УДК 517.55

©2013. **Ю. С. Коломойцев**

О НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В КЛАССАХ $\varphi(L)$

Получены необходимые и достаточные условия выполнимости неравенств типа Бернштейна для дробных производных тригонометрического полинома в классах $\varphi(L)$. ***Ключевые слова:*** *неравенство Бернштейна, тригонометрические полиномы, дробные производные, классы $\varphi(L)$, интеграл Фурье.*

1. Введение. Пусть $\mathcal{T}_N$ – множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше N. Неравенством Бернштейна для производной тригонометрического полинома называют неравенство вида

$$\|T_N'\|_p \le N\|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N. \tag{1}$$

Данное неравенство при $p=\infty$ в частных случаях получил С.Н. Бернштейн [1, т. 1, с. 26]. В общем случае с $p=\infty$ это неравенство было доказано М. Риссом [2]. А. Зигмунд [3, т. 2, гл. 10], используя интерполяционную формулу Рисса, доказал следующее утверждение: *если функция φ выпукла (вниз) на* $[0,\infty)$ *и неубывающая, то*

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(|T_N'(t)|)dt \le \int_{\mathbb{T}} \varphi(N|T_N(t)|)dt, \quad T_N \in \mathcal{T}_N \tag{2}$$

(здесь и далее $\mathbb{T}=[-\pi,\pi)$). Легко видеть, что если $\varphi(t)=t^p$, то из (2) сразу следует неравенство (1) при всех $p\in[1,\infty)$.

При $0<p<1$ неравенства вида (1) исследовались в работах [4-7]. В частности, в [4] и [5] было доказано, что

$$\|T_N'\|_p \le C(p)N\|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N,$$

где $C(p)$ – некоторая константа, зависящая только от p. В.В. Арестов в работе [7] показал, что данное неравенство, на самом деле, выполняется с константой $C(p)=1$. Более того, в этой же работе было получено неравенство (2) с функцией $\varphi:[0,\infty)\mapsto\mathbb{R}$, которая представима в виде $\varphi(u)=\psi(\ln u)$, где функция ψ не убывает и выпукла на $(-\infty,\infty)$.

Пусть $T_N^{(\beta)}$ – дробная производная Вейля полинома T_N. Из результатов работы П.И. Лизоркина [8] вытекает, что при $p\ge 1$ и $\beta\ge 1$ (см. также [9]) имеет место неравенство

$$\|T_N^{(\beta)}\|_p \le N^\beta\|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N.$$

В случае пространств L_p, $0<p<1$, неравенства типа Бернштейна для дробных производных тригонометрического полинома изучались в работах [10-13]. Оказалось, что при $0<p<1$ неравенство типа Бернштейна выполняется, только если порядок производной $\beta > 1/p-1$ или $\beta \in \mathbb{N}$. В частности, Е.С. Белинским и И.Р. Лифляндом в [11] было доказано, что при $0 < p < 1$ и $\beta > 1/p - 1$

$$\|T_N^{(\beta)}\|_p \le C(\beta, p) N^\beta \|T_N\|_p, \quad T_N \in \mathcal{T}_N,$$

где $C(\beta, p)$ – некоторая константа, зависящая только от β и p. А при $\beta \le 1/p - 1$, $\beta \notin \mathbb{N}$, такое неравенство с константой C, не зависящей от полинома T_N, уже не выполняется.

Пусть Φ – класс функций $\varphi : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$, являющихся модулем непрерывности, т.е. φ непрерывная неубывающая функция, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x+y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $L_0(\mathbb{T})$ – множество действительных 2π-периодических функций, измеримых и почти всюду конечных. Если $\varphi \in \Phi$, то класс функций

$$\varphi(L) = \left\{ f \in L_0(\mathbb{T}) \, : \, \rho(f)_\varphi := \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(t)|) dt < \infty \right\}$$

является линейным метрическим пространством. Частными случаями данного пространства являются пространства L_p, $0 < p < 1$ (случай $\varphi(t) = t^p$), и L_0 с топологией сходимости по мере (случай $\varphi(t) = t/(1+t)$). Отметим, что классы $\varphi(L)$ иногда называют классами Орлича и обозначают $\widetilde{L}_\varphi$.

В недавней работе С.А. Пичугова [13] было показано, что если $\beta \ge 1$, а функция $\varphi \in \Phi$ является выпуклой вверх и удовлетворяет условию $\varphi(t) \sim t$ при $t \to 0$, то

$$\rho(T_N^{(\beta)})_\varphi \le N^\beta \rho(T_N)_\varphi. \tag{3}$$

Легко видеть, что соотношение (3), вообще говоря, отличается от обычного неравенства типа Бернштейна и оценка сверху является более грубой, чем в неравенстве вида (2) для соответствующих функций φ.

В настоящей работе получены обобщения результатов работы [11] на классы $\varphi(L)$, т.е. с заменой квазинормы $\|\cdot\|_p$ функционалом $\rho(\cdot)_\varphi$, где $\varphi \in \Phi$. При этом, в отличие от (3), мы установим неравенства вида

$$\rho(T_N^{(\beta)})_\varphi \le C \rho(N^\beta T_N)_\varphi,$$

которые, как будет показано ниже, выполняются уже не для всех функций φ, удовлетворяющих условию $\varphi(t) \sim t$ при $t \to 0$

Далее всюду символами C, C_1 и C_2 будем обозначать положительные константы (возможно различные даже в одной строке), не зависящие от рассматриваемого полинома T_N и числа N.

2. Основные определения и вспомогательные утверждения. Пусть f_β – однородная функция порядка $\beta \ge 0$, т.е.

$$f_\beta(t\xi) = t^\beta f_\beta(\xi), \quad t > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Введем оператор "дробного дифференцирования" $D(f_\beta)$, который на множестве всех тригонометрических полиномов определяется по формуле

$$D(f_\beta)T_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} f_\beta(k)c_k e^{ikt}, \quad T_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}. \tag{4}$$

Заметим, что если $f_\beta(k) = (ik)^\beta$, то в (4) стоит дробная производная Вейля полинома T_N, а при $f_\beta(k) = |k|^\beta$ – производная Рисса.

Пусть
$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(\xi)e^{-i\xi x}d\xi$$
– преобразование Фурье функции f.

Мы будем часто использовать следующую лемму (см. [12]).

Лемма 1. *Пусть f_β однородная функция порядка $\beta \ge 0$, не являющаяся полиномом, а функция $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель и $\eta(0) = 1$. Тогда*

1)
$$|\widehat{f_\beta \eta}(x)| \le C_1(1+|x|)^{-\beta-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

2) *найдется $\lambda > 0$ такое, что*
$$|\widehat{f_\beta \eta}(x)| \ge C_2|x|^{-\beta-1}, \quad |x| \ge \lambda,$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные константы.

Имеет место следующее неравенство типа Бернштейна.

Лемма 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$ и f_β однородная функция порядка $\beta \ge 0$. Тогда*

$$\rho(D(f_\beta)T_N)_\varphi \le C \int_1^N \rho(N^\beta x^{-1-\beta}T_N)_\varphi dx, \quad T_N \in \mathcal{T}_N, N \ge 1, \tag{5}$$

где C – некоторая положительная константа, не зависящая от N и полинома T_N.

Доказательство. Введем в рассмотрение полином

$$K_{N,\beta}(x) = \sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\eta\left(\frac{k}{N}\right)e^{ikx},$$

где $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(\xi) = 1$ при $|\xi| \le 1$ и $\eta(\xi) = 0$ при $|\xi| \ge 2$.

Имеет место равенство

$$D(f_\beta)T_N(x) = \frac{1}{4N+1}\sum_{\nu=0}^{4N} K_{N,\beta}(x - x_\nu - t)T_N(x_\nu + t), \quad x_\nu = \frac{2\pi\nu}{4N+1},$$

используя которое, получаем

$$
\begin{aligned}
I :=& \int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-\beta}|D(f_\beta)T_N(x)|)dx \le \\
&\le C\sum_{\nu=0}^{4N}\int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta}|K_{N,\beta}(x-x_\nu-t)T_N(x_\nu+t)|)dx = \\
&= C\sum_{\nu=0}^{4N}\int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta}|K_{N,\beta}(x)T_N(x_\nu+t)|)dx.
\end{aligned}
$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по t, а также применяя формулу суммирования Пуассона (см., напр., [14]):

$$
\sum_k \widehat{f}(N(x+2\pi k)) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}N}\sum_k f\left(\frac{k}{N}\right)e^{-ikx}, \tag{6}
$$

находим

$$
\begin{aligned}
2\pi I \le& \sum_{\nu=0}^{4N}\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta}|K_{N,\beta}(x)T_N(x_\nu+t)|)dxdt \le \\
&\le CN\int_{\mathbb{T}}\int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-1-\beta}|K_{N,\beta}(x)T_N(t)|)dxdt = \\
&= C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi\Bigg(\left|\frac{1}{N}\sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\eta\left(\frac{k}{N}\right)e^{\frac{ikx}{N}}\right|\cdot|T_N(t)|\Bigg)dtdx \le \\
&\le C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi\Bigg(\left|\sum_k \widehat{f_\beta\eta}(x+2\pi Nk)\right|\cdot|T_N(t)|\Bigg)dtdx \le \\
&\le C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi(|\widehat{f_\beta\eta}(x)T_N(t)|)dtdx + \\
&\quad + C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi\Bigg(\left|\sum_{k\ne 0} \widehat{f_\beta\eta}(x+2\pi Nk)\right|\cdot|T_N(t)|\Bigg)dtdx := I_1+I_2.
\end{aligned} \tag{7}
$$

Далее, используя лемму 1, получаем, что

$$
I_1 \le C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi\bigg(\frac{|T_N(t)|}{(1+|x|)^{\beta+1}}\bigg)dtdx \le C\int_{\mathbb{T}}\int_1^N \varphi\bigg(\frac{|T_N(t)|}{x^{\beta+1}}\bigg)dtdx, \tag{8}
$$

а

$$
\begin{aligned}
I_2 \le& C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi\bigg(\sum_{k\ne 0}\frac{|T_N(t)|}{(1+|x+2\pi Nk|)^{\beta+1}}\bigg)dtdx \le \\
&\le C\int_{\mathbb{T}}\int_{N\mathbb{T}} \varphi\bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|T_N(t)|}{(Nk)^{\beta+1}}\bigg)dtdx \le \\
&\le C\int_{\mathbb{T}}\int_1^N \varphi(x^{-\beta-1}|T_N(t)|)dtdx.
\end{aligned} \tag{9}
$$

Таким образом, объединяя (7), (8) и (9), имеем

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi(N^{-\beta}|D(f_\beta)T_N(t)|)dt \le C \int_{\mathbb{T}} \int_1^N \varphi(x^{-\beta-1}|T_N(t)|)dtdx.$$

Из последнего неравенства сразу следует (5).

Лемма 2 доказана. □

Далее нам понадобится понятие функции растяжения. Пусть φ – произвольная, строго положительная всюду конечная функция на $(0,\infty)$. Ее *функцией растяжения* называют функцию

$$M_\varphi(s) := \sup_{t>0} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}.$$

Приведем некоторые свойства функции M_φ в случае $\varphi \in \Phi$ (см. [15, гл. II, §4]):

1) M_φ всюду конечная неубывающая на $(0,\infty)$ функция и

$$M_\varphi(s_1 s_2) \le M_\varphi(s_1) M_\varphi(s_2), \quad s_1, s_2 \in (0,\infty);$$

2) существует число γ_φ (называемое *нижним показателем растяжения функции* φ) такое, что:

а) $\gamma_\varphi \in [0,1]$,

б) $M_\varphi(s) \ge s^{\gamma_\varphi}$, $s \in (0,1]$,

в) для любого $\varepsilon > 0$ найдется константа C_ε такая, что при $s \in (0,1)$

$$M_\varphi(s) \le C_\varepsilon s^{\gamma_\varphi - \varepsilon}.$$

При этом,

$$\gamma_\varphi = \lim_{s\to 0} \frac{\ln M_\varphi(s)}{\ln s} = \sup_{0<s<1} \frac{\ln M_\varphi(s)}{\ln s}.$$

В частности, если $\gamma_\varphi = 0$, то $M_\varphi(s) \equiv 1$, $s \in [0,1]$, если же $\gamma_\varphi > 0$, то $M_\varphi(+0) = 0$.

В дальнейшем нам понадобится следующее "техническое" условие на функцию $\varphi \in \Phi$.

Будем говорить, что функция φ принадлежит классу Φ^*, если $\varphi \in \Phi$ и найдется функция α такая, что

$$\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \alpha(0) = 1, \quad \operatorname{supp} \alpha \subset (-1,1) \tag{10}$$

и

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(|\widehat{\alpha}(x)|)dx < \infty. \tag{11}$$

Уточним последнее условие. В работе [16] было доказано существование функции $\eta \in L_1(\mathbb{R})$ такой, что $\eta \ne 0$, $\operatorname{supp} \eta \subset (-1,1)$ и

$$|\widehat{\eta}(x)| = O(e^{-u(|x|)|x|}), \quad x \to \pm\infty,$$

где u – некоторая положительная функция такая, что $u(x) \to 0$ при $x \to \infty$ и

$$\int_1^\infty \frac{u(x)}{x} dx < \infty. \tag{12}$$

Причем, последнее условие является также и необходимым для существования такой функции η.

Таким образом, $\varphi \in \Phi^*$, если найдется убывающая к нулю функция $u(x) > 0$ такая, что имеет место (12) и

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(e^{-u(|x|)|x|}) dx < \infty.$$

Нетрудно заметить, что любая функция $\varphi \in \Phi$ с $\gamma_\varphi > 0$ принадлежит классу Φ^*.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \Phi^*$, а функция α удовлетворяет условиям (10) и (11). Тогда*

$$N \int_{\mathbb{T}} \varphi\left(\frac{1}{N}\left|\sum_k \alpha\left(\frac{k}{N}\right) e^{ikt}\right|\right) dt \le C \int_{\mathbb{R}} \varphi(|\widehat{\alpha}(x)|) dx, \quad N \ge 1,$$

где C – константа, не зависящая от N и α.

Доказательство этой леммы легко вывести из формулы суммирования Пуассона (6), см., напр., [17, 4.1.1].

3. Основной результат.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi^*$ и f_β однородная функция порядка $\beta \ge 0$, не являющаяся полиномом. Тогда*

1) *если $\gamma_\varphi > 1/(1+\beta)$, то*

$$\rho(T_N^{(\beta)})_\varphi \le C \rho(N^\beta T_N)_\varphi, \quad T_N \in \mathcal{T}_N, N \ge 1, \tag{13}$$

   где C – константа, не зависящая от N и T_N;

2) *если $\gamma_\varphi < 1/(1+\beta)$, а при $\gamma_\varphi = 1/(1+\beta)$ имеет место*

$$\sup_{t>0} \int_1^\infty \frac{\varphi(t x^{-1/\gamma_\varphi})}{\varphi(t)} dx = \infty, \tag{14}$$

   то неравенство (13) не выполняется с константой C, не зависящей от N и T_N.

Доказательство. Утверждение 1) легко следует из свойства в) функции M_φ и леммы 2. Действительно, используя неравенство (5) и выбирая положительное $\varepsilon < \gamma_\varphi - 1/(1+\beta)$, находим

$$\rho(D(f_\beta)T_N)_\varphi \le C \int_1^N M_\varphi(x^{-1-\beta}) dx \rho(N^\beta T_N)_\varphi \le$$
$$\le C \int_1^N \frac{dx}{x^{(1+\beta)(\gamma_\varphi - \varepsilon)}} \rho(N^\beta T_N)_\varphi \le C \rho(N^\beta T_N)_\varphi.$$

Докажем утверждение 2). Пусть $A > 0$. Предположим, что существует константа C, не зависящая от N и полинома T_N, такая, что

$$\rho(AD(f_\beta)T_N)_\varphi \le C\rho(AN^\beta T_N)_\varphi, \quad T_N \in \mathcal{T}_N. \tag{15}$$

Пусть α – четная функция, удовлетворяющая условиям (10) и (11). Рассмотрим последовательность функций $\{F_N(x)\}_{N=1}^\infty$, определенных по формуле

$$F_N(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{N}\sum\limits_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\alpha\left(\frac{k}{N}\right)e^{i\frac{k}{N}x}\right|, & x \in [-\pi N, \pi N]; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Используя неравенство (15) и лемму 3, последовательно находим

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \varphi(A|F_N(x)|)dx = N\int_{\mathbb{T}} \varphi\left(A\left|\frac{1}{N}\sum_k f_\beta\left(\frac{k}{N}\right)\alpha\left(\frac{k}{N}\right)e^{ikt}\right|\right)dt \le \\ &\le CN\int_{\mathbb{T}}\varphi\left(A\left|\frac{1}{N}\sum_k \alpha\left(\frac{k}{N}\right)e^{ikt}\right|\right)dt \le C\int_{\mathbb{R}}\varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx. \end{aligned} \tag{16}$$

Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in \mathbb{T}$. По определению интеграла Римана нетрудно проверить, что

$$\lim_{N\to\infty} F_N(x_0) = \sqrt{2\pi}|\widehat{f_\beta\alpha}(-x_0)|. \tag{17}$$

Таким образом, учитывая (16) и (17), применяя при этом лемму Фату, получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(A|\widehat{f_\beta\alpha}(x)|)dx \le C\int_{\mathbb{R}}\varphi(A|\widehat{\alpha}(x)|)dx.$$

Откуда, используя лемму 1, находим, что

$$\int_{|x|>\lambda}\varphi(AC_1|x|^{-\beta-1})dx \le C\int_{\mathbb{R}}\varphi(A|\widehat{\alpha}_1(x)|)dx,$$

где $\alpha_1(x) := \alpha(x)\|\widehat{\alpha}\|_\infty^{-1}$.

Из последнего неравенства после простых оценок и замены переменных $x \to x/(8C)$, имеем

$$\int_1^\infty \varphi(Ax^{-1-\beta})dx \le \frac{1}{4}\int_0^\infty \varphi\left(A\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\right|\right)dx, \tag{18}$$

где константа C не зависит от A.

Выберем $m \in \mathbb{N}$ настолько большим, что при $x \ge m$ имеет место неравенство

$$\left|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\right| < \frac{1}{x^{1+\beta}}.$$

Тогда, используя (18), учитывая при этом оценку

$$\int_1^\infty \varphi(Ax^{-1-\beta})dx \ge (m-1)\varphi(Am^{-1-\beta}) + \int_m^\infty \varphi(Ax^{-1-\beta})dx,$$

имеем

$$(m-1)\varphi(Am^{-1-\beta}) < \frac{1}{4}\int_0^m \varphi\Big(A\Big|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\Big|\Big)dx.$$

Далее,

$$(m-1)\frac{\varphi(Am^{-1-\beta})}{\varphi(A)} < \frac{1}{4}\int_0^m \frac{\varphi(A|\widehat{\alpha}_1(\frac{x}{8C})|)}{\varphi(A)}dx \le \frac{1}{4}\int_0^m M_\varphi\Big(\Big|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\Big|\Big)dx$$

и, следовательно,

$$(m-1)M_\varphi(m^{-1-\beta}) < \frac{1}{4}\int_0^m M_\varphi\Big(\Big|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\Big|\Big)dx. \qquad (19)$$

Таким образом, если $\gamma_\varphi = 0$, то из (19) мы получаем, что $m-1 < m/4$, т.е. противоречие.

Если $\gamma_\varphi > 0$, то из (19) при достаточно малом ε вытекает, что

$$\frac{m^{1-(1+\beta)\gamma_\varphi}}{2} \le C\int_0^m \Big|\widehat{\alpha}_1\left(\frac{x}{8C}\right)\Big|^{\gamma_\varphi-\varepsilon}dx \le C.$$

Поскольку $1-(1+\beta)\gamma_\varphi > 0$, мы снова получаем противоречие.

Если $\gamma_\varphi = 1/(1+\beta)$ и выполняется (14), то противоречие легко следует из (18).

Теорема 1 доказана. □

1. *Бернштейн С.Н.* О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени. – Собр. соч.: в 4 т. – **1**. – Изд.-во АН СССР, М. – 1952. – С. 11-104.
2. *Riesz M.* Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique // C. R. Acad. Sci. – 1914. – **158**. – P. 1152-1154.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. I, II. – М.: Мир, 1965.
4. *Иванов В.И.* Прямые и обратные теоремы теории приближения в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Матем. заметки. – 1975. – **18**, № 5. – С. 641-658.
5. *Стороженко Э.А., Кротов В.Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 1975. – **98(140)**, № 3 (11). – С. 395-415.
6. *Mate A. and Nevai P.G.* Bernsten's inequality in L_p for $0 < p < 1$ and $(C, 1)$ Bounds for Ortogonal Polynomials // Ann. Math. 2nd Ser. – 1980. – **111**, № 1. – P. 145-154.
7. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1981. – **45**, № 1. – С. 3-22.
8. *Лизоркин П.И.* Оценки тригонометрических интегралов и неравенство Бернштейна для дробных производных // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1965. – **29**, № 1. – С. 109-126.
9. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы Фурье и K-функционалы гладких функций // Укр. матем. вiсник. – 2005. – **2**, № 2. – С. 236-280.
10. *Taberski R.* Approximation in the Frechet spaces L^p $(0 < p < 1)$ // Functiones et Approximatio. – 1979. – **VII**. – P. 105-121.
11. *Belinsky E., Liflyand E.* Approximation properties in L_p, $0 < p < 1$ // Functiones et Approximatio. – 1993. – **XXII**. – P. 189-199.
12. *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On some extensions of Berenstein's inequality for trigonometric polynomials // Functiones et Approximatio. – 2001. – **XXIX**. – P. 125-142.
13. *Пичугов С.А.* Неравенства для тригонометрических полиномов в пространствах с интегральной метрикой // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 12. – С. 1657-1671.
14. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Наука, 1974.

15. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978.
16. *Ingham A.E.* A note on Fourier transforms // J. London Math. Soc. – 1934. – **s1-9**, № 1. – P. 29-32.
17. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Appoximation of Functions. – Kluwer, 2004.

Yu. S. Kolomoitsev

On the Bernstein-type inequalities for fractional derivatives in the classes $\varphi(L)$.

The necessary and sufficient conditions for the validity of Bernstein-type inequalities for fractional derivatives of a trigonometric polynomial in the classes $\varphi(L)$ are established.

Keywords: *Bernstein inequality, trigonometric polynomials, fractional derivatives, the classes $\varphi(L)$, Fourier integral.*

Ю. С. Коломойцев

Про нерівності типу Бернштейна для дробових похідних у класах $\varphi(L)$.

Отримано необхідні та достатні умови, при яких виконуються нерівності типу Бернштейна для дробових похідних тригонометричного полінома в класах $\varphi(L)$.

Ключові слова: *нерівність Бернштейна, тригонометричні поліноми, дробові похідні, класи $\varphi(L)$, інтеграл Фур'є.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`kolomus1@mail.ru`

Получено 15.05.13