УДК 519.21+511.72

©2013. **Я. В. Гончаренко, Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий**

ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОЇ ПІДСУМИ ЗНАКОДОДАТНОГО РЯДУ ЛЮРОТА З НЕЗАЛЕЖНИМИ ДОДАНКАМИ

Вивчаються лебегівська структура, тополого-метричні і фрактальні властивості спектра (мінімального замкненого носія) розподілу випадкової підсуми заданого знакододатного ряду Люрота з незалежними доданками, поведінка модуля її характеристичної функції на нескінченності. Повністю вивчено структуру, знайдено необхідні та достатні умови аномальної фрактальності, нуль-вимірності Лебега та канторовості спектра. Доведено, що сингулярний розподіл підсуми є близьким до дискретного за поведінкою характеристичної функції на нескінченності, якщо ряд не є періодичним.

Ключові слова: *знакододатний ряд Люрота, підсума ряду Люрота, множина підсум ряду Люрота, випадкова підсума ряду Люрота, сингулярний розподіл, лебегівська структура розподілу, характеристична функція випадкової величини.*

Вступ. Нагадаємо, що *числовим знакододатним рядом Люрота* (далі: рядом Люрота) називається вираз вигляду

$$\begin{aligned}&\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)(d_3+1)}+...\\&...+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}+...,\end{aligned} \tag{1}$$

де (d_n) – фіксований нескінченний впорядкований набір натуральних чисел.

Очевидно, що ряд (1) визначається послідовністю натуральних чисел (d_n). Далі використовуватимемо скорочення $D_n = d_1(d_1+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)$. Тоді

$$D_{n+1} = D_n d_n(d_{n+1}+1), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Кожен ряд Люрота є збіжним, і його сума належить півінтервалу $(0, 1]$, причому ряду (1) – $(\frac{1}{d_1+1}, 1]$, зокрема, $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Зауважимо, що залишок (хвіст) ряду Люрота (1)

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{D_n} \geq \frac{1}{D_{k+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r_k} \leq D_{k+1} \tag{3}$$

не є рядом Люрота, але подається у вигляді:

$$r_k = \frac{1}{D_k d_k} \cdot \left(\frac{1}{d_{k+1}+1} + \frac{1}{d_{k+1}(d_{k+1}+1)(d_{k+2}+1)} + ...\right) = \frac{x_k}{D_k d_k},$$

де вираз в круглих дужках є рядом Люрота (з сумою x_k).

Теорема 1. *([2]) Будь-яке число $x \in (0,1]$ единим чином розкладається в знакододатний ряд Люрота, тобто для числа x існує едина послідовність натуральних чисел $(d_n), d_n = d_n(x)$, така, що*

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} = \Delta^L_{d_1 d_2 ... d_n ...}. \qquad (4)$$

Останній символічний запис називається *L-зображенням числа x*.

Наслідок. *Різні ряди Люрота мають різні суми.*

Теорема 2. *([2]) Число $x \in (0,1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L-зображення є періодичним.*

Означення 1. *Підрядом ряду Люрота* (1) називається кожен вираз виду $\sum\limits_{n \in M \subset \mathbb{N}}^{\infty} \frac{1}{D_n}$, де M – фіксована підмножина множини натуральних чисел.

Кожен ряд Люрота має континуальну множину підрядів.

Суму підряду Люрота називатимемо *підсумою ряду Люрота*.

Підсуму x ряду Люрота (1), залежну від множини M, можна подати у вигляді

$$x(M) = x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)} = \Delta_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_n ...}, \qquad (5)$$

де $\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$

Множину всіх підсум заданого ряду Люрота з сумою r позначатимемо C_r, тобто

$$C_r = \left\{ x : x = x(M), \ M \in 2^N \right\}.$$

Очевидно, що жоден з підрядів ряду Люрота при $M \neq \mathbb{N}$, не є рядом Люрота.

Означення 2. Якщо $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{D_k}$, де $\varepsilon_k \in \{0,1\}$, то це символічно записуватимемо $x = \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_n ...}$ і називатимемо *C_r-зображенням числа x*. При цьому число $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x)$ називається k-тим C_r-символом числа x.

Лема 1. *Якщо $d_n \neq 1$ для нескінченної кількості значень $n \in N$ і $M_1 \neq M_2$, то для підсум $x(M_1)$ і $x(M_2)$ виконується нерівність $x(M_1) \neq x(M_2)$.*

Доведення. Нехай

$$x(M_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i} = \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 ... \varepsilon_n ...}, \quad x(M_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_i}{D_i} = \Delta^{C_r}_{\varepsilon'_1 \varepsilon'_2 ... \varepsilon'_n ...}.$$

Оскільки $M_1 \neq M_2$, то існує m таке, що $\varepsilon_m \neq \varepsilon'_m$, але $\varepsilon_i \neq \varepsilon'_i$ при $i < m$. Не порушуючи загальності, нехай $\varepsilon_m = 1$, а $\varepsilon'_m = 0$. Розглянемо різницю

$$x(M_1) - x(M_2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_i}{D_i} = \frac{1}{D_m} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_i}{D_i} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon'_i}{D_i} \geq \frac{1}{D_m} - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{D_i} =$$

$$= \frac{1}{D_m}\left(1 - \frac{1}{d_m(d_{m+1}+1)} - \frac{1}{d_m(d_{m+1}+1)d_{m+1}(d_{m+2}+1)} - \dots\right) > 0,$$

оскільки серед членів послідовності (d_{m+j}) існують відмінні від одиниці.

Отже, $x(M_1) > x(M_2)$. $\square$

Зауваження. Окремої уваги заслуговують ряди Люрота, для яких $d_n = 1$ при $n \geq n_0$. Для них $\Delta^{C_r}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m\ldots\varepsilon_n 1(0)} = \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_m\ldots\varepsilon_n 0(1)}$.

Означення 3. Якщо $(c_1, \dots, c_n)$ – фіксований набір 0 та 1, то множину

$$\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m} = \{x : x = \Delta^{C_r}_{c_1c_2\ldots c_m\varepsilon_{m+1}\varepsilon_{m+2}\ldots\varepsilon_{m+j}\ldots} \quad \varepsilon \in \mathbb{N}\}$$

називатимемо *C_r-циліндром рангу m з основою $c_1 \dots c_m$.*

В л а с т и в о с т і C_r-циліндрів:

1. $\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m} = \Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m 0} \bigcup \Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m 1}$.

2. $\min \Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{c_i}{D_i} = a$, $\max \Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m} = a + r_m$,

причому $\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m} = [a, b] \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 1$.

3. $d(\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m}) = r_m \to 0 \ \ (m \to \infty)$.

4. Основне метричне відношення:

$$\frac{|\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m}|} = \frac{r_{m+1}}{r_m} = \frac{r_{m+1}}{\frac{1}{D_{m+1}} + r_{m+1}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}}}.$$

5. Мають місце нерівності:

$$\frac{1}{1 + d_{m+1}(d_{m+2}+1)} \leq \frac{|\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m i}|}{|\Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m}|} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{D_{m+1}}}.$$

Справді, враховуючи (2), (3) і те, що $r_{m+1} < 1$ та $\frac{1}{D_{m+1}} \leq r_m < r_0$, отримуємо:

$$\frac{1}{D_{m+1}} \leq \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}} \leq \frac{D_{m+2}}{D_{m+1}} = \frac{D_{m+1} d_{m+1}(d_{m+2}+1)}{D_{m+1}} = d_{m+1}(d_{m+2}+1).$$

Тоді $1 + \frac{1}{D_{m+1}} \leq 1 + \frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}} \leq 1 + d_{m+1}(d_{m+2}+1)$.

А отже, $\frac{1}{1+d_{m+1}(d_{m+2}+1)} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{D_{m+1} r_{m+1}}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{D_{m+1}}}$.

6. $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m} = x = \Delta^{C_r}_{c_1\ldots c_m\ldots}$ для довільної послідовності (c_m), $\ \ c_m \in A$.

Теорема 3. *([2]) Множина C_r підсум ряду Люрота (1) є континуальною, досконалою множиною, яка є:*

1. відрізком $[0, 1]$, якщо $d_n = 1$ для всіх $n \in N$;

2. об'єднанням скінченного числа циліндрів (відрізків), якщо $d_n = 1$ для всіх n, більших деякого n_0;

3. ніде не щільною, досконалою множиною нульової міри Лебега, якщо $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n.

1. Випадкова підсума ряду Люрота з незалежними доданками. Нехай (d_n) – задана послідовність натуральних чисел; (θ_n) – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k}, відповідно, причому $p_{0k} + p_{1k} = 1$. Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{D_n} = \Delta^{C_r}_{\theta_1\theta_2\ldots\theta_n\ldots}, \quad D_n = d_1(d_1+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1), \tag{6}$$

яка є випадковою підсумою ряду (1) з незалежними доданками. Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [9] випадкова величина ξ має чистий лебегівський тип розподілу (чисто дискретний, чисто сингулярний або чисто абсолютно неперервний). Наслідком відомої теореми П. Леві [15] є наступний критерій дискретності.

Лема 2. *Для того, щоб випадкова величина ξ мала дискретний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $M = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0$.*

Наслідок. *Для того, щоб випадкова величина ξ мала неперервний розподіл, необхідно і достатньо, щоб $M = 0$.*

Теорема 4. *Точковий спектр (множина атомів) дискретно розподіленої випадкової величини ξ складається з точки $x_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{i_k}{D_k}$, де $p_{i_k k} = \max\{p_{0k}, p_{1k}\}$ і всіх точок x вигляду $x = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\varepsilon_k}{D_k} + \sum\limits_{k=m+1}^{\infty} \frac{i_k}{D_k}$, де $\varepsilon_k \in A = \{0, 1\}$, $p_{\varepsilon_k k} > 0$, $k \in N$.*

Доведення. З незалежності θ_k і єдиності C_r-зображення числа випливає, що

$$P\{\xi = \Delta^{C_r}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k}, \quad \text{тобто} \quad P\{\xi = x_0\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{i_k k}.$$

Спочатку доведемо н е о б х і д н і с т ь: якщо $M > 0$, то розподіл ξ є чисто дискретним. Оскільки $P\{\xi = x_0\} = M$, то $P\{\xi = x_0\} > 0$.

Якщо $p_{\varepsilon_{k}(x)k} > 0$ для всіх $k \in N$ і C_r-зображення точки x відрізняється від зображення точки x_0 не більше, ніж першими m C_r-символами, то

$$P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{m} p_{\varepsilon_k k} \cdot \prod_{k=m+1}^{\infty} p_{i_k k} = \prod_{k=1}^{m} p_{\varepsilon_k k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{i_k k}}.$$

Нехай A_m – множина всіх точок x, C_r-цифри яких співпадають з C_r-цифрами точки x_0, починаючи з m. Тоді послідовність множин A_m має властивості:

1. $\{x_0\} = A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_m \subset A_{m+1} \subset ...$

2. $P\{\xi \in A_m\} = \sum\limits_{\varepsilon_1 \in A} \cdots \sum\limits_{\varepsilon_{m-1} \in A} \left(\prod\limits_{k=1}^{m-1} p_{\varepsilon_k k} \cdot \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{i_k k}} \right) = \frac{M}{\prod\limits_{k=1}^{m} p_{i_k k}} \xrightarrow{m\to\infty} 1.$

Отже, зліченна множина $A = \lim\limits_{m\to\infty} A_m = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$ є носієм розподілу випадкової величини ξ, тобто розподіл ξ є дискретним.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо ξ має дискретний розподіл, то існує x таке, що

$$0 < P\{\xi = x\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{\varepsilon_k k} \le \prod_{k=1}^{\infty} \max_i\{p_{ik}\} = M, \quad \textit{тобто}\ \ M > 0. \qquad \square$$

2. Спектральні властивості розподілу ξ. Нагадаємо, що *спектром S_ξ розподілу випадкової величини ξ* називається множина всіх точок росту її функції розподілу F_ξ, тобто мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл випадкової величини ξ, тобто

$$S_\xi = \{x : F_\xi(x+\varepsilon) - F_\xi(x-\varepsilon) > 0\ \forall \varepsilon > 0\} = \{x : \mathbb{P}\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0\ \forall \varepsilon > 0\}.$$

Якщо $p_{ik} > 0$ для всіх $i \in \{0, 1\}$ і $k \in N$, то спектр S_ξ співпадає з множиною всіх підсум ряду Люрота.

Лема 3. *Спектром розподілу випадкової величини ξ є замикання множини*

$$E = \{x : x = \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots},\ p_{\varepsilon_k k} > 0\ \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\xi$. Нехай $\Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots} = x \in E$. Тоді

$$\mathbb{P}\{\xi \in \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} > 0\ \forall k \in N.$$

Для довільного $\varepsilon > 0$ існує k таке, що $\Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k} \subset (x-\varepsilon; x+\varepsilon)$. Тому

$$\mathbb{P}\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon) \ge \mathbb{P}\{\xi \in \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} > 0, \textit{тобто}\ \ x \in S_\xi\ \ \textit{і}\ \ E \subset S_\xi.$$

2. Покажемо тепер, що $S_\xi \subset E$. Нехай $x \in S_\xi$, тобто

$$\mathbb{P}\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} > 0\ \forall \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{\varepsilon_k k} = 0$. Тоді $\mathbb{P}\{\xi \in \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = \prod_{i=1}^{k} p_{\varepsilon_i i} = 0$. Розглянемо довільне ξ таке, що $x = \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k \ldots}$. Можливі випадки:

1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \subset \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}$;

2) $(x-\varepsilon; x+\varepsilon) \notin \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку $\mathbb{P}\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} \le \mathbb{P}\{\xi \in \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = 0$, що суперечить (7). У другому випадку ξ є односторонньо граничною точкою множини C_r. Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що

$$(x-\varepsilon; x) \subset \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k},\ \mathbb{P}\{\xi \in \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = 0.$$

І в цьому випадку $\mathbb{P}\{\xi \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon)\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta^{C_r}_{\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k}\} = 0$, що суперечить умові (7). Отримане протиріччя доводить, що $p_{\varepsilon_k k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$. Отже, $S_\xi = E$, що й вимагалось довести. $\square$

3. Лебегівська структура розподілу випадкової величини ξ.

Теорема 5. *Нехай розподіл ξ є неперервним, тобто $M = 0$. Тоді ξ має:*

1. *абсолютно неперервний розподіл, коли*

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty}(1-2p_{0k})^2+(1-2p_{1k})^2<\infty, \quad \text{якщо } d_n=1 \text{ для всіх } n>n_0; \qquad (8)$$

2. *сингулярний розподіл канторівського типу у протилежному випадку, тобто, коли $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n.*

Доведення. Якщо $M=0$, то розподіл ξ, згідно з наслідком з теореми , є неперервним. Оскільки

$$\xi=\xi_1+\frac{1}{D_{n_0}}\xi', \quad \text{де } \xi_1=\frac{\theta_1}{D_1}+\ldots+\frac{\theta_{n_0}}{D_{n_0}}$$

має дискретний розподіл, а ξ' є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами. Тому згідно з відомими фактами [16], ξ', а отже, і ξ мають абсолютно неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли виконується (8).

Тепер розглянемо випадок, коли $d_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n. Згідно з теоремою 3, $S_\xi \subset C_r$ і $\lambda(C_r)=0$. Тоді $\lambda(S_\xi)=0$. Отже, ξ має сингулярний розподіл канторівського типу, що й вимагалось довести. □

4. Функція розподілу випадкової величини ξ. Функцію розподілу F_ξ випадкової величини ξ досить визначити в точках спектра розподілу S_ξ, оскільки в інших точках вона довизначається за неперервністю та монотонністю.

Лема 4. *В точці $\Delta^{C_r}_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_k\ldots}=x\in S_\xi$ функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ виражається*

$$F_\xi(x)=\beta_{\varepsilon_1 1}+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\beta_{\varepsilon_k k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{\varepsilon_j j}\right], \qquad (9)$$

де $\beta_{0k}=0, \ \ \beta_{1k}=p_{0k}$, тобто $\beta_{\varepsilon_k k}=\varepsilon_k p_{0k}$.

Доведення. Подія $\{\xi<x\}$ подається у вигляді

$$\begin{aligned}\{\xi<x\}=\{\theta_1<\varepsilon_1\}\bigcup\{\theta_1=\varepsilon_1,\theta_2<\varepsilon_2\}\bigcup\ldots\bigcup\\ \bigcup\{\theta_1=\varepsilon_1,\theta_2=\varepsilon_2,\ldots,\theta_{k-1}=\varepsilon_{k-1},\theta_k<\varepsilon_k\}\bigcup\ldots.\end{aligned} \qquad (10)$$

Оскільки події у (10) несумісні, то отримуємо:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\xi<x\}=\mathbb{P}\{\theta_1<\varepsilon_1\}+\mathbb{P}\{\theta_1=\varepsilon_1,\theta_2<\varepsilon_2\}+\ldots+\\ +\mathbb{P}\{\theta_1=\varepsilon_1,\theta_2=\varepsilon_2,\ldots,\theta_{k-1}=\varepsilon_{k-1},\theta_k<\varepsilon_k\}+\ldots.\end{aligned}$$

Враховуючи (10) і незалежність подій, маємо:

$$\mathbb{P}\{\theta_1=\varepsilon_1,\ldots,\theta_{k-1}=\varepsilon_{k-1},\theta_k<\varepsilon_k\}=\left(\prod_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}\{\theta_i=\varepsilon_i\}\right)\cdot\mathbb{P}\{\theta_k<\varepsilon_k\}=\beta_{\varepsilon_k k}\prod_{j=1}^{k-1}p_{\varepsilon_j j}.$$

Отже, функція розподілу $F_\xi(x)=\mathbb{P}\{\xi<x\}$ подається у формі (9). □

Теорема 6. *Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ виражається $F_\xi(x) = F_\xi(\overline{x})$, де* $\overline{x} = \sup\{u: \ u < x, \ u \in S_\xi\}$.

Теорема 6 випливає з леми 4 і означення функції розподілу.

5. Характеристична функція випадкової величини ξ та її властивості. Нагадаємо, що характеристичною функцією випадкової величини X називається вираз Me^{itX}.

Лема 5. *Характеристична функція випадкової величини ξ, визначеної рівністю* (6), *має вигляд* $f_\xi(t) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{it}{D_k}\right)$, *а її модуль записується у вигляді*

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|, \quad \text{де} \ \ |f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2 \frac{t}{2D_k}}.$$

Доведення. Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичного сподівання, отримуємо

$$f_\xi(t) = \mathsf{M}e^{it\xi} = \mathsf{M}\exp\left(it\sum_{k=1}^{\infty}\tfrac{\varepsilon_k}{D_k}\right) = \mathsf{M}\left(\exp\tfrac{it\varepsilon_1}{D_1}\cdot\exp\tfrac{it\varepsilon_2}{D_2}\cdot\ldots\cdot\exp\tfrac{it\varepsilon_k}{D_k}\cdot\ldots\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\mathsf{M}\exp\tfrac{it\varepsilon_k}{D_k} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(p_{0k} + p_{1k}\exp\tfrac{it}{D_k}\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left[\left(p_{0k} + p_{1k}\cos\tfrac{t}{D_k}\right) + ip_{1k}\sin\tfrac{t}{D_k}\right] = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t)$$

і

$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k}\cos\frac{t}{D_k} + p_{1k}^2} = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2D_k}},$$

що й доводить лему. □

Дослідимо асимптотичну поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини ξ на нескінченності, а саме: величину $L_\xi = \lim\limits_{|t|\to\infty}\sup|f_\xi(t)|$. Відомо, що коли розподіл є дискретним (тобто, коли $M > 0$), то $L_\xi = 1$. Тому розглядатимемо лише випадок, коли $M = 0$.

Теорема 7. *Якщо $d_n = 1$ при $n > n_0$, то $L_\xi = 0 \ \Leftrightarrow \ \lim\limits_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}$.*

Доведення. Подамо випадкову величину ξ у вигляді

$$\xi = \left(\frac{\theta_1}{D_1} + \ldots + \frac{\theta_{n_0}}{D_{n_0}}\right) + \frac{1}{D_{n_0}d_{n_0}}X = \xi_1 + \frac{1}{D_{n_0}d_{n_0}}X = \xi_1 + \xi_2.$$

Тоді з незалежності ξ_1 і ξ_2 отримуємо $f_\xi(t) = f_{\xi_1}(t)f_{\xi_2}(t)$.

Оскільки випадкова величина ξ_1 має дискретний розподіл, то $L_{\xi_1} = 1$. Тому поведінка модуля характеристичної функції ξ на нескінченності визначається поведінкою ξ_2, а отже, X. Тому асимптотична поведінка модуля характеристичної функції на нескінченності визначається випадковою величиною X, яка є випадковою величиною з незалежними двійковими цифрами. Тому, не порушуючи загальності,вважатимемо $n_0 = 0$ (в цьому випадку $X = \xi$).

Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки $L_\xi = 0$, то для кожної послідовності (t_n) такої, що $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, має місце

$$\lim_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0. \tag{11}$$

Припустимо, що при цьому p_{0k} не прямує до $\frac{1}{2}$ при $k \to \infty$. Тоді існує послідовність $k_m : p_{0k_m} \nrightarrow \frac{1}{2}$ $(m \to \infty)$.

Розглянемо $t_n = 2^{n+1}\pi$. Тоді матимемо $\sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}} = \sin^2(2^{n-k}\pi) = 0$, $|f_k(t)| = 1$ *при* $k \le n$

$$|f_\xi(t_k)| = \sqrt{1 - 4p_{0(n+1)}p_{1(n+1)}} \prod_{k=n+2}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2 2^{n-k}\pi}. \tag{12}$$

Розглянемо послідовність t_{n_m} таку, що $p_0(n_m+1) \ne \frac{1}{2}$ і $p_0(n_m+1) \nrightarrow \frac{1}{2}$. Тоді $|f_\xi(t_{n_m})|$ не прямує до 0. Більше того, $|f_\xi(t_{n_m})| = |f_{n_m+1}(t)|S_{n_m}$, де

$$S_{n_m} = \prod_{k=n_m+2}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2 2^{n_m-k}\pi}.$$

Останній добуток, очевидно, збігається, причому

$$S_{n_m} \ge \prod_{m=2}^{\infty} \sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\pi}{2^m}} = \prod_{m=2}^{\infty} \cos\frac{\pi}{2^m} = a > 0.$$

Отже, $0 < a < |f_\xi(t_{n_m})|$ для всіх $m = 1, 2, \dots$, що суперечить рівності (11). Необхідність доведено.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай t_n — довільна послідовність, яка прямує до нескінченності, коли $n \to \infty$. Покажемо, що при умові $p_{0k} \to \frac{1}{2}$ $(k \to \infty)$ $|f_\xi(t_n)| \to 0$ $(n \to \infty)$. Послідовність $a_n = \frac{t_n}{2^{m_n+1}}$, $m_n = m_n(t_n) = [\log_2 \frac{t_n}{\pi}] + 1$, є обмеженою, зліва числом $\frac{\pi}{4}$, справа — $\frac{\pi}{2}$.

Можливі випадки:

1. Існує границя послідовності $\{a_n\}$, коли $n \to \infty$.
2. Послідовність $\{a_n\}$ границі не має.

Розглянемо їх окремо.

1. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = q$. Тоді $q \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$.

а) Якщо $q = \frac{\pi}{4}$, то $\frac{t_n}{2^{m_n}} \to \frac{\pi}{2}$ $n \to \infty$ і $B_{t_n} = \sqrt{1 - 4p_{0(m_n-1)}p_{1(m_n-1)}sin^2\frac{1}{2^{m_n}}} \to 0$ $(n \to \infty)$. Оскільки $|f_\xi(t_n)| \le B_{t_n}$, то $|f_\xi(t_n)| \to 0 (n \to \infty)$.

б) Якщо $q = \frac{\pi}{2}$, то $C_{t_n} = \sqrt{1 - 4p_{0m_n}p_{1m_n}sin^2\frac{1}{2^{m_n+1}}} \to 0$ $(n \to \infty)$ і з $|f_\xi(t_n)| \le C_{t_n}$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

в) Нехай тепер $\frac{\pi}{4} < q < \frac{\pi}{2}$. Тоді $q = A\pi$, де $\frac{1}{4} < q < \frac{1}{2}$, і двійковий розклад числа A

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(A)}{2^k} = 0, \;\; \alpha_1(A)\dots\alpha_k(A)\dots$$

має першу двійкову цифру $\alpha_1(A) = 0$, а другу $\alpha_1(A) = 1$.

Можливі випадки:

1. A *— число двійково-раціональне, тобто його двійковий розклад містить період (0) або (1);*

2. A *— число двійково-ірраціональне.*

Розглянемо ці випадки окремо.

1) Нехай A — число двійково-раціональне. $A = 0,01\alpha_3 \ldots \alpha_{l-1}1(0) = 0,01\alpha_3 \ldots \alpha_{l-1}0(1)$. Проаналізуємо двійкові розклади чисел α_n.

Нехай α_n прямує до A зліва. Розглянемо двійковий розклад A, що містить період (1).

Якщо $\alpha_n \neq A$, то існує $j = j(n)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(a_n) = \alpha_i(A), & i = \overline{1, j-1}, \\ \alpha_i(a_n) = \alpha_i(A), \end{cases}$$

причому $\alpha_n \to A$ $(n \to \infty)$ рівносильна умові $j \to \infty$.

Для досить великих n існує $s = s(n)$:

$$a_n = 0,01\alpha_3 \ldots \alpha_{l-1}0\underbrace{11\ldots1}_{s}\alpha_{l+s+1}\alpha_{l+s+2}\ldots,$$

$$2^{l-1}a_n = 1\alpha_3 \ldots \alpha_{l-1},0\underbrace{11\ldots1}_{s}\alpha_{l+s+1}\alpha_{l+s+2}\ldots,$$

причому з $n \to \infty$ випливає $s \to \infty$.

Оскільки $\frac{t_n}{2^{k+}} = \frac{t_n 2^{m_n+1}}{2^{k+1}2^{m_n+1}} = 2^{m_n-k}a_n$, то при $k = m_n - l + 1$

$$\frac{t_n}{2^{k+}} = (1\alpha_3 \ldots \alpha_{l-1},0\underbrace{11\ldots1}_{s}\alpha_{l+s+1}\alpha_{l+s+2}\ldots)\pi \quad i$$

$$\sin^2\frac{t_n}{2^{k+}} = (0,0\underbrace{11\ldots1}_{s}\alpha_{l+s+1}\alpha_{l+s+2}\ldots)\pi.$$

З ростом s аргумент синуса прямує до $\frac{\pi}{2}$.

Оскільки $|f_\xi(t_n)| = \sqrt{1 - 4p_{0m_n-l+1}p_{1m_n-l+1}sin^2(0,0\underbrace{11\ldots1}_{s}\alpha_{l+s+1}\alpha_{l+s+2}\ldots)\pi} \to 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)| = 0$.

Якщо a_n прямує до A справа, то розглянемо двійковий розклад числа A, який містить період (0), тобто $A = 0,01\alpha_3 \ldots \alpha_{l-1}1(0)$. Аналогічними міркуваннями можна показати, що і в цьому випадку $\lim\limits_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)| = 0$.

Якщо число A є двійково-ірраціональним, то воно має єдине двійкове зображення, яке містить нескінченну кількість і нулів, і одиниць. Оскільки $p_{0k} \to \frac{1}{2}$ $(k \to \infty)$, то існує k_0 таке, що для всіх $k > k_0$ $\frac{1}{5} < p_{0k}p_{1k} \leq \frac{1}{4}$.

Для таких k і для $\frac{\pi}{4} < \gamma < \frac{\pi}{2}$ $\sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}sin^2\gamma} < \sqrt{\frac{3}{5}}$.

Нехай k_s – номер місця s-го 0 у двійковому розкладі A, після якого йде 1, тобто $\alpha_{k_s}(A) = 0 \;\; i \;\; \alpha_{k_{s+1}}(A) = 1$.

З $a_n \to A \;\; (k \to \infty)$ випливає, що $l(a_n)$ номер першої двійкової цифри a_n, відмінної від цифри A, прямує до нескінченності, тобто $l(a_n) \to \infty$. Тобто, для достатньо великих n і $k = m_n - k_s + 1 > k_0$ маємо

$$\frac{1}{2} = \sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}} = \sin^2 (0,01\beta_3\beta_4 \ldots)\pi < 1, \quad \beta_i \in \{0;1\} \quad i$$

$$A_{t_n} = \prod_{k=k_0+1}^{l(a_n)-1} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}sin^2 \frac{t_n}{2^{k+1}}} \leq \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{j_l},$$

де j_l – це кількість пар (01) у двійковому розкладі A на місцях від $k_0 + 1$ до $l(a_n) - 1$ включно.

Оскільки з $n \to \infty$ випливає $l(a_n) \to \infty$ і $j_l \to \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

2. Розглянемо тепер випадок, коли посліідовність $\{a_n\}$ не має границі. Припустимо, що $L_\xi = c_0 > 0$. Тоді існує послідовність $\{t_n\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = c_0$.

Оскільки послідовність $a_n = \frac{t_n}{2^{m_n+1}}$ обмежена (знизу числом $\frac{\pi}{4}$, а зверху – $\frac{\pi}{2}$), то з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{a_{n_s}\}$. Тоді $\lim\limits_{s\to\infty} |f_\xi(t_{n_s})| = \lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = c_0$. але, як доведено у випадку 1, $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

Отримане протиріччя доводить достатність і всю теорему. □

Наслідок. *Якщо* $d_n = 1$ *при* $n > n_0$, *то* $0 < L_\xi \leq 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \lim\limits_{k\to\infty} p_{0k} \neq \frac{1}{2}$.

Теорема 8. *Якщо* $d_n \neq 1$ *для всіх* $n > n_0$, *то* $L_\xi > 1$, *а при* $d_{n+1} > d_n$ *для всіх* $n > n_0$ *має місце рівність* $L_\xi = 1$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли $d_n \neq 1$ нескінченну кількість разів.

Розглянемо послідовність $t_n = 2\pi D_n$. Оцінимо

$$\prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2D_k}} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{t}{2D_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos \frac{t}{2D_k}\right|.$$

Отже, маємо $L_\xi \geq \lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(t_n)| \geq \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left|\cos \frac{t_n}{2D_k}\right|$.

Виразимо

$$\left|\cos \frac{t_n}{2D_k}\right| = \left|\cos \frac{\pi D_n}{D_k}\right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad k \leq n, \\ \cos \frac{t_n}{2D_k}, & \text{якщо} \quad k > n. \end{cases}$$

Тому $\prod\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| = \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1}(d_{n+1}+1)\ldots d_k(d_k+1)(d_{k+1}+1)}$.

Але для $k > n$

$$\cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1}(d_{n+1}+1)\ldots d_k(d_k+1)(d_{k+1}+1)} \geq \cos \frac{\pi}{2^{k-n}} = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{2^{k-n+1}} >$$

$$> 1 - 2\left(\frac{\pi}{2^{k-n+1}}\right)^2.$$

Тоді $\prod\limits_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1}(d_{n+1}+1)\ldots d_k(d_k+1)(d_{k+1}+1)} \geq \prod\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi^2}{2^{2(k-n)+1}}\right)\right)$.

Згідно з ознакою збіжності нескінченних добутків останній нескінченний добуток є збіжним, бо ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{\pi^2}{2^{2(k-n)+1}}\right)$ є збіжним. А отже, $L_\xi > 0$ і

$$\prod_{k=m}^{\infty} \cos \frac{\pi}{d_n d_{n+1}(d_{n+1}+1)\ldots d_k(d_k+1)(d_{k+1}+1)} \to 1,$$

коли $d_{n+1} > d_n$ для будь-якого $n \in N$. $\Box$

Зауваження. Ця теорема свідчить про близкість сингулярного неперервного розподілу випадкової величини ξ до дискретного.

1. *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 9. – С. 1155-1168.
2. *Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2008. – № 9. – С. 200-211.
3. *Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В.* Властивості розподілу випадкової величини, елементи зображення якої знакододатним рядом Люрота утворюють однорідний ланцюг Маркова // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 10. – С. 100-107.
4. *Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В.* Властивості розподілу випадкової величини, L-символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Том 23. – С. 71-83.
5. *Zhykharyeva Yu., Pratsiovytyi M.* Expansions of numbers in positive Lüroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – Volume 14. – 2012. – Number 1. – P. 145-160.
6. *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 174-189.
7. *Працьовитий М.В., Гетьман Б.І.* Ряди Енгеля та їх застосування // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 7. – С. 105-116.
8. *Працьовитий М.В., Лещинський О.Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірн. та мат. стат. – 1997. – № 57. – С.134-139.
9. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
10. *Працьовитий М.В.* Розподіли суми випадкових степеневих рядів // Доп. НАН України. – 1996. – № 5. – С. 32-37.
11. *Гончаренко Я.В.* Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів ймовірностей // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – № 3. – С. 376-390.
12. *Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M., Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits// Random Oper. Stohastic Equations, 2007. – 15, № 1. – P. 89-97.
13. *Lüroth J.* Uber eine eindeutige Entwickelung von Zahlen in eine unendliche Reihe // Math. Ann. – 1883. – **21**. – P. 411-423.
14. *Sylvester J.J.* On a point in the theory of vulgar fractions // Amer. J. Math. – 1880. – **3**, № 4. – P. 332-335. – Postscript, ibid 388-389.

15. *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables eventuelles indepedantes // Studia Math. – 1931. – Vol. 3. – P. 119-155.
16. *Salem R.* On some singular monotonic function which are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – 53. – P. 423-439.

Y. Goncharenko, Yu. Zhykharyeva, M. Pratsiovytyi

Properties of distribution of random incomplete sum of given positive Lüroth series with independent terms.

The paper is devoted to random incomplete sum of given positive Lüroth series with independent terms. We study Lebesgue structure, topological, metric and fractal properties of spectrum (i.e., minimal closed support) of distribution of this random variable as well as behavior at infinity of absolute value of its characteristic function. Structure of distribution is studied completely. Necessary and sufficient conditions for spectrum to be anomalously fractal, of zero Lebesgue measure and of Cantor type are found. We prove that singular distribution of incomplete sum is close to discrete distribution by behaviour of characteristic function at infinity if series is not periodic.

Keywords: *positive Lüroth series, incomplete sum of Lüroth series, set of incomplete sum of Lüroth series, random incomplete sum of Lüroth series, singular distribution, Lebesgue structure of probability distribution, characteristic function of random variable.*

Я. В. Гончаренко, Ю. И. Жихарева, М. В. Працевитый

Свойства распределения случайной подсуммы знакоположительного ряда Люрота с независимыми слагаемыми.

Изучаются лебеговская структура, тополого-метрические и фрактальные свойства спектра (минимального замкнутого носителя) распределения случайной подсуммы заданного знакоположительного ряда Люрота с независимыми слагаемыми, поведение модуля ее характеристической функции на бесконечности. Полностью изучена структура, найдены необходимые и достаточные условия аномальной фрактальности, ноль-мерности Лебега и канторовости спектра. Доказано, что сингулярное распределение подсуммы близко к дискретному по поведению характеристической функции на бесконечности, если ряд не периодический.

Ключевые слова: *знакоположительный ряд Люрота, подсумма ряда Люрота, множество подсумм ряда Люрота, случайная подсумма ряда Люрота, сингулярное распределение, лебеговская структура распределения, характеристическая функция случайной величины.*

Національний педагогічний ун-т ім. М.П. Драгоманова
yan_a@ukr.net
july2105@mail.ru
prats4@yandex.ru

Получено 07.05.13