gamma\omega_0^2 + \big((2\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B))C + \\
+2(E_1\widetilde{\lambda}_2^2(1 - \widetilde{\lambda}_1) + E_2\widetilde{\lambda}_2^1(1 - \widetilde{\lambda}_2))C + \widetilde{\lambda}_1^2(A - E_2)(B - E_2) + \\
+\widetilde{\lambda}_2^2(A - E_1)(B - E_1) + \widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2(3AB\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 + 2E_1E_2)\big)\omega_0^4\Big)\omega_0^4 x + \\
+\Big(\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2(\Gamma - (C - A)\omega_0^2)(\Gamma - (C - B)\omega_0^2)\Big)\omega_0^6 = 0,
\end{gathered} \qquad (3)$$

где $\widetilde{\lambda}_1 = \lambda_1/\omega_0$, $\widetilde{\lambda}_2 = \lambda_2/\omega_0$.

Согласно теореме 2.10 из [4, с. 61], для того, чтобы все корни характеристического уравнения (3) лежали на мнимой оси, необходимо, чтобы N=5. Так как Var - величина неотрицательная, то N может быть равно лишь при равенстве первого слагаемого в (2) пяти и второго слагаемого нулю. Или же

$$\begin{gathered}|\Delta_1^1| > 0, |\Delta_3^1| > 0, |\Delta_5^1| > 0, |\Delta_7^1| > 0, |\Delta_9^1| > 0,\\ |\Delta_2^2| < 0, |\Delta_4^2| > 0, |\Delta_6^2| < 0, |\Delta_8^2| > 0, |\Delta_{10}^2| < 0.\end{gathered} \tag{4}$$

С учетом $k = 5$ получим

$$|\Delta_9^1| = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Аналогично выписываются определители $|\Delta_1^1|$, $|\Delta_3^1|$, $|\Delta_5^1|$, $|\Delta_7^1|$, $|\Delta_2^2|$, $|\Delta_4^2|$, $|\Delta_6^2|$, $|\Delta_8^2|$, $|\Delta_{10}^2|$. Так, например, $|\Delta_{10}^2|$ имеет вид

$$|\Delta_{10}^2| = \begin{vmatrix} a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Здесь

$$a_5 = (A - E_1 - E_2)(B - E_1 - E_2),$$

$$a_4 = \big(2(E_1 + E_2) - (A + B)\big)\Gamma + \omega_0^2\big((C - A)(B - A) + (E_1\widetilde{\lambda}_2 + E_2\widetilde{\lambda}_1)^2 + 3(E_1 + E_2)^2 -$$

$$-(A + B)(E_1\widetilde{\lambda}_2^2 + E_2\widetilde{\lambda}_1^2) + 2C(E_1(1 - \widetilde{\lambda}_1) + E_2(1 - \widetilde{\lambda}_2) -$$

$$-3(A + B)(E_1 + E_2) + AB(\widetilde{\lambda}_1^2 + 2 + \widetilde{\lambda}_2^2))\big),$$

$$a_3 = \Gamma^2 + \big(2(2E_1\widetilde{\lambda}_1 + 2E_2\widetilde{\lambda}_2 - C) - (\widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)(A + B) + 2E_1\widetilde{\lambda}_2^2 +$$

$$+2E_2\widetilde{\lambda}_1^2\big)\Gamma\omega_0^2 + \big(((2 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)(C - (A + B)) +$$

$$+2(2(E_1 + E_2) + \widetilde{\lambda}_1^2 E_2(1 - \widetilde{\lambda}_2) + \widetilde{\lambda}_2^2 E_1(1 - \widetilde{\lambda}_1) -$$

$$-2(\widetilde{\lambda}_2 E_2 + \widetilde{\lambda}_1 E_1)))C + 3((A-E_1)(B-E_1)\widetilde{\lambda}_2^2 + (A-E_2)(B-E_2)\widetilde{\lambda}_1^2)+$$
$$+\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2(AB\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 + 6E_1E_2) + 3(A-E_1-E_2)(B-E_1-E_2))\omega_0^4,$$
$$a_2 = \Big(\big(1+\widetilde{\lambda}_1^2+\widetilde{\lambda}_2^2\big)\Gamma^2 + \big(2C(1+\widetilde{\lambda}_1^2+\widetilde{\lambda}_2^2) + 2E_1(2\widetilde{\lambda}_1 + 2\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2^2 - 1)+$$
$$+2E_2(2\widetilde{\lambda}_2 + 2\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_1 - 1) + (A+B)(1-\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2)\big)\Gamma\omega_0^2+$$
$$+\big((1+2\widetilde{\lambda}_1^2+2\widetilde{\lambda}_2^2+\widetilde{\lambda}_2^2\widetilde{\lambda}_1^2)(C-(A+B))C + 2(1+2\widetilde{\lambda}_1^2 - 2\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2 - \widetilde{\lambda}_2)E_2+$$
$$+2(1-2\widetilde{\lambda}_2^2\widetilde{\lambda}_1 - \widetilde{\lambda}_1 + 2\widetilde{\lambda}_2^2)E_1\big)\omega_0^4\Big)\omega_0^2$$
$$a_1 = \Big(\big(\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2\big)\Gamma^2+$$
$$+\big((A+B)(\widetilde{\lambda}_1^2+\widetilde{\lambda}_2^2) - 2C(\widetilde{\lambda}_2^2\widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_1^2) + 2E_1\widetilde{\lambda}_2^2(2\widetilde{\lambda}_1 - 1)+$$
$$+2E_2\widetilde{\lambda}_1^2(2\widetilde{\lambda}_2 - 1)\big)\Gamma\omega_0^2 + \big((2\widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2 + \widetilde{\lambda}_1^2 + \widetilde{\lambda}_2^2)(C-(A+B))C+$$
$$+2(E_1\widetilde{\lambda}_2^2(1-\widetilde{\lambda}_1) + E_2\widetilde{\lambda}_2^1(1-\widetilde{\lambda}_2))C + \widetilde{\lambda}_1^2(A-E_2)(B-E_2)+$$
$$+\widetilde{\lambda}_2^2(A-E_1)(B-E_1) + \widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2(3AB\widetilde{\lambda}_1\widetilde{\lambda}_2 + 2E_1E_2)\big)\omega_0^4\Big)\omega_0^4$$
$$a_0 = \widetilde{\lambda}_1^2\widetilde{\lambda}_2^2((C-A)\omega_0^2 - \Gamma)((C-B)\omega_0^2 - \Gamma).$$

Раскрыв все определители, получим следующие неравенства:

$$|\Delta_1^1| = 5(A-E_1-E_2)(B-E_1-E_2) > 0, \tag{7}$$

$$|\Delta_3^1| = G_{31}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) > 0, \tag{8}$$

$$|\Delta_5^1| = G_{51}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) > 0, \tag{9}$$

$$|\Delta_7^1| = G_{71}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) > 0, \tag{10}$$

$$|\Delta_9^1| = G_{91}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) > 0, \tag{11}$$

$$|\Delta_2^2| = -a_4\frac{|\Delta_1^1|}{5} < 0, \tag{12}$$

$$|\Delta_4^2| = G_{42}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) > 0, \tag{13}$$

$$|\Delta_6^2| = G_{62}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) < 0, \tag{14}$$

$$|\Delta_8^2| = G_{82}(A,B,C,E_1,E_2,\widetilde{\lambda}_1,\widetilde{\lambda}_2,\omega_0,\Gamma) > 0, \tag{15}$$

$$|\Delta_{10}^2| = -a_0|\Delta_9^1| < 0. \tag{16}$$

Функции G_{31}, G_{51}, G_{71}, G_{91}, G_{42}, G_{62}, G_{82} не приведены в статье ввиду их громоздкости. Система неравенств (7)-(16) позволяет ввести новую переменную $\widetilde{\Gamma} =$

$\Gamma\omega_0^2$ и относительно новой переменно функции G_{31}, G_{51}, G_{71}, G_{91} являются соответственно многочленами второй, шестой, десятой и четырнадцатой степени, а функции G_{42}, G_{62}, G_{82} - соответственно многочленами четвертой, восьмой и двенадцатой степени.

В случае учета основного тона колебания жидкости ($n = 1$) из системы неравенств (7)-(16) остаются только неравенства (7)-(9) и (12)-(14), в которых следует положить $E_2 = 0$ и $\widetilde{\lambda}_2 = 0$.

Таким образом, полученные неравенства (7)-(16) дают возможность уточнить влияние дополнительных тонов колебания жидкости на устойчивость равномерного вращения вокруг неподвижной точки несимметричного твердого тела с произвольной осесимметричной полостью, содержащей идеальную жидкость.

4. Случай цилиндрической полости. На примере цилиндрической полости с высотой $2h$ и радиусом a были исследованы неравенства (7)-(16). Следует отметить, что в случае эллипсоидальной полости из бесконечного спектра собственных частот λ_n возбуждается единственная гармоника λ_1 ($E_n = 0$ для $n \neq 1$), а в случае цилиндрической полости все собственные частоты $\lambda_n \neq 0$ ($E_n \neq 0$). Коэффициенты инерционной связи твердого тела и жидкости вычисляются по формуле

$$E_{lp} = \frac{256h^3\rho a^4(\kappa_{lp}+1)}{\pi^3(2l+1)^4\kappa_{lp}(\kappa_{lp}-1)[\kappa_{lp}(k_l^2+1)-1]}. \tag{17}$$

Здесь индекс $n = (l, p)$ представляет собой всевозможное сочетание порядковых номеров продольных и поперечных гармоник l и p:

$$k_l = \frac{\pi(2l+1)}{2h}, \quad \xi_{lp} = k_l\sqrt{\kappa_{lp}^2 - 1} \quad (l = 0, 1, 2...; p = 1, 2, 3...). \tag{18}$$

Величина ξ_{lp} является p-м корнем уравнения

$$\xi J_0(\xi) - [1 \pm \sqrt{(\frac{\xi}{k_l})^2 + 1}]J_1(\xi) = 0. \tag{19}$$

Значения коэффициентов A, B, C, E_1, E_2, λ_1 и λ_2 для твердого тела с цилиндрической полостью с радиусом a и высотой $2h$ приведены ниже:

$$A = A_0 + \pi\rho a^5\frac{H}{6}(4H^2 + 3 + 12D^2),$$

$$B_0 = A_0(1+\epsilon), \quad B = B_0 + \pi\rho a^5\frac{H}{6}(4H^2 + 3 + 12D^2),$$

$$C = C_0 + \pi\rho a^5 H, \quad m = m_0 + 2\pi\rho a^3 H,$$

где ρ – плотность жидкости; A_0, B_0 и C_0 – главные моменты инерции твердого тела относительно неподвижной точки; m_0 – масса твердого тела; d и d_1 соответственно расстояния от центра масс системы до неподвижной точки и до центра масс жидкости;$D = d/a$, $D_1 = d_1/a$, $H = h/a$.

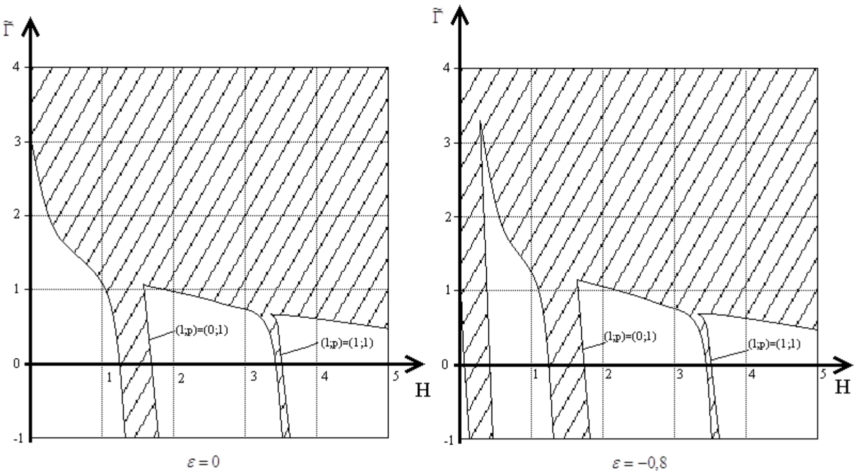

Рис. 1. $\widetilde{\Gamma} = \Gamma\omega_0^2$

На рис. 1 представлены области неустойчивости в зависимости от $\widetilde{\Gamma}$ и H ($\widetilde{\Gamma} = \Gamma\omega_0^2$, $\Gamma = -mgd$), рассчитанные для $A_0 = 10$, $C_0 = 11$, $D = D_1 = 1$; $a = 1$; $\epsilon = 0$ – рисунок слева и $\epsilon = -0,8$ – рисунок справа. Области неустойчивости заштрихованы. При учете дополнительного (второго) тона колебаний жидкости появляется новая ветвь неустойчивости, которая приводит к незначительному количественному изменению вида области устойчивости движения несимметричного твердого тела. При появлении несимметрии в твердом теле незначительно смещаются существующие области неустойчивости, а также появляется дополнительная область неустойчивости, которая зависит от величины дебаланса ϵ и стремится к нулю при $\epsilon \to 0$.

В случае $\Gamma = 0$ и симметричного твердого тела влияние дополнительных тонов было исследовано в работе [2]. Так, например, было показано, что в большинстве случаев можно учитывать только первое значение $l = 0$, так как коэффициент E_{lp} обратно пропорционален четвертой степени l и при $l = 1$ на два порядка меньше, чем при $l = 0$. По индексу p сходимость более медленная, обратно пропорциональная квадрату p. Основной эффект в первом приближении можно учесть уже при одном члене ряда $l = 0$, $p = 1$. Учет дополнительных тонов приводит к появлению незначительных областей неустойчивости. В случае малой несимметрии наблюдается аналогичная закономерность: могут появляться дополнительные области неустойчивости, существующие области неустойчивости могут деформироваться, незначительно увеличиваться и смещаться [2].

На основании проведенных аналитических исследований и численных расчетов можно сделать следующие выводы:

1. Учет дополнительных тонов колебаний жидкости приводит к появлению новых незначительных областей неустойчивости.

2. С увеличением несимметрии в твердом теле с цилиндрической полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью, происходит увеличение и смещение основных и дополнительных областей неустойчивости.

5. Заключение. В работе рассмотрена задача о необходимых условиях устойчивости вращения несимметричного твердого тела с осесимметричной полостью, полностью заполненной идеальной жидкостью. Данная задача является обобщением работ [1-3] с учетом дополнительных тонов колебаний жидкости. Разработан математический аппарат исследования необходимых условий устойчивости равномерного вращения твердого тела с жидкостью. В частности, при отсутствии несимметрии ($\epsilon = 0$) полученные результаты совпадают с [2].

Представляет дальнейший интерес учет влияния дополнительных тонов колебаний жидкости ($n = 1..5$) на области неустойчивости вращения несимметричного твердого тела с жидкостью, а также учет влияния диссипативного и постоянных внешних моментов.

1. *Рвалов Р.В., Роговой В.М.* О вращательном движении тела с полостью, содержащей жидкость. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 3. – С. 15-20.
2. *Докучаев Л.В., Рвалов Р.В.* Об устойчивости стационарного вращения твердого тела с полостью, содержащей жидкость // Там же. – 1973. – № 2. – С. 6-14.
3. *Киселева Н.В.* О необходимых условиях устойчивости расномерного вращения несимметричного твердого тела с жидкостью // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С.154-161.
4. *Джури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. – М.: Наука. – 1979. – 304 с.

Yu. N. Kononov, N. V. Kiselyova

Research the effect of additional tones of fluid oscillations on stability rigid asymmetric body rotation with liquid.

With the additional tones of oscillations of ideal fluid necessary stability conditions of the uniform rotation rigid body with an arbitrary axisymmetric cavity containing fluid have been obtained. The effect of additional tones and unbalance solid on the field of stability for cylindrical cavity has been estimated.

Keywords: *asymmetric rigid body, ideal fluid, symmetric cavity, necessary conditions of stability.*

Ю. М. Кононов, Н. В. Кисельова

Дослідження впливу додаткових тонів коливань рідини на стійкість обертання несиметричного твердого тіла з рідиною.

З урахуванням додаткових тонів коливань ідеальної рідини отримано необхідні умови стійкості рівномірного обертання несиметричного твердого тіла з довільною осесиметричною порожниною, яка містить рідину. На прикладі циліндричної порожнини оцінено вплив додаткових тонів і несиметрії твердого тіла на області стійкості.

Ключові слова: *несиметричне тверде тіло, ідеальна рідина, симетрична порожнина, необхідні умови стійкості.*

Донецкий национальный ун-т
`nvkiselyova@gmail.com`

Получено 03.06.13