УДК 517.5

©2013. **Е. С. Афанасьева**

ГРАНИЧНОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОНТИНУАЛЬНО КОЛЬЦЕВЫХ Q-ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОТНОСИТЕЛЬНО p-МОДУЛЕЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В данной работе исследуется проблема продолжения на границу континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модулей между областями в метрических пространствах с мерами. В частности, для квазиконформных отображений в метрических пространствах сформулированы условия на границы континуальных областей, при которых допускается непрерывное или гомеоморфное продолжение на границу таких отображений.

Ключевые слова: *метрические пространства с мерами, континуально кольцевые Q-гомеоморфизмы, квазиконформные отображения, p-модули.*

1. Введение. В данной статье мы продолжаем изучение граничного поведения отображений в метрических пространствах с мерами, начатое в работе [18]. Развивая технику p-модулей, $p \in (0, \infty)$, применительно к семействам континуумов в метрических пространствах, мы строим теорию граничного поведения континуально кольцевых Q-гомеоморфизмов, обладающих геометрическим свойством вида (4), строгое определение которых будет дано в п.2. Отметим, что поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ относительно p-модуля при $p \neq n$ во внутренних точках области исследовалось в работе [17]. Там же был приведен критерий принадлежности таких отображений классу кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля. Отметим также, что если в (4) функцию Q считать ограниченной п.в. некоторой постоянной $K \in [1, \infty)$, а в качестве метрического пространства выбрать n-мерное евклидово пространство и $p = n$, то мы приходим к классическим квазиконформным отображениям, которые были впервые введены в работах Грётча, Лаврентьева и Морри. Фактически, изучение кольцевых Q-гомеоморфизмов началось с модульного неравенства (2.5) в [3], которое положило начало развитию теории Q-гомеоморфизмов, а впоследствии также и кольцевых Q-гомеоморфизмов.

Прежде, чем сформулировать основной результат работы, напомним, что топологическое пространство *связно*, если его нельзя разбить на два непустых непересекающихся открытых множества. Напомним также, что топологическое пространство T называется *локально связным*, если для любой его точки x_0 и любой ее окрестности U найдется ее связная окрестность $V \subseteq U$. Компактные связные хаусдорфовы пространства называются *континуумами.* Напомним, что топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если для любой пары точек найдутся их взаимно непересекающиеся окрестности. В дальнейшем для любых множеств A,

Автор благодарит член-корр. НАН Украины, д.ф.-м.н., профессора В.Я. Гутлянского за интересные обсуждения и ценные замечания.

B и C в топологическом пространстве T через $\Gamma(A,B;C)$ обозначаем семейство всех континуумов γ, соединяющих A и B в C, т.е. таких, что $\gamma\cap A\neq\emptyset$, $\gamma\cap B\neq\emptyset$ и $\gamma\setminus\{A\cup B\}\subseteq C$.

Пространство T будем называть *континуально связным*, если любую пару его точек можно погрузить в континуум γ в T. Под *континуальной областью* в топологическом пространстве T будем понимать открытое континуально связное множество D. Также пространство T будем называть *локально континуально связным* в точке x_0, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subseteq U$, которая является континуальной областью в T. Пространство T будем называть *континуально связным* в точке x_0, если для любой ее окрестности U найдется ее окрестность $V\subseteq U$ такая, что $V\setminus\{x_0\}$ является континуальной областью, ср. [13], с. 274. Наконец, континуальную область D будем называть *континуально связной в точке* $x_0\in\partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 найдется окрестность $V\subseteq U$ этой точки такая, что $V\cap D$ является континуальной областью.

Основной целью данной статьи является доказательство следующей теоремы о непрерывном продолжении на границу отображения, обратного к континуально кольцевому Q-гомеоморфизму.

Теорема 1. *Пусть D и D' – континуальные области в метрических пространствах (X,d,μ) и (X',d',μ') с борелевскими мерами μ и μ', соответственно. Пусть также D континуально связна во всех своих граничных точках и $\overline{D}$ – компакт, D' имеет континуально слабо плоскую границу относительно p-модуля, $p\in(0,\infty)$, а $f:D\to D'$ – континуально кольцевой Q-гомеоморфизм относительно p-модуля с $Q\in L^1_\mu(D)$. Тогда обратное отображение $g=f^{-1}:D'\to D$ допускает непрерывное продолжение $\overline{g}:\overline{D'}\to\overline{D}$.*

2. Определения и предварительные результаты. Далее H^k, $k\in[0,\infty)$, обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* множества A в метрическом пространстве (X,d). Точнее, пусть A множество в (X,d). Тогда полагаем

$$H^k(A):=\sup_{\varepsilon>0}H^k_\varepsilon(A),\ \ H^k_\varepsilon(A):=\inf\ \sum_{i=1}^{\infty}(diam\ A_i)^k,$$

где инфимум берётся по всем покрытиям A множествами A_i с $diam\ A_i<\varepsilon$, см., напр., [9]. Напомним, что $diam\ A_i=\sup\limits_{x,\ y\in A_i}d(x,y)$. Как известно, если для некоторого множества A и $k_1\geq 0$ выполнено условие $H^{k_1}(A)<\infty$, то $H^{k_2}(A)=0$ для произвольного числа $k_2>k_1$, см., напр., разд. 1 в гл. VII в [9]. В связи с этим вводится величина

$$\dim_H A:=\sup_{H^k(A)>0}k, \tag{1}$$

которая называется *хаусдорфовой размерностью* множества A.

В дальнейшем говорим, что континуум в метрическом пространстве (X,d) является *k-спрямляемым*, если его мера Хаусдорфа H^k конечна. 1−спрямляемые континуумы γ будем называть просто *спрямляемыми континуумами* или континуумами *конечной длины*, а $H^1(\gamma)$ – *длиной* γ. Фугледе рассматривал системы мер в абстрактном множестве $\mathcal{X}$ с фиксированной основной мерой, см., напр., [20]. Нами будут рассмотрены системы борелевских мер, ассоциированных с континуумами в метрических пространствах (X,d). Именно, мера $m_\gamma^{(k)}$, ассоциированная с континуумом γ в (X,d), определяется для каждого борелевского множества B в (X,d) как хаусдорфова мера H^k пересечения $B\cap\gamma$ при фиксированном $k>0$. В дальнейшем, для любого континуума $\gamma\in\Gamma$ мера $m_\gamma := m_\gamma^{(1)}$.

Пусть теперь (X,d,μ) – метрическое пространство с борелевой мерой μ. Неотрицательную μ-измеримую функцию $\rho : X \to [0,\infty]$ называем *допустимой* для семейства континуумов Γ в (X,d), пишем $\rho\in adm\,\Gamma$, если

$$\int\limits_X \rho\, dm_\gamma \ \geq\ 1 \quad \forall\ \gamma\in\Gamma. \tag{2}$$

p-модуль, $0<p<\infty$, семейства Γ континуумов γ в (X,d,μ) определим следующим образом:

$$M_p(\Gamma)=\inf_{\rho\ \in\ adm\,\Gamma}\int\limits_X \rho^p(x)\, d\mu(x). \tag{3}$$

Здесь мы доопределим $M_p(\Gamma)=+\infty$, если $\Gamma=\emptyset$.

Определение континуально кольцевого Q-гомеоморфизма. Пусть D и D' – континуальные области в пространствах (X,d,μ) и (X',d',μ'), соответственно, $Q: X\to(0,\infty)$ – $\mu-$измеримая функция и $p\in(0,\infty)$. Говорим, что гомеоморфизм $f:D\to D'$ является *континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в точке* $x_0\ \in\ \overline{D}$ относительно p-модуля, если неравенство

$$M_p(\Gamma(f(C_0),\ f(C_1);\ D'))\leq\int\limits_{A\cap D} Q(x)\cdot\eta^p(d(x,x_0))\ d\mu(x) \tag{4}$$

выполняется для любого кольца $A\ =\ A(x_0,r_1,r_2) :=\ \{x_0\in X:\ r_1\ <\ d(x,x_0)\ <\ r_2\}$, $0<\ r_1\ <r_2\ <\infty$, любых двух континуумов $C_0\subset\overline{B(x_0,\,r_1)}\cap D$ и $C_1\subset D\setminus B(x_0,r_2)$ и любой борелевой функции $\eta:(r_1,r_2)\to[0,\infty]$ такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}\eta(r)\ dr\ \geq\ 1. \tag{5}$$

Наконец, говорим, что гомеоморфизм $f\ :\ D\ \to\ D'$ есть *континуально кольцевой Q-гомеоморфизм*, если f является континуально кольцевым Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0\ \in\ \overline{D}$. Данное выше определение мотивировано кольцевым определением квазиконформности в $\mathbb{R}^n$, $n\ =\ 3$, введенного Герингом в [7]. Впервые кольцевые Q-гомеоморфизмы были введены в работе [16] в связи с исследованием уравнения Бельтрами с вырождением условия строгой эллиптичности.

Пространство (X,d,μ) называется *α-регулярным по Альфорсу*, если существует постоянная $C\geq1$ такая, что

$$C^{-1}r^\alpha\leq\mu(B_r)\leq Cr^\alpha \tag{6}$$

для всех шаров B_r в X радиуса $r < diam\,X$. Как известно, α-регулярные пространства имеют хаусдорфову размерность α, см., напр., [21], с. 61. Пространство (X,d,μ) называется *регулярным по Альфорсу*, если оно α-регулярно для некоторого $\alpha \in (1,\infty)$.

Говорят также, что пространство (X,d,μ) *α-регулярно сверху в точке* $x_0 \in X$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$\mu(B(x_0,r)) \le Cr^\alpha \tag{7}$$

для всех шаров $B(x_0,r)$ с центром в точке $x_0 \in X$ радиуса $r < r_0$. Пространство (X,d,μ) *регулярно сверху*, если условие (7) выполнено в каждой точке x для некоторого $\alpha \in (1,\infty)$.

Будем говорить, что семейство континуумов Γ_1 из произвольного топологического пространства T *минорируется* семейством континуумов Γ_2 из T, пишем $\Gamma_1 > \Gamma_2$, если для каждого континуума $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существует континуум $\gamma_2 \in \Gamma_2$ такой, что γ_2 является подконтинуумом γ_1, т.е. $\gamma_2 \subseteq \gamma_1$.

Лемма 1. *Пусть Ω – открытое множество в топологическом пространстве T. Тогда*

$$\Gamma(\Omega, T\setminus\Omega; T) > \Gamma(\Omega, \partial\Omega; \Omega)\,. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть Γ_1 – семейство континуумов γ, соединяющих Ω и $T\setminus\Omega$ в T, и пусть Γ_2 – семейство континуумов γ^*, соединяющих Ω и $\partial\Omega$ в Ω. Прежде всего заметим, что $\overline{\Omega}$ – замкнутое множество и, следовательно, множества $E_\gamma = \overline{\Omega}\cap\gamma$, $\gamma \in \Gamma_1$ – компакты, поскольку γ – континуумы, см., напр., предложение I.9.3 в [5]. Компоненты связности E_γ являются замкнутыми попарно непересекающимися множествами, см., напр., теорему 5.46.III.1 в [12], и, следовательно, взаимно непересекающимися континуумами, см., также предложение I.9.3 в [5]. Хотя бы одна из них E_0 содержит точку из Ω. Эта компонента связности E_0 обязана также, по теореме Янишевского, содержать точку $\partial\Omega$, см., напр., теорему 47.III.1 в [12].

Таким образом, найден подконтинуум E_0 исходного континуума $\gamma \in \Gamma_1$, который лежит в $\overline{\Omega}$ и соединяет Ω с $\partial\Omega$, т.е. $E_0 \in \Gamma_2$ и, следовательно, $\Gamma_1 > \Gamma_2$. $\Box$

Лемма 2. *Пусть γ – спрямляемый континуум в метрическом пространстве (X,d), соединяющий точки $x_1 \in \overline{B(x_0,r_1)}$ и $x_2 \in X\setminus B(x_0,r_2)$, где $x_0 \in X$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, и пусть $\eta : [0,\infty] \to [0,\infty]$ – борелева функция. Тогда*

$$\int\limits_\gamma \eta(d(x,x_0))\,dm_\gamma \;\ge\; \int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\,dr\ . \tag{9}$$

Доказательство. По неравенству треугольника, для любых точек y_1 и $y_2 \in X$,

$$d(y_1,y_2) \;+\; d(y_1,x_0) \;\ge\; d(y_2,x_0)$$

и

$$d(y_1,y_2) \;+\; d(y_2,x_0) \;\ge\; d(y_1,x_0)\ ,$$

т.е.

$$d(y_1, y_2) \;\geq\; |\; d(y_1, x_0) - d(y_2, x_0) \;| \;. \tag{10}$$

Заметим, что функция $d(x, x_0)$ каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие некоторое число в $\mathbb{R}^+$ и ввиду (10) при этом отображении длина множества не возрастает. Напомним также, что по свойству Дарбу о связных множествах непрерывная функция $d(x, x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ, см., напр., следствие 5.46.3а в [12]. Следовательно,

$$dH^1 \geq dr \;, \tag{11}$$

где $r = d(x, x_0)$, $dr = \Delta r$ и dH^1 – длина той части континуума γ, которая расположена в кольце $\{x \in X : r \leq |x - x_0| < r + \triangle r\}$. Таким образом, неравенство (9) следует из (11). $\square$

Замечание 1. В частности, из неравенства (9) следует, что для любого континуума γ

$$H^1(\gamma) \;\geq\; \mathrm{diam}\;\gamma\;. \tag{12}$$

Однако, неравенство вида

$$H^k(\gamma) \;\geq\; [\mathrm{diam}\;\gamma]^{\alpha_k} \tag{13}$$

не имеет места для невырожденных континуумов ни при каком другом k, кроме $k = 1$, и ни при каком $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Действительно, при $k < 1$ по теореме VII.2 в [9] $1 > \dim_H \gamma \geq \dim \gamma = 0$, где $\dim \gamma$ – топологическая размерность γ, т.е. γ – полностью разрывное множество, см. II.4.D в [9]. Однако, последнее противоречит тому, что γ – невырожденный континуум. Если $k > 1$, неравенство (12) также не выполняется, как показывает следующий контрпример. Пусть $I = [0, 1]$. Очевидно, что $H^1(I) = 1 < \infty$ и потому $H^k(I) = 0$ для любого $k > 1$, см. разд. 1 гл. VII в [9], а $\mathrm{diam}\, I = 1$, т.е. (13) не выполнено для простейшего континуума I.

Границу ∂D континуальной области D будем называть *континуально слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любого числа $N > 0$ и любой окрестности U точки x_0 найдется ее окрестность $V \subset U$ такая, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geq N \tag{14}$$

для любых континуумов E и F в D, пересекающих ∂U и ∂V. Далее ∂D будем называть *континуально сильно достижимой* в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если для любой окрестности U точки x_0, найдется компакт $E \subset D$, окрестность $V \subset U$ точки x_0 и число $\delta > 0$ такие, что

$$M_p(\Gamma(E, F; D)) \geq \delta \tag{15}$$

для любого континуума F в D, пересекающего ∂U и ∂V, ср. [15].

Наконец, ∂D называется *континуально сильно достижимой* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, и *континуально слабо плоской* относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, если соответствующие свойства имеют место в каждой точке ее границы.

Лемма 3. *Пусть D – континуальная область в (X, d, μ). Если ∂D – континуально слабо плоская в точке $x_0 \in \partial D$ относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$, то D континуально связна в x_0.*

Доказательство. Предположим, что D не является континуально связной в точке x_0. Тогда найдется $r_0 \in (0, d_0)$, $d_0 = \sup_{x \in D} d(x, x_0)$ такое, что $\mu_0 := \mu(D \cap B(x_0, r_0)) < \infty$, и для любой окрестности $V \subseteq U := B(x_0, r_0)$ точки x_0 выполняется одно из следующих условий:
1. $V \cap D$ имеет по меньшей мере две связные компоненты K_1 и K_2 такие, что $x_0 \in \overline{K_1} \cap \overline{K_2}$;
2. $V \cap D$ имеет бесконечное число связных компонент $K_1, \ldots, K_m, \ldots$ таких, что $x_0 = \lim_{m \to \infty} x_m$ для некоторых $x_m \in K_m$ и $x_0 \notin \overline{K_m}$ для всех $m = 1, 2, \ldots$. Заметим, что $\overline{K_m} \cap \partial V \neq \emptyset$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ ввиду связности D; см. лемму 1.

В частности, пункты 1 или 2 верны для окрестности $V = U = B(x_0, r_0)$. Пусть далее $r_* \in (0, r_0)$. Тогда

$$M_p(\Gamma(K_i^*, K_j^*; D)) \leq M_0 := \frac{\mu_0}{[2(r_0 - r_*)]^p} < \infty\,,$$

где $K_i^* = K_i \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ и $K_j^* = K_j \cap \overline{B(x_0, r_*)}$ для всех $i \neq j$. Действительно, по лемме 2, одной из допустимых функций для $\Gamma(K_i^*, K_j^*; D)$ является

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(r_0 - r_*)} & \text{если } x \in B_0 \setminus \overline{B_*}, \\ 0 & \text{если } x \in X \setminus (B_0 \setminus \overline{B_*}), \end{cases}$$

где $B_0 = B(x_0, r_0)$ и $B_* = B(x_0, r_*)$, так как компоненты K_i и K_j не могут быть связаны континуумом в $V = B(x_0, r_0)$ и любой континуум, соединяющий K_i^* и K_j^* в D, по крайней мере, дважды пересекает кольцо $B_0 \setminus \overline{B_*}$, поскольку по свойству Дарбу о связных множествах, непрерывная функция $d(x, x_0)$ принимает все промежуточные значения на γ, см. следствие 5.46.3 а в [12].

Ввиду пунктов 1 и 2, приведенная выше модульная оценка противоречит условию континуальной слабой плоскости в точке x_0. Действительно, по этому условию найдется $r \in (0, r_*)$ такое, что

$$M_p(\Gamma(K_{i_0}^*, K_{j_0}^*; D)) \geq M_0 + 1$$

для каждой достаточно большой пары i_0 и j_0, $i_0 \neq j_0$, так как в соответствующих $K_{i_0}^*$ и $K_{j_0}^*$ с $d(x_0, x_{i_0})$ и $d(x_0, x_{j_0}) < r$, найдется по континууму, пересекающему $\partial B(x_0, r_*)$ и $\partial B(x_0, r)$; см. лемму 1.

Таким образом, предположение о нарушении континуальной связности континуальной области D в точке x_0 было неверным. $\Box$

3. Доказательство теоремы 1. Достаточно показать, что если континуальная область D континуально связна в точках x_1 и $x_2 \in \partial D$, $x_1 \neq x_2$, а D' имеет континуально слабо плоскую границу относительно p-модуля, то $C(x_1, f) \cap C(x_2, f) = \emptyset$.

Здесь $C(x_0, f)$ обозначает предельное множество отображения $f : D \to D'$ в точке x_0,

$$C(x_0, f) := \{ \ x' \in X' : \ x' = \lim_{n\to\infty} f(x_n), \ x_n \to x_0, \ x_n \in D\}. \tag{16}$$

Пусть $\mathrm{E}_i = C(x_i, f)$, $i = 1, 2$, и $\delta = d(x_1, x_2)$. Предположим $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Так как D континуально связна в точках x_1 и x_2, то существуют окрестности U_1 и U_2 точек x_1 и x_2, соответственно, такие, что $W_1 = D \cap U_1$ и $W_2 = D \cap U_2$ – континуальные области и $U_1 \subset B_1 = B(x_1, \frac{\delta}{3})$ и $U_2 \subset B_2 = B(x_2, \frac{\delta}{3})$. Тогда по неравенству треугольника $dist(W_1, W_2) \geq \frac{\delta}{3}$. Пусть также

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{\delta}, & t \in (\frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}), \\ 0, & t \notin (\frac{\delta}{3}; \frac{2\delta}{3}). \end{cases}$$

Тогда имеем, что $\int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \eta(t)dt = \int\limits_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2\delta}{3}} \frac{3}{\delta} \ dt = 1$. Следовательно, для любых континуумов $K_1 \subset W_1$ и $K_2 \subset W_2$:

$$M_p(\Gamma(f(K_1), f(K_2); D')) \leq \int\limits_{D\cap A(x_1, \frac{\delta}{3}, \frac{2\delta}{3})} Q(x)\eta^p(d(x_1, x))\, d\mu(x) \leq$$

$$\leq \frac{3^p}{\delta^p} \int\limits_{D} Q(x)\, d\mu(x) \ < \infty, \tag{17}$$

поскольку $Q \in L^1_\mu(D)$.

Однако, последняя оценка противоречит условию континуальной слабой плоскости (14), если найдется $y_0 \in E_1 \cap E_2$. Действительно, тогда $y_0 \in \overline{fW_1} \cap \overline{fW_2}$ и в континуальных областях $W_1^* = fW_1$ и $W_2^* = fW_2$ найдется по континууму, пересекающему любые наперед заданные сферы $\partial B(y_0, r_0)$ и $\partial B(y_0, r_*)$ с достаточно малыми радиусами r_0 и r_* . Поэтому предположение, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, было неверным.

Наконец, опираясь на установленный факт и рассуждая от противного, приходим к заключению теоремы 1.

4. Квазиконформные отображения в метрических пространствах. Пусть D и D' – континуальные области в (X, d, μ) и (X', d', μ'), соответственно. Гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется K-*квазиконформным*, $K \in [1, \infty)$, если

$$K^{-1}M_p(\Gamma) \leq M_p(f(\Gamma)) \leq KM_p(\Gamma) \tag{18}$$

для любого семейства Γ континуумов в D, ср., напр., с [19]. Если неравенство (18) выполняется для некоторого $K \in [1, \infty)$, то гомеоморфизм $f : D \to D'$ называется *квазиконформным.*

Отметим, что в последние годы квазиконформными отображениями в метрических пространствах активно занимаются многие известные математики, см., напр., [11], [19], [22] и относительно p-модулей – [1], [2], [10] и др.

Если $X = X' = \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, борелевская мера μ – мера Лебега m, а вместо семейства континуумов Γ взято семейство кривых, то приходим к классическому определению квазиконформности.

В частности, результаты для квазиконформных отображений, приведенные ниже, следуют непосредственно из теоремы 1, см., например, следующее важное заключение.

Следствие 1. *Пусть D и D' – континуальные области в метрических пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') с борелевскими мерами μ и μ', соответственно. Если D имеет континуально слабо плоскую границу, D' континуально связна во всех своих граничных точках и $\overline{D'}$ – компакт, то любое квазиконформное отображение $f : D \to D'$ допускает непрерывное продолжение на границу $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Комбинируя следствие 1 с леммой 3, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть D и D' – континуальные области в метрических пространствах (X, d, μ) и (X', d', μ') с борелевскими мерами μ и μ', соответственно. Если D и D' области с континуально слабо плоскими границами и компактными замыканиями $\overline{D}$ и $\overline{D'}$, то любое квазиконформное отображение $f : D \to D'$ допускает гомеоморфное продолжение $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$.*

Замечание 2. В частности, последнее заключение выполнено для квазиконформных отображений между QED областями с компактными замыканиями в так называемых слабо плоских пространствах, ср. [8], [14] и [15]. Отметим, что замкнутые множества всегда компактны в компактных пространствах. Напомним также, что локально компактные пространства всегда допускают так называемую одноточечную компактификацию; см., напр., разд. I.9.8. в [4].

Таким образом, полученные результаты распространяют известные теоремы о квазиконформных отображениях в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, на континуально кольцевые Q-гомеоморфизмы относительно p-модуля, $p \in (0, \infty)$ в метрических пространствах с мерами.

1. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal loewner type estimates for modulus of curve families // Annal. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2010. – V. 35. – P. 609-626.
2. *Anca A.* Quasiconformal mappings in ahlfors regular spaces // Rev. Roumaine Math. Pures appl. – 2009. – V. 54, N 5–6. – P. 361-373.
3. *Bishop C.J., Gutlyanskii V.Ya., Martio O., Vuorinen M.* On conformal dilatation in space // Int. J. Math. Math. Sci. – 2003. – V. 22. – P. 1397-1420.
4. *Бурбаки Н.* Функция действительного переменного. – М.: Наука, 1965.
5. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1969.
6. *Whyburn G.T.* Analytic Topology. — Providence, RI: Amer. Math. Soc, 1942.
7. *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. — P. 353-393.
8. *Gehring F.W., Martio O.* Quasiextremal distance domains and extension of quasiconformal mappings // J. Anal. Math. – 1985. – V. 24. – P. 181-206.
9. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. – М.: ИЛ, 1948.
10. *Korte R., Marola N., Shanmugalingam N.* Quasiconformality, homeomorphisms between metric measure spaces preserving quasiminimizers, and uniform density property // Arkiv for Matematik. – 2012. – V. 50, N 1. – P. 111-134.
11. *Koskela P.* Sobolev spaces and quasiconformal mappings on metric spaces // Barcelona: European Congress of Mathematics. – 2000. – V. I. – P. 457-467.

12. *Куратовский К.* Топология. Т.2. – М.: Мир, 1969.
13. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – Springer Monographs in Mathematics, New York: Springer, 2009.
14. *Martio O., Vuorinen M.* Whitney cubes, p-capacity and Minkowski content // Expo. Math. – 1987. – V. 5. – P. 17-40.
15. *Рязанов В.И., Салимов Р.Р.* Слабо плоские пространства и границы в теории отображений // Укр. мат. вестник. – 2007. – Т. 4, N 2. – С. 199-234.
16. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On ring solutions of Beltrami equation // J. Anal. Math. – 2005. – V. 96. – P. 117-150.
17. *Салимов Р.Р.* Об оценке меры образа шара // Сиб. мат. журн. – 2012. – Т. 53, N 4. – С. 920-930.
18. *Смоловая Е.С.* Граничное поведение кольцевых Q-гомеоморфизмов в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, N 5. – С. 682-689.
19. *Tyson J.* Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces // Annal. Acad. Sci. Fenn. Math. – 1998. – V. 23. – P. 525-548.
20. *Fuglede B.* Extremal length and functional completion // Acta Math. – 1957. – V. 98. – P. 171-219.
21. *Heinonen J.* Lectures on Analysis on Metric Spaces. — New York: Springer, 2001.
22. *Heinonen J. and Koskela P.* Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry // Acta Math. – 1998. – V. 181. – P. 1-61.

O. S. Afanas'eva

Boundary behavior of the continually ring Q-homeomorphisms with respect to p-module in metric spaces.

In this article, it is investigated the problem of extension to the boundary of the continually ring Q-homeomorphisms with respect to p-module between domains in metric spaces with measures. In particular, there are formulated conditions on the continual domains boundaries of admitting a continuous or homeomorphic extension to the boundary of quasiconformal mappings in metric spaces.

Keywords: *metric spaces with measures, the continually ring Q-homeomorphisms, quasiconformal mappings, p-moduli.*

О. С. Афанасьєва

Гранична поведінка континуально кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модулів у метричних просторах.

У даній роботі досліджується проблема продовження на межу континуально кільцевих Q-гомеоморфізмів відносно p-модулів між областями в метричних просторах із мірами. Зокрема, для квазіконформних відображень у метричних просторах сформульовано умови на межі континуальних областей, при яких допускається неперервне або гомеоморфне продовження на межу таких відображень.

Ключові слова: *метричні простори з мірами, континуально кільцеві Q-гомеоморфізми, квазіконформні відображення, p-модулі.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`es.afanasjeva@yandex.ru`
Получено 01.02.13