УДК 517.956

©2012. **Е. А. Калита**

ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ p, БЛИЗКОМ К 2

Рассматривается нелинейная эллиптическая система высокого порядка дивергентного вида с естественным энергетическим пространством W_p^m. Для любого множества весов из A_q, $q < 2$, с равномерно ограниченной константой Макенхаупта устанавливается априорная оценка решений в W_p^m с этими весами, если p достаточно близко к 2 и модуль эллиптичности системы достаточно близок к единице. Как следствие, получается оценка в дуальных пространствах Морри на произвольно большом отрезке шкалы.

Ключевые слова: *нелинейные эллиптические системы, высокий порядок, априорные оценки, класс Макенхаупта, очень слабые решения.*

Рассматривается нелинейная эллиптическая система

$$\mathrm{div}^m A(x, D^m u) = \mathrm{div}^m f(x), \tag{1}$$

$x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Здесь u – вектор-функция размерности $N \geq 1$; A, f, $D^m u$ – размерности $n^m N$:

$$D^m u = \big(D_{j_1} \dots D_{j_m} u^i\big)^{i=1,\dots N}_{j_1,\dots j_m=1,\dots n},$$

$D_j = \partial/\partial x_j$, $D = (D_1, \dots D_n)$, так что запись $\mathrm{div}^m A$ обозначает

$$\mathrm{div}^m A = \Big(\sum_{j_1,\dots j_m=1}^{n} D_{j_1} \dots D_{j_m} A^i_{j_1\dots j_m} \Big)_{i=1,\dots N}.$$

Функция A удовлетворяет стандартным структурным условиям

$$(A(x,\xi),\xi) \geq c_1|\xi|^p, \qquad |A(x,\xi)| \leq c_2|\xi|^{p-1} \tag{2}$$

с некоторым $p \in (1,\infty)$.

В [1] для векторного p-лапласиана $\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du)$ было показано, что интервал значений $q \in (q_1, q_2)$, при которых есть априорная оценка решения в W_q^1, неограниченно приближается к $(1,\infty)$ когда p стремится к 2. Заметка [1] фактически является уточнением работы [2], где для общих дивергентных систем второго порядка устанавливались оценки в W_q^1 при $q \in (p-\varepsilon, p)$. Мы получаем аналогичный [1] результат для оценок в W_p^m с макенхауптовскими весами. Используются идеи работы [2] с уточнением [1].

Отметим, что стандартные условия (2) эквивалентны следующему условию: для функции B, определяемой равенством

$$\mathrm{div}^m(|D^m u|^{p-2}D^m u) + \mathrm{div}^m B(x, D^m u) = \varkappa\, \mathrm{div}^m A(x, D^m u)$$

при подходящем нормирующем множителе $\varkappa$, выполнено

$$|B(x,\xi)| \le K|\xi|^{p-1}, \qquad K < 1. \tag{3}$$

Легко видеть, что из (2) следует (3) с $K = (1-c_1^2/c_2^2)^{1/2}$ (при $\varkappa = c_1/c_2^2$), и наоборот, из (3) следуют условия (2) с $c_1/c_2 \ge (1-K)/2$. Мы будем предполагать выполненным (3), поскольку эта форма для нас удобнее. Далее для краткости $\varkappa = 1$.

Обозначим A_q, $q \in (1,\infty)$ – класс Макенхаупта – множество неотрицательных функций ω в $\mathbb{R}^n$ таких, что

$$[\omega]_q = \sup_B \frac{1}{|B|}\int_B \omega dx \left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-q'/q} dx\right)^{q/q'} < \infty,$$

супремум берется по шарам $B = B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $R \in (0,\infty)$, q' – сопряженный показатель: $1/q + 1/q' = 1$. Обозначим $L_{p,\omega}$ – пространство с нормой

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \omega dx\right)^{1/p},$$

$W^m_{p,\omega}$ – пространство функций u таких, что $D^m u \in L_{p,\omega}$.

Основной результат работы составляет следующая теорема.

Теорема. *Пусть заданы $q < 2$, $c_w < \infty$. Существует $\varepsilon > 0$, зависящее только от n, m, q, c_w, такое, что если $|p-2| < \varepsilon$, $K < \varepsilon$, $\omega, \nu \in A_q$, $[\omega]_q, [\nu]_q < c_w$, $f \in L_{p',\omega}$, $u \in W^m_{p,\nu}$ – решение системы (1), то $u \in W^m_{p,\omega}$ и выполнена оценка*

$$\|D^m u\|^p_{p,\omega} \le c\|f\|^{p'}_{p',\omega}. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку (4) в предположении, что $u \in W^m_{p,\omega}$.

Рассмотрим оператор $T = D^m \Delta^{-m} \mathrm{div}^m$ – векторное преобразование Рисса порядка $2m$, действующее на функциях размерности n^m. Обозначим $\|T\|_{s,\omega}$ – его норма в пространстве $L_{s,\omega}$ (строго говоря, в декартовой степени этого пространства).

Поскольку T – преобразование Рисса, норма $\|T\|_{s,\omega}$ оценивается величиной, зависящей от s и константы Макенхаупта $[\omega]_s$. Поэтому будут конечными величины

$$c_{T,q} = \sup\{\|T\|_{q,\omega} : [\omega]_q \le c_w\},$$

$$c_{T,q'} = \sup\{\|T\|_{q',\omega} : [\omega]_q \le c_w\}$$

с учетом $[\omega]_s \le [\omega]_q$ при $s > q$. По интерполяционной теореме Рисса-Торина получаем

$$\sup\{\|T\|_{s,\omega} : q \le s \le q', [\omega]_q < c_w\} \le \max\{c_{T,q}, c_{T,q'}\} = c_T.$$

Предполагая $\varepsilon < 2 - q$, имеем $p' > q$, так что $\omega \in A_{p'}$. По двойственности $\omega^{1-p} \in A_p$, поэтому для функции $v = \Delta^{-m}\mathrm{div}^m(\omega D^m u)$ имеем $D^m v = T(\omega D^m u) \in L_{p,\omega^{1-p}}$. Следовательно, v является допустимой пробной функцией в интегральном тождестве, если $f \in L_{p',\omega}$, $u \in W^m_{p,\omega}$. Подставляя v в интегральное тождество, имеем

$$\int T(|D^m u|^{p-2} D^m u)\omega D^m u dx + \int TB\omega D^m u dx = \int Tf\omega D^m u dx, \tag{5}$$

где B удовлетворяет (3).

Для оценки первого слагаемого введем функцию

$$\Phi(z) = \int T(|D^m u|^z D^m u)\omega |D^m u|^{p-2-z} D^m u dx,$$

z – комплексное. Покажем, что Φ ограничена и аналитична в некоторой окрестности $z = 0$ при p, достаточно близком к 2. По неравенству Гельдера

$$|\Phi(z)| \le \left(\int |T(|D^m u|^z D^m u)|^{p/(1+\tau)}\omega dx\right)^{(1+\tau)/p} \|D^m u\|^{p-1-\tau}_{p,\omega},$$

где $\tau = \mathrm{Re} z$. Предполагая $\varepsilon < (2-q)/2$, при $|\tau| \le 1/q - 1/2$ имеем $p/(1+\tau) \in (q, q')$, что дает

$$|\Phi(z)| \le c_T \|D^m u\|^p_{p,\omega}. \tag{6}$$

Следовательно, Φ аналитична в полосе $|\mathrm{Re} z| < 1/q - 1/2$ и непрерывна в замыкании с оценкой (6), и то же верно для круга $|z| < 1/q - 1/2$. Отметим $\Phi(0) = \|D^m u\|^p_{p,\omega}$. По лемме Шварца при $|p-2| < 1/q - 1/2$

$$\begin{aligned}|\Phi(p-2) - \Phi(0)| &\le \frac{|p-2|}{1/q - 1/2} \max_{|z| = 1/q - 1/2} |\Phi(z) - \Phi(0)| \\ &\le \frac{|p-2|}{1/q - 1/2} (c_T + 1) \|D^m u\|^p_{p,\omega}.\end{aligned}$$

Из очевидного неравенства

$$\Phi(p-2) \ge \Phi(0) - |\Phi(p-2) - \Phi(0)|$$

следует

$$\int T(|D^m u|^{p-2} D^m u)\omega D^m u dx \ge \left(1 - |p-2| \frac{c_T + 1}{1/q - 1/2}\right) \|D^m u\|^p_{p,\omega},$$

и выбирая $\varepsilon = (1/q - 1/2)/4(c_T + 1)$, при $|p - 2| < \varepsilon$ получаем

$$\text{idem} \ge \frac{3}{4} \|D^m u\|^p_{p,\omega}.$$

Во втором слагаемом в (5) находим

$$\left|\int TB\omega D^m u dx\right| \le \|TB\|_{p',\omega} \|D^m u\|_{p,\omega}$$

и далее, с учетом $p' \in (q, q')$

$$\|TB\|_{p',\omega} \le c_T \|B\|_{p',\omega} \le c_T K \|D^m u\|_{p,\omega}^{p-1} \le \frac{1}{4} \|D^m u\|_{p,\omega}^{p-1}$$

при $K < \varepsilon$. Из (5) получаем

$$\frac{1}{2} \|D^m u\|_{p,\omega}^p \le \int Tf\omega D^m u dx.$$

В правой части имеем

$$\left| \int Tf\omega D^m u dx \right| \le \|Tf\|_{p',\omega} \|D^m u\|_{p,\omega} \le c_T \|f\|_{p',\omega} \|D^m u\|_{p,\omega},$$

что приводит к оценке (4).

Покажем теперь, что если $f \in L_{p',\omega}$, и $u \in W^m_{p,\nu}$ – решение, то $u \in W^m_{p,\omega}$. Рассмотрим вес $\omega_\theta = ((\nu/\theta)^{1/(1-q)} + \omega^{1/(1-q)})^{1-q}$, $\theta \in (0,1)$. Поскольку

$$\omega_\theta \le \min\{\nu/\theta; \omega\},$$

имеем $f \in L_{p',\omega_\theta}$, $u \in W^m_{p,\omega_\theta}$. Оценим константу Макенхаупта для ω_θ:

$$\begin{aligned}
[\omega_\theta]_q =& \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B \omega_\theta \, dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega_\theta^{1/(1-q)} dx \right)^{q-1} \\
\le& \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B \min\{\nu/\theta, \omega\} dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left((\nu/\theta)^{1/(1-q)} + \omega^{1/(1-q)} \right) dx \right)^{q-1} \\
\le& \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B \frac{\nu}{\theta} dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(\frac{\nu}{\theta}\right)^{1/(1-q)} dx \right)^{q-1} \\
& \qquad + \sup_B \frac{1}{|B|} \int \omega dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^{1/(1-q)} dx \right)^{q-1} \\
\le& [\nu]_q + [\omega]_q \le 2c_w
\end{aligned}$$

при любом $\theta \in (0,1)$.

Выбирая $\varepsilon > 0$ по величинам q и $2c_w$, при $|p-2| < \varepsilon$, $K < \varepsilon$ получаем

$$\|D^m u\|_{p,\omega_\theta}^p \le c \|f\|_{p',\omega_\theta}^{p'},$$

константа c не зависит от $\theta > 0$. Поскольку правая часть ограничена равномерно по $\theta > 0$, при $\theta \to 0$ отсюда следует $u \in W^m_{p,\omega}$. □

Рассмотрим, что дают наши оценки в случае дуальных пространств Морри. Дуальные пространства Морри $L_{s,a}$, $s \in (1, \infty)$, $a \in (0, n(s-1))$ определим нормой

$$\|f\|_{s,a} = \inf_\sigma \|f\|_{s,\omega},$$

$$\omega(x) = \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} |x-y|^{a/(1-s)} d\sigma(y)\right)^{1-s}, \tag{7}$$

inf берется по неотрицательным борелевским мерам σ с нормировкой $\sigma(\mathbb{R}^n) = 1$, см. [3].

Следствие. *Пусть* $a^* < n$, $q \in (1 + a^*/n, 2)$. *Существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что если* $|p-2| < \varepsilon$, $K < \varepsilon$, $a \in (0, a^*)$, $s \geq q$, $|f|^{p'/s} \in L_{s,a}$, u *– решение системы* (1) *с* $|D^m u|^{p/s} \in L_{s,a}$, *то*

$$\| \, |D^m u|^{p/s} \|_{s,a} \leq c \| \, |f|^{p'/s} \|_{s,a}.$$

Если при этом $|f|^{p'/s} \in L_{s,b}$ *с некоторым* b, $0 \leq b < a$, *то* $|D^m u|^{p/s} \in L_{s,b}$.

Отметим, что из малости ε следует p, $p' > q$, и в оценке можно брать, например, $s = p$ или $s = p'$.

Утверждение будет немедленно следовать из теоремы, если для весов вида (7) мы получим оценку константы Макенхаупта $[\omega]_q$, равномерную по $s \geq q$ и по $a \leq a^*$ $(< n(q-1))$. По определению

$$[\omega]_q = \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B \omega dx \left(\frac{1}{|B|} \int_B \omega^{1/(1-q)} dx \right)^{q-1},$$

$B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < R\}$. В первом множителе, используя оценку

$$|x-y| \leq |x-x_0| + |x_0 - y| < R + |x_0 - y|$$

для $x \in B$, находим

$$\frac{1}{|B|} \int_B \omega dx \leq \sup_{x \in B} \omega(x) \leq \left(1 + \int r_B^{a/(1-s)} d\sigma(y)\right)^{1-s},$$

где мы обозначим $r_B = R + |y - x_0|$. Во втором множителе, обозначая $r = |x-y|$ и учитывая $s \geq q$, имеем

$$\left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(1 + \int r^{a/(1-s)} d\sigma\right)^{\frac{s-1}{q-1}} dx \right)^{q-1}$$
$$\leq \left(\int \left(\frac{1}{|B|} \int_B \left(1 + r^{a/(1-s)}\right)^{\frac{s-1}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{s-1}} d\sigma \right)^{s-1}$$
$$\leq 2^{s-q} \left(\int \left(1 + \frac{1}{|B|} \int_B r^{a/(1-q)} dx \right)^{\frac{q-1}{s-1}} d\sigma \right)^{s-1}.$$

Для интеграла по B имеем

$$\frac{1}{|B|} \int_B r^{a/(1-q)} dx \leq \begin{cases} c(n - a/(q-1))^{-1} R^{a/(1-q)}, & |y - x_0| \leq 2R \\ c|y-x_0|^{a/(1-q)}, & |y-x_0| > 2R, \end{cases}$$

если $a < n(q-1)$. Это дает

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{1/(1-q)}dx\right)^{q-1} \le \frac{c}{(n-a/(q-1))^{q-1}}\left(1+\int r_B^{a/(1-s)}dx\right)^{s-1},$$

и окончательно получаем

$$[\omega]_q \le \frac{c}{(n-a/(q-1))^{q-1}}\,.$$

1. *Kinnunen I., Zhou S.* A note on very weak p-harmonic mappings // Electron. J. Differ. Equ. – 1997. – 25. – 4 p.
2. *Iwaniec T., Sbordone C.* Weak minima of variational integrals // J. Reine Angev. Math. – 1994. – 454. – P. 143-161.
3. *Калита Е.А.* Дуальные пространства Морри // Докл. РАН. – 1998. – Т. 361, № 4. – С. 447-449.

E. A. Kalita

Weighted estimates of solutions of nonlinear elliptic systems for p close to 2.

We consider high order nonlinear elliptic systems in divergent form with natural energetic space W_p^m. For arbitrary set of weights in A_q, $q < 2$, with uniformly bounded Muckenhoupt constant, we establish a priori estimate of solutions in W_p^m with these weights, if p sufficiently close to 2 and a modulus of ellipticity of system sufficiently close to one. As a consequence it gives a priory estimates in dual Morrey spaces on arbitrary big segment of scale.

Keywords: *nonlinear elliptic systems, high order, a priory estimates, Muckenhoupt class, very weak solutions.*

Є. О. Калита

Вагові оцінки розв'язків нелінійних еліптичних систем при p, близькому до 2.

Розглядається нелінійна еліптична система високого порядку дивергентного вигляду з природним енергетичним простором W_p^m. Для довільної множини вагових функцій з A_q, $q < 2$, з рівномірно обмеженою константою Макенхаупта встановлюється апріорна оцінка розв'язків у W_p^m з цими ваговими функціями, якщо p достатньо близьке до 2 та модуль еліптичності системи достатньо близький до одиниці. Як наслідок, отримано оцінки в дуальних просторах Морі на довільно великому відрізку шкали.

Ключові слова: *нелінійні еліптичні системи, високий порядок, апріорні оцінки, клас Макенхаупта, дуже слабкі розв'язки.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`ekalita@mail.ru`

Получено 25.12.12