УДК 531.38

©2012. **Г. А. Котов**

О НОВЫХ КЛАССАХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА С ПЕРЕМЕННЫМ ГИРОСТАТИЧЕСКИМ МОМЕНТОМ

Получены два новых решения уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил. Первое решение характеризует прецессионно-изоконическое движение общего вида, во втором решении скорости прецессии и собственного вращения удовлетворяют алгебраическому линейному уравнению.

Ключевые слова: *гиростат, прецессионные, изоконические движения.*

1. Введение. Прецессионные движения, обладающие свойством постоянства угла между двумя прямыми, фиксированными, соответственно, в теле и пространстве, нашли применение не только в динамике одного твердого тела, но и в динамике систем твердых тел [1]. Метод исследования прецессионных движений гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил предложен в [2]. Его применение позволило получить замкнутую систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно величины гиростатического момента и скоростей прецессии и собственного вращения. Простейшие классы прецессионных движений изучались и в задаче о движении гиростата под действием силы тяжести (см., например, [3-5]).

Одним из наглядных классов движения гиростата является класс изоконических движений, который характеризуется симметричностью подвижного и неподвижного годографов угловой скорости относительно касательной к ним плоскости. Если движения тела обладают и свойством изоконичности и свойством прецессионности, то они называются прецессионно-изоконическими (этот класс движений введен Г.В. Горром [1]). Другим классом прецессионных движений, представляющим интерес для приложений, служит класс, для которого скорости прецессии и собственного вращения связаны между собой линейной зависимостью.

В данной работе исследованы условия существования указанных выше классов прецессий гиростата, получены два новых решения уравнений движений.

2. Постановка задачи. Пусть гиростат намагничен, несет на себе электрические заряды и находится под действием электрических, магнитных, ньютоновских и лоренцевых сил. Тогда уравнения движения гиростата можно записать в виде: (см. [2, 7, 8])

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} - L\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \big(B\boldsymbol{\nu} - \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}\big) + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega},\ \dot{\lambda} = L. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; L – функция, характеризующая взаимодействие тел гиростата; $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление вектора гиростатического момента $\lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$; $\lambda(t)$ – ограниченная, дифференцируемая функция времени; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс гиростата; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ – симметричные постоянные матрицы третьего порядка; точка над переменными $\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, \lambda$ обозначает относительную производную по времени t.

Уравнения (1), (2) имеют два первых интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}) = k, \tag{3}$$

где k – произвольная постоянная.

Рассмотрим класс движений гиростата, для которого в процессе движения угол между единичным вектором $\boldsymbol{a}$, неизменно связанным с телом, и единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$ постоянен и равен θ_0. Подвижную систему координат свяжем с вектором $\boldsymbol{a}$ таким образом, чтобы $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$.

Тогда имеет место инвариантное соотношение

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu} = a_0, \qquad (a_0 = \cos\theta_0). \tag{4}$$

Согласно методу исследования прецессий, указанному в [1], векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\omega}$ могут быть представлены в виде

$$\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi,\ a_0' \cos\varphi,\ a_0), \qquad \boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(t)\boldsymbol{a} + \dot{\psi}(t)\boldsymbol{\nu}, \tag{5}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$, φ и ψ – новые переменные. Отметим, что уравнение Пуассона из (2) при подстановке в него равенств (5) дает тождество, поэтому в [2] исследовано динамическое уравнение (1) при наличии соотношений (5), и задача исследования прецессий для уравнений (1) и (2) сведена к нахождению решения уравнений:

$$\begin{gathered}\alpha_3\dot{\lambda}(t) - a_0'(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\dot{\psi}\lambda(t) + A_{33}\ddot{\varphi} + (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\ddot{\psi}+ \\ + (A_2\sin 2\varphi - A_2'\cos 2\varphi + a_0A_1\sin\varphi - a_0A_1'\cos\varphi)\dot{\psi}^2 + (B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi+ \\ + a_0B_1'\cos\varphi - a_0B_1\sin\varphi)\dot{\psi} + (C_2'\cos 2\varphi - C_2\sin 2\varphi - \varkappa_1'\cos\varphi + \varkappa_1\sin\varphi) = 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}(\alpha_1a_0'\sin\varphi + \alpha_2a_0'\cos\varphi + a_0\alpha_3)\dot{\lambda}(t) + a_0'(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\dot{\varphi}\lambda(t) + (A_1\cos\varphi+ \\ + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\ddot{\varphi} + (A_1'\cos\varphi - A_1\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + (A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi+ \\ + 2a_0A_1\cos\varphi + 2a_0A_1'\sin\varphi + A_0)\ddot{\psi} + 2(A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + a_0A_1'\cos\varphi- \\ - a_0A_1\sin\varphi)\dot{\varphi}\ddot{\psi} - (B_2'\cos 2\varphi - B_2\sin 2\varphi + a_0B_1'\cos\varphi - a_0B_1\sin\varphi)\dot{\varphi} = 0,\end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}a_0'(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\dot{\lambda}(t) + a_0'\big[(\alpha_3a_0' - \alpha_1a_0\sin\varphi - \alpha_2a_0\cos\varphi)\dot{\psi} - (\alpha_1\sin\varphi \\ + \alpha_2\cos\varphi)\dot{\varphi}\big]\lambda(t) + (A_1'\cos\varphi - A_1\sin\varphi)\ddot{\varphi} + (A_2'\cos 2\varphi - A_2\sin 2\varphi + a_0A_1'\cos\varphi \\ - a_0A_1\sin\varphi)\ddot{\psi} - (2A_2\cos 2\varphi + 2A_2'\sin 2\varphi + 2a_0A_1\cos\varphi + 2a_0A_1'\sin\varphi- \\ a_0'^2A_{33})\dot{\varphi}\dot{\psi} - (a_0A_2\cos 2\varphi + a_0A_2'\sin 2\varphi + \varkappa_0A_1\cos\varphi + \varkappa_0A_1'\sin\varphi + a_0D_0)\dot{\psi}^2- \\ - (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi)\dot{\varphi}^2 + (B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + a_0B_1\cos\varphi + a_0B_1'\sin\varphi- \\ - B_0^*)\dot{\varphi} + (a_0B_2\cos 2\varphi + a_0B_2'\sin 2\varphi + \varkappa_0B_1\cos\varphi + \varkappa_0B_1'\sin\varphi + a_0E_0)\dot{\psi}+ \\ + (a_0C_2\cos 2\varphi + a_0C_2'\sin 2\varphi + \delta_1'\sin\varphi + \delta_1\cos\varphi + G_0) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

В дифференциальных уравнениях (6)-(8) введены следующие обозначения:

$$A_1 = a_0'A_{23},\ A_1' = a_0'A_{13},\ B_1 = a_0'B_{23},\ B_1' = a_0'B_{13},\ \varkappa_0 = a_0^2 - a_0'^2,\ \varkappa_1 = a_0's_2 - a_0a_0'C_{23},$$

$$\varkappa_1' = a_0's_1 - a_0a_0'C_{13},\ \delta_1 = (2a_0^2-1)a_0'C_{23} - a_0a_0's_2,\ \delta_1' = (2a_0^2-1)a_0'C_{13} - a_0a_0's_1,$$

$$A_2 = a_0'^2(A_{22}-A_{11})/2,\ A_2' = a_0'^2A_{12}, A_0 = \big[a_0'^2(A_{11}+A_{22})+2a_0^2A_{33}\big]/2,\ B_2 = a_0'^2(B_{22}-B_{11})/2,$$

$$B_2' = a_0'B_{12},\ B_0 = \big[a_0'^2(B_{11}+B_{22})+2a_0^2B_{33}\big]/2,\ C_2 = a_0'^2(C_{22}-C_{11})/2,\ C_2' = a_0'^2C_{12},$$

$$D_0 = a_0'^2(A_{11}+A_{22}-2A_{33})/2,\ E_0 = a_0'^2(B_{11}+B_{22}-2B_{33})/2,\ B_0^* = -a_0'^2(B_{11}+B_{22})/2.$$

$$G_0 = a_0'^2\big[2s_3 + a_0(C_{11}+C_{22}-2C_{33})\big]/2.$$

Уравнения (6)-(8) допускают интеграл

$$\begin{aligned}&(\alpha_1a_0'\sin\varphi + \alpha_2a_0'\cos\varphi + a_0\alpha_3)\lambda(t) + (A_1\cos\varphi + A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})\dot\varphi +\\ &+ (A_2\cos 2\varphi + A_2'\sin 2\varphi + 2a_0A_1\cos\varphi + 2a_0A_1'\sin\varphi + A_0)\dot\psi -\\ &- (B_2\cos 2\varphi + B_2'\sin 2\varphi + 2a_0B_1\cos\varphi + 2a_0B_1'\sin\varphi + B_0)/2 = k.\end{aligned} \tag{9}$$

3. Прецессионно-изоконическое движение гиростата. Рассмотрим класс прецессионно-изоконических движений общего вида [1]

$$\dot\psi = \frac{\dot\varphi}{\gamma_0 + \gamma_1\sin\varphi},$$

где $\gamma_0,\ \gamma_1$ – постоянные, удовлетворяющие условию $\gamma_0^2 = 1+\gamma_1^2$. Пусть величина гиростатического момента во все время движения равна $\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1\sin\varphi$, а скорость собственного вращения $\dot\varphi = \beta_0 + \beta_1\sin\varphi$, где $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \beta_0,\ \beta_1$ – некоторые константы.

В общем случае получение условий существования затруднительно, поэтому положим $A_{12} = A_{23} = 0,\ B_{12} = B_{23} = 0,\ C_{12} = C_{23} = 0,\ s_2 = 0$. Поворотом системы координат добьемся $\alpha_2 = 0$. Уравнения (6), (9) и (8) примут вид:

$$\alpha_3\lambda_1(\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0)^2 - a_0'\alpha_1(\lambda_1\sin\varphi+\lambda_0)(\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0) + \beta_1A_{33}(\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0)^2 + \varepsilon_0(A_1'\sin\varphi + a_0A_{33}) + (2A_2\sin\varphi - a_0A_1')(\beta_1\sin\varphi+\beta_0) - (2B_2\sin\varphi - a_0B_1')(\gamma_1\sin\varphi + \gamma_0) - \mu(\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0)^2 = 0,$$

$$(\alpha_1a_0'\sin\varphi + a_0\alpha_3)(\lambda_1\sin\varphi+\lambda_0) + (A_1'\sin\varphi + a_0A_{33})(\beta_1\sin\varphi+\beta_0) + (h_1\sin\varphi + h_0)(\beta_1\sin\varphi+\beta_0) - \tfrac{1}{2}(-2B_2\sin^2\varphi + 2a_0B_1'\sin\varphi + B_0 + B_2) = k,$$

$$\begin{aligned}&(\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0)^2(-a_0'\alpha_1\lambda_1\sin^2\varphi + a_0'\alpha_1\lambda_1 - \beta_1A_1'\sin^2\varphi + \beta_1A_1' - A_1'(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)\sin\varphi -\\ &- 2B_2\sin^2\varphi + a_0B_1'\sin\varphi + a_0'^2B_{22} + g_1\sin\varphi + g_0) + (\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0)\big[(a_0'\lambda_1\sin\varphi + a_0'\lambda_0)\cdot\\ &\cdot(a_0'\alpha_3 - a_0\alpha_1\sin\varphi) - (\beta_1\sin\varphi+\beta_0)(-4A_2\sin^2\varphi + 2a_0A_1'\sin\varphi + 2A_{00}) - 2a_0B_2\sin^2\varphi +\\ &+ \varkappa_0B_1'\sin\varphi + a_0(E_0+B_2)\big] + \varepsilon_0(1-\sin^2\varphi)(-2A_2\sin\varphi + a_0A_1') -\\ &- (\beta_1\sin\varphi+\beta_0)(-2a_0A_2\sin^2\varphi + \varkappa_0A_1'\sin\varphi + a_0(D_0+A_2)) = 0,\end{aligned}$$

где $\varepsilon_0 = \gamma_0\beta_1 - \beta_0\gamma_1$, $A_{00} = \frac{a_0'^2}{2}(A_{22} - A_{11} - A_{33})$.

Группируя в выше приведенных уравнениях слагаемые по степеням $\sin\varphi$, получим многочлены, которые должны обращаться в ноль для любых значений φ. Это требование приводит к следующей системе уравнений:

$$
\begin{aligned}
&2C_2\sin\varphi+\varkappa_1'=\mu(\beta_1\sin\varphi+\beta_0),\\
&(h_1\sin\varphi+h_0)(\gamma_1\sin\varphi+\gamma_0)=-2A_2\sin^2\varphi+2a_0A_1'\sin\varphi+A_0+A_2,\\
&(g_1\sin\varphi+g_0)(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)=-2a_0C_2\sin^2\varphi+\delta_1'\sin\varphi+G_0+a_0C_2,\\
&-2A_2\gamma_0+\gamma_1A_1'(\gamma_0-a_0)-\gamma_1^2a_0A_{33}=0,\\
&\gamma_1^2(a_0'^2A_{22}+a_0^2A_{33})-2\gamma_0^2A_2=2\gamma_1\gamma_0a_0A_1',\\
&\gamma_1(\alpha_3\lambda_1+\beta_1A_{33}-\mu)-a_0'\alpha_1\lambda_1-h_1\beta_1-2B_2=0,\\
&\gamma_0^2(\alpha_3\lambda_1+\beta_1A_{33}-\mu)-a_0'\alpha_1\lambda_0\gamma_0+\varepsilon_0a_0A_{33}-a_0\beta_0A_1'+a_0\gamma_0B_1'=0,\\
&\alpha_1a_0'\lambda_1+\beta_1A_1'+h_1\beta_1+B_2=0,\\
&\alpha_1a_0'\lambda_0+a_0\alpha_3\lambda_1+\beta_0A_1'+\beta_1a_0A_{33}+h_1\beta_0+h_0\beta_1-a_0B_1'=0,\\
&a_0\alpha_3\lambda_0+\beta_0a_0A_{33}+h_0\beta_0-\frac{1}{2}(a_0'^2B_{22}+a_0^2B_{33})-k=0,\\
&\beta_1s_3+a_0\beta_1(C_{22}-C_{33})+\beta_0a_0'C_{13}=0,\\
&-h_1(a_0\beta_1+2\beta_1\gamma_0+2\gamma_1\beta_0+\varepsilon_0)-4\gamma_0\beta_1A_1'-\gamma_1\beta_0A_1'-2a_0\beta_1A_1'-\\
&-2B_2(a_0+2\gamma_0)+a_0\gamma_1B_1'-4a_0'\alpha_1\lambda_1\gamma_0-a_0a_0'\alpha_1\lambda_1+\gamma_1g_1-a_0'\alpha_1\lambda_0\gamma_1=0,\\
&\gamma_1^2(a_0'\alpha_1\lambda_1+\beta_1A_1'+g_0+a_0'^2B_{22})-2\gamma_0^2(a_0'\alpha_1\lambda_1+B_2+\beta_1A_1')+2\gamma_1\gamma_0(g_1+\\
&+a_0B_1'-a_0'\alpha_1\lambda_0-\beta_0A_1')+\gamma_1(a_0'^2\alpha_3\lambda_1-2a_0\beta_0A_1'-2\beta_1A_{00}+\varkappa_0B_1'-\\
&-a_0a_0'\alpha_1\lambda_0)-\gamma_0(2a_0B_2+2a_0\beta_1A_1'-4\beta_0A_2+a_0a_0'\alpha_1\lambda_1)-\varepsilon_0a_0A_1'-\\
&-\varkappa_0\beta_1A_1'+2a_0\beta_0A_2=0,\\
&\gamma_0^2(a_0B_1'+g_1-\beta_0A_1'-a_0'\alpha_1\lambda_0)+2\gamma_1\gamma_0(a_0'\alpha_1\lambda_1+g_0+\beta_1A_1'+a_0'^2B_{22})+\\
&+\gamma_0(a_0'^2\alpha_3\lambda_1-a_0a_0'\alpha_1\lambda_0+\varkappa_0B_1'-2\beta_1A_{00}-2a_0\beta_0A_1')+\gamma_1(a_0'^2\alpha_3\lambda_0+\\
&+a_0a_0'^2(B_{22}-B_{33})-2\beta_0A_{00})-2\varepsilon_0A_2-a_0\beta_1a_0'^2(A_{22}-A_{33})-\varkappa_0\beta_0A_1'=0,\\
&\gamma_0^2(a_0'\alpha_1\lambda_1+\beta_1A_1'+g_0+a_0'^2B_{22})+\gamma_0(a_0'^2\alpha_3\lambda_0-2\beta_0A_{00}+a_0a_0'^2(B_{22}-B_{33}))+\\
&+a_0\varepsilon_0A_1'-\beta_0a_0a_0'^2(A_{22}-A_{33})=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

В данной статье приведем случай разрешимости системы уравнений (10).

Положим $A_{11}=A_{22}=4\rho$, $A_{33}=5\rho$, $A_{13}=2\rho$, тогда

$$a_0=\tfrac{2\sqrt{17}}{17},\ a_0'=\tfrac{\sqrt{221}}{17},\ \gamma_1=\tfrac{\sqrt{221}}{34},\ \gamma_0=\tfrac{9\sqrt{17}}{34},\ \alpha_1=\tfrac{2\sqrt{85}}{85},\ \alpha_3=\tfrac{9\sqrt{85}}{85}$$

$$\beta_1=\tfrac{-4\sqrt{221}C_2}{221B_2},\ \lambda_1=\tfrac{(8\rho C_2-17B_2^2)\sqrt{65}}{26B_2},\ \lambda_0=\tfrac{(32\rho C_2+153B_2^2-26\sqrt{17}\rho\beta_0B_2+2\sqrt{17}\sqrt{13}B_2B_1')\sqrt{5}}{26B_2}$$

$$B_1'=-\tfrac{(52B_{22}-65B_{11}-17g_0)\sqrt{221}}{442},\ \beta_0=\tfrac{16C_2^2(128\rho C_2-153B_2^2+B_2(143B_{22}-26B_{33}))\sqrt{17}}{221B_2(64\rho C_2^2+117\sqrt{13}C_{13}B_2^2)}$$

$$g_0=\tfrac{-169\beta_0C_{13}B_2^2\sqrt{221}}{272C_2^2},\ s_3=\tfrac{8\sqrt{17}C_2(C_{33}-C_{22})+221\beta_0C_{13}B_2}{68C_2},\ s_1=\tfrac{\sqrt{17}(4C_{13}-17\sqrt{17}\beta_0B_2)}{34}$$

$$k = -\tfrac{1}{34}(13B_{22} + 4B_{33}) + \tfrac{1}{85}(\sqrt{5}\lambda_0 + 130\sqrt{17}\beta_0).$$

Дополнительно дадим параметрам следующие значения:

$$B_{11} = \xi,\ B_{22} = 3\xi,\ B_{33} = 4\xi,\ C_{11} = 3\eta,\ C_{22} = 2\eta,\ C_{33} = \eta,\ C_{13} = 5\eta,$$

тогда получим решение системы уравнений (10):

$$\begin{aligned}
&a_0 = \frac{2\sqrt{17}}{17},\ a_0' = \frac{\sqrt{221}}{17},\ \gamma_1 = \frac{\sqrt{221}}{34},\ \gamma_0 = \frac{9\sqrt{17}}{34},\ \alpha_1 = \frac{2\sqrt{85}}{85},\ \alpha_3 = \frac{9\sqrt{85}}{85},\\
&\beta_1 = \frac{2\sqrt{221}\eta}{221\xi},\ \beta_0 = \frac{64\eta(13\xi^2 - 4\eta\rho)\sqrt{17}}{221\xi(16\eta\rho + 585\sqrt{13}\xi^2)},\ \lambda_1 = -\frac{(4\eta\rho + 13\xi^2)\sqrt{65}}{26\xi},\\
&B_1' = \frac{-\xi(28\eta + 65\sqrt{221}\xi\beta_0)\sqrt{221}}{136\xi},\ s_1 = -\frac{\sqrt{17}(13\xi\beta_0\sqrt{17} - 20\eta)}{34}\\
&\lambda_0 = \frac{(-16\eta\rho + 117\xi^2 - 26\sqrt{17}\rho\xi\beta_0 + 2\sqrt{221}\xi B_1')\sqrt{5}}{26\xi},\ s_3 = -\frac{4\sqrt{17}\eta + 1105\xi\beta_0}{34}\\
&k = \frac{-288\eta\rho + 1391\xi^2 + 208\xi\rho\beta_0\sqrt{17} + 36\xi B_1'\sqrt{221}}{442\xi}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, при выполнении

$$A_{12} = A_{23} = 0,\ B_{12} = B_{23} = 0,\ C_{12} = C_{23} = 0,\ s_2 = 0,\ \alpha_2 = 0.$$

и условий (11) решение уравнений (1), (2) таково ($\varphi(0) = 0,\ \beta_0^2 > \beta_1^2,\ \psi(0) = 0$):

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nu} = (a_0' \sin\varphi; a_0' \cos\varphi; a_0), \quad \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1 \sin\varphi,\\
&\dot\varphi = \beta_0 + \beta_1 \sin\varphi, \quad \dot\psi = \frac{\dot\varphi}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\Big(\boldsymbol{a} + \frac{1}{\gamma_0 + \gamma_1 \sin\varphi}\boldsymbol{\nu}\Big),\\
&\psi(\varphi) = 2arctg\Big(\frac{tg\frac{\varphi}{2}}{\gamma_0 + \gamma_1 tg\frac{\varphi}{2}}\Big),\ \varphi(t) = 2arctg\Big(\frac{\sqrt{\beta_0^2 - \beta_1^2}}{\beta_0 - \beta_1} tg\frac{\sqrt{\beta_0^2 - \beta_1^2}}{2} t\Big).
\end{aligned} \tag{12}$$

4. Случай $\dot\psi = \rho_1\dot\varphi + \rho_0$. Рассмотрим класс прецессионных движений, в котором скорость прецессии и скорость собственного вращения связаны соотношением

$$\dot\psi = \rho_1\dot\varphi + \rho_0.$$

При условиях $A_{23} = 0,\ B_{12} = B_{23} = 0,\ C_{12} = C_{23} = 0,\ s_2 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ уравнения (9), (6), (8) примут вид:

$$(\alpha_1 a_0' \sin\varphi + a_0\alpha_3)(\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0) + (A_1' \sin\varphi + a_0 A_{33})(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + (A_2(1 - 2\sin^2\varphi) + 2A_2' \sin\varphi\cos\varphi + 2a_0 A_1' \sin\varphi + A_0)(\rho_1(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + \rho_0) - \tfrac{1}{2}B_2(1 - 2\sin^2\varphi) - a_0 B_1' \sin\varphi - \tfrac{1}{2}B_0 - k = 0$$

$$\alpha_3\lambda_1 \cos\varphi(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) - a_0'\alpha_1 \cos\varphi(\rho_1(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + \rho_0)(\lambda_1 \sin\varphi + \lambda_0) + A_{33}\beta_1 \cos\varphi(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + (A_1' \sin\varphi + a_0 A_{33})\rho_1\beta_1 \cos\varphi(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + (A_2 \sin 2\varphi - A_2' \cos 2\varphi - a_0 A_1' \cos\varphi)(\rho_1(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + \rho_0)^2 + (-B_2 \sin 2\varphi + a_0 B_1' \cos\varphi)(\rho_1(\beta_1 \sin\varphi + \beta_0) + \rho_0) - C_2 \sin 2\varphi - \varkappa_1' \cos\varphi = 0$$

$$a_0'\alpha_1(1-\sin^2\varphi)\lambda_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+a_0'((a_0'\alpha_3-a_0\alpha_1\sin\varphi)(\rho_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+\rho_0)-\alpha_1\sin\varphi(\beta_1\sin\varphi+\beta_0))(\lambda_1\sin\varphi+\lambda_0)+A_1'(1-\sin^2\varphi)\beta_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+(A_2'\cos 2\varphi-A_2\sin 2\varphi+a_0A_1'\cos\varphi)\cos\varphi\rho_1\beta_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)-(2A_2(1-2\sin^2\varphi)+2A_2'\sin 2\varphi+2a_0A_1'\sin\varphi-a_0'^2A_{33})(\rho_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+\rho_0)(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)-(a_0A_2(1-2\sin^2\varphi)+a_0A_2'\sin 2\varphi+\varkappa_0A_1'\sin\varphi+a_0D_0)(\rho_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+\rho_0)^2-A_1'\sin\varphi(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)^2+(-2B_2\sin^2\varphi+a_0B_1'\sin\varphi-B_0^*+B_2)(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+(-2a_0B_2\sin^2\varphi+\varkappa_0B_1'\sin\varphi+a_0E_0+a_0B_2)(\rho_1(\beta_1\sin\varphi+\beta_0)+\rho_0)-2a_0C_2\sin^2\varphi+\delta_1'\sin\varphi+G_0+a_0C_2=0.$$

По аналогии со случаем прецессионно-изоконических движений вышеприведенные уравнения можно представить в виде многочленов по $\sin\varphi$. Из интеграла (9) сразу же находим $A_{12}=0,\ A_{11}=A_{22}$ и далее получаем условия существования решений уравнений (6), (8), (9) в виде следующей системы:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1a_0'\lambda_1+A_1'\beta_1(1+2a_0\rho_1)+B_2=0,\\
&\alpha_3a_0\lambda_1+\alpha_1a_0'\lambda_0+A_1'\beta_0(1+2a_0\rho_1)+2a_0\rho_0A_1'+\beta_1(a_0A_{33}+A_0\rho_1)-a_0B_1'=0\\
&\alpha_3a_0\lambda_0+A_0\pi+a_0\beta_0A_{33}-\frac{1}{2}(B_2+B_0)-k=0,\\
&\alpha_1a_0'\lambda_1+A_1'\beta_1(a_0\rho_1-1)+2B_2=0,\\
&\alpha_3\lambda_1\beta_1-\alpha_1a_0'\rho_1\beta_1\lambda_0-\alpha_1a_0'\lambda_1\pi+\rho_1\beta_1A_1'(\beta_0-2a_0\pi)+A_{33}\beta_1^2(1+a_0\rho_1)-\\
&-2B_2\pi+a_0\rho_1\beta_1B_1'-2C_2=0,\\
&\alpha_3\lambda_1\beta_0-\alpha_1a_0'\lambda_0\pi-a_0A_1'\pi^2+a_0B_1'\pi+\beta_1\beta_0A_{33}(1+a_0\rho_1)-\varkappa_1'=0,\\
&2\alpha_1a_0'\lambda_1+A_1'\beta_1(2+3a_0\rho_1)+\varkappa_0\rho_1^2\beta_1A_1'+2B_2+2a_0\rho_1B_2+a_0a_0'\alpha_1\rho_1\lambda_1=0,\\
&-a_0'\alpha_1\lambda_1(a_0\pi+2\beta_0)+a_0'^2\alpha_3\rho_1\beta_1\lambda_1-a_0'\alpha_1\beta_1\lambda_0(1+a_0\rho_1)-\beta_1A_1'(3\beta_0+\\
&+5a_0\rho_1\beta_0+2a_0\rho_0+2\varkappa_0\rho_1\pi)+B_1'\beta_1(a_0+\varkappa_0\rho_1)-2B_2(\beta_0+a_0\pi)-\\
&-2a_0C_2+(a_0'^2A_{33}-a_0\rho_1D_0)\rho_1\beta_1^2=0,\\
&\alpha_1a_0'\lambda_1\beta_1+a_0'^2\alpha_3\lambda_1\pi+a_0'^2\alpha_3\rho_1\beta_1\lambda_0-a_0'\alpha_1\lambda_0(\beta_0+a_0\pi)+A_1'(\beta_1^2(1+a_0\rho_1)-\\
&-\varkappa_0\pi^2-2a_0\beta_0\pi-\beta_0^2)+B_2\beta_1(1+a_0\rho_1)+B_1'(a_0\beta_0+\varkappa_0\pi)+2\pi\beta_1(a_0'^2A_{33}-\\
&-a_0\rho_1D_0)-a_0'^2A_{33}\rho_0\beta_1+\beta_1(a_0\rho_1E_0-B_0^*)+\delta_1'=0,\\
&a_0'\alpha_1\beta_0\lambda_1+a_0'^2\alpha_3\lambda_0\pi+a_0E_0\pi+B_2(\beta_0+a_0\pi)-\beta_0B_0^*+A_1'\beta_1\beta_0(1+a_0\rho_1)-\\
&-a_0D_0\pi^2+a_0'^2\beta_0\pi+A_{33}+a_0C_2+G_0=0,
\end{aligned}\tag{13}$$

где $\pi=\rho_1\beta_0+\rho_0$.

Приведем пример разрешимости системы (13):

$$\begin{aligned}
&\alpha_1=\alpha_2=0,\ \alpha_3=1;\ A_{11}=A_{22},\ A_{12}=0,\ A_{23}=0,\ A_{13}=0;\ B_{22}=B_{11},\\
&B_{12}=0,\ B_{23}=0;\ C_{12}=0,\ C_{23}=0;\ s_2=0;\ \rho_1=a_0;\\
&a_0'A_{11}\beta_1^2-B_{13}(1+a_0^2)\beta_1+a_0'(C_{22}-C_{11})=0,\\
&\Big(\beta_{1,2}=\frac{B_{13}(1+a_0^2)\pm\sqrt{B_{13}^2(1+a_0^2)^2-4a_0'^2A_{11}(C_{22}-C_{11})}}{2a_0'A_{11}}\Big);\\
&\lambda_1=a_0'B_{13}-\beta_1\big(a_0'^2A_{11}+(1+a_0^2)A_{33}\big);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = \frac{a_0 C_{13} + a_0\rho_0 B_{13} - s_1}{a_0'\beta_1 A_{11} - B_{13}(1+a_0^2)},\\
&\Big(A_{11}\beta_1(a_0'\beta_1 A_{11} - B_{13})\Big)\rho_0^2 + \Big(A_{11}\beta_1(C_{13} - a_0 s_1) - B_{11}\beta_1\big(a_0'\beta_1 A_{11} -\\
&- B_{13}(1+a_0^2)\big) - a_0' C_{13} B_{13}\Big)\rho_0 + a_0 a_0' C_{13}(a_0 C_{13} - s_1) + \beta_1\big(a_0 s_3 + a_0^2(C_{22} -\\
&- C_{33})\big)\big(a_0'\beta_1 A_{11} - B_{13}(1+a_0^2)\big) = 0, \qquad (14)\\
&a_0\lambda_0 = \frac{1}{2}\big(a_0'^2 B_{11} + a_0^2 B_{33}\big) + k - a_0'^2 A_{11}(a_0\beta_0 + \rho_0) -\\
&- a_0 A_{33}\big(\beta_0 + a_0(a_0\beta_0 + \rho_0)\big),\\
&k = A_{11}(a_0\beta_0 + 2\rho_0) + \frac{a_0' C_{13}}{\beta_1} - \frac{1}{2}\big(B_{11}(a_0^2+3) - a_0^2 B_{33}\big).
\end{aligned}
$$

Выпишем решение уравнений (1), (2):

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\nu} = (a_0'\sin\varphi; a_0'\cos\varphi; a_0),\\
&\boldsymbol{\omega} = \dot\varphi\boldsymbol{a} + (\rho_1\dot\varphi + \rho_0)\boldsymbol{\nu},\\
&\lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1\sin\varphi, \qquad (15)\\
&\dot\varphi = \beta_0 + \beta_1\sin\varphi,\\
&\dot\psi = \rho_1\dot\varphi + \rho_0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, в статье получены решения уравнений (1), (2), которые характеризуются соотношениями (12) и (15) и имеют место при выполнении условий (11) и (14).

1. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222 с.
2. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91-104.
3. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 80-86.
4. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Труды ИПММ НАН Украины. – 2009. – Т. 19. – С. 30-35.
5. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42-49.
6. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
7. *Yehia H.M.* On the motion of rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces, I: The equations of motion and their transformations // J. Mecan. Theor. Appl. – 1986. – 5. – N 5. – P. 742-745.
8. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52-73.

G. A. Kotov

About new classes of gyrostat's motions with variable gyrostatic moment.

The two new solutions for motion's equations of gyrostat with variable gyrostatic moment under the actions of potential and gyroscopic forces are obtained. The first solution describes precession-isoconic motion of the general form, in the second solution the velocities of precesion and selfmoving satisfy the algebraic linear equation.

Keywords: *gyrostat, precessional, isoconic motions.*

Г. О. Котов

Про нові класи рухів гіростата зі змінним гіростатичним моментом.

Отримано два нових розв'язки рівнянь руху гіростата зі змінним гіростатичним моментом під дією потенціальних та гіроскопічних сил. Перший розв'язок характеризує прецесійно-ізоконічний рух загального вигляду, у другому розв'язку швидкості прецесії та власного обертання задовольняють алгебраїчному лінійному рівнянню.

Ключові слова: *гіростат, прецесійні, ізоконічні рухи.*

Донбасская нац-ная академия строительства и архитектуры
`kotov_ga@rambler.ru`

Получено 26.11.12