

УДК 539.3

©2012. К. М. Довбня, Н. А. Шевцова

ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ ДОВІЛЬНОЇ КРИВИНИ З ПОВЕРХНЕВОЮ ТРІЩИНОЮ

Розв'язано задачу визначення напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з поверхневою тріщиною. Отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано методом механічних квадратур. Досліджено вплив геометричних параметрів тріщини на коефіцієнт інтенсивності в пластинах та оболонках з поверхневою тріщиною.

Ключові слова: ортотропна оболонка, поверхнева тріщина, КІН.

1. Вступ. Несуча здатність елементів конструкцій та споруд залежить від наявності різного типу дефектів. Одним з найбільш розповсюджених дефектів є поверхнева тріщина.

Існує кілька моделей, за допомогою яких тривимірна задача про напружений стан пружної оболонки з наскрізними та ненаскрізними тріщинами зводиться до двовимірної задачі. Однією з найбільш поширених є line-spring model. Вперше згадана модель була запропонована Rice і Levy при розв'язанні задачі теорії пружності про розтягнення і згин пластини, що містить ненаскрізну поверхневу тріщину [1]. Потім Defale і Erdogan використали модель лінійних пружин при побудові розв'язку для пологої циліндричної оболонки з повздовжніми та поперечними ненаскрізними тріщинами [2]. В 1989 році з'явилася стаття Осадчука В.А., Костенко І.С., Стасюка Р.З. про дослідження збуреного напруженого стану замкнутої циліндричної оболонки з системою повздовжніх ненаскрізних тріщин [5].

У роботах Довбні та її учнів досліджувались ізотропні оболонки довільної кривини з внутрішніми та поверхневими тріщинами [7, 8].

2. Постановка задачі. Розглядається ортотропна оболонка довільної кривини сталої товщини h з поверхневою тріщиною довжини $2l$ уздовж осі Ox . Система координат обрана таким чином, що осі x, y орієнтовані вздовж ліній головних кривин серединної поверхні оболонки, а вісь z спрямована по нормалі до неї. Оболонка знаходиться під дією навантаження, симетричного відносно лінії тріщини.

Головна ідея моделі лінійних пружин полягає в апроксимації тривимірної задачі про поверхневу тріщину двовимірною задачею для оболонок з наскрізною, до берегів якої прикладені мембранне зусилля T і момент M , еквівалентні невідомим зусиллям, що діють у прошарку суцільного матеріалу під фронтом поверхневої тріщини. Вводяться два припущення.

Перше припущення базується на тому, що тріщина довжини $2l$ вважається наскрізною, а обмеження на переміщення, що викликані діючими в залишковому перетині напруженнями (вони протидіють розкриттю тріщини), можуть бути враховані шляхом додатка до поверхні тріщини мембранного $T(x)$ і $M(x)$ згинаючого навантажень. Тобто, якщо дія навантажень $T_2^*(x)$ і $M_2^*(x)$ (мембранне зусилля і згинальний

момент на лінії тріщини в суцільній оболонці викликані зовнішнім навантаженням спрямовані на розкриття тріщини, то $T(x)$ і $M(x)$ на її змикання.

Друге припущення полягає в тому, що коефіцієнт інтенсивності напружень по координаті x (по фронту тріщини) можна апроксимувати відповідною функцією, що визначається з розв'язку задачі для пластини з крайовою тріщиною довжиною $L(x)$ в умовах плоскої деформації. При цьому пластина навантажена рівномірним розтяжним зусиллям і згинальним моментом, прикладеним вдалечині від тріщини.

Для визначення T і M використовують співвідношення, яке пов'язує коефіцієнти інтенсивності напружень та енергію, що виділяється при руйнуванні

$$G = \frac{\partial}{\partial L}(U - V) = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2, \quad (1)$$

де U – робота зовнішніх навантажень; V – енергія деформації; K_i – коефіцієнт інтенсивності напружень, який визначається в умовах плоскої деформації

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{h}} \left(T g_t + \frac{6M}{h} g_b(s) \right), \quad (2)$$

де $s = \frac{L}{h} = \frac{l_0}{h} \sqrt{1 - \frac{x}{l}}$, l_0 – максимальна глибина тріщини, g_t , g_b – побудовані як інтерполяційні поліноми Лагранжа на основі даних, наведених у [4]:

$$g_t(s) = \sqrt{\pi s}(1.047 + 7.639s^2 - 27.969s^4 + 175.360s^6 - 439.451s^8 + 557.540s^{10} - 222.80s^{12}),$$

$$g_b(s) = \sqrt{\pi s}(1.043 - 1.610s^2 + 17.276s^4 - 84.989s^6 + 232.556s^8 - 304.196s^{10} + 158.307s^{12}),$$

де $0 < s < 0.8$.

З іншого боку енергію, яка пов'язана з приростом тріщини на dL , можна визначити як добуток навантаження на зміщення точок, прикладених до цих навантажень:

$$G = \frac{1}{2} \left(T \frac{\partial \delta}{\partial L} + M \frac{\partial \theta}{\partial L} \right), \quad (3)$$

де δ – розкриття тріщини, а θ – кут повороту тріщини.

Введемо вектори $\bar{\tau} = \begin{pmatrix} T \\ 6M \end{pmatrix} \frac{1}{h} i\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \delta \\ H\theta \end{pmatrix} \frac{1}{\sigma}$. Прирівнюючи (1) і (3), з урахуванням (2) після перетворень отримаємо:

$$\frac{\delta \omega}{\delta L} = \frac{2(1 - \nu^2)}{Eh} A \bar{\tau}, \quad (4)$$

де

$$A = \alpha_{ij} = \begin{vmatrix} g_t^2 & g_t g_b \\ g_t g_b & g_b^2 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Проінтегрувавши співвідношення (4) по L , маємо два незалежних рівняння

$$\bar{\omega} = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \left(\frac{1}{h} \int_0^L AdL \right) \bar{\tau}. \quad (6)$$

Розв'язавши систему відносно невідомих T і M , отримуємо: остаточний вираз для визначення невідомих зусилля T та M моменту

$$\bar{\tau} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} C \bar{\omega}; \quad C = \left(\frac{1}{h} \int_0^{\Gamma(t)} Ads \right)^{-1}. \quad (7)$$

Враховуючи, що $\delta(L(t)) = [\nu(x, 0)]$ і $\theta(L(t)) = [\theta_2(x, 0)]$, а також вигляд невідомих функцій:

$$\psi_1 = \frac{Eh}{4\chi^2 l} \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} \frac{d[\nu]}{d\tau},$$

$$\psi_3 = \frac{D(1-\nu)(1-\mu)}{4\chi^2 l \sqrt{a}} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]}{d\tau},$$

вектор $\bar{\tau}$ набуде вигляду:

$$\bar{\tau} = \left(\frac{T}{6M} \right) \frac{\chi^2 l / h \sqrt{a}}{(1-\nu^2)} \times \quad (8)$$

$$\times \left(\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} c_{11}(t) \int_{-1}^1 \psi(\tau) \text{sign}(t-\tau) d\tau + \frac{\sqrt{1+\nu}}{\sqrt{3(1-\nu)(3+\epsilon-\mu)}} c_{12}(t) \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \text{sign}(t-\tau) d\tau \\ \frac{1}{\sqrt{1-\mu}} c_{21}(t) \int_{-1}^1 \psi(\tau) \text{sign}(t-\tau) d\tau + \frac{\sqrt{1+\nu}}{\sqrt{3(1-\nu)(3+\epsilon-\mu)}} c_{22}(t) \int_{-1}^1 \psi_2(\tau) \text{sign}(t-\tau) d\tau \end{array} \right).$$

Оскільки на лінії тріщини діють невідомі зусилля T і M , система сингулярних інтегральних рівнянь набуде вигляду (9):

$$\int_{-1}^1 \left((K_{11}(\tau-t) - \frac{c_{11}(t)\pi\chi^2 l / h \sqrt{a}}{(1-\nu)\sqrt{1-\mu}} \text{sign}(t-\tau)) \psi_1(\tau) + (K_{13}(\tau-t) - \frac{c_{12}(t)\pi\chi^2 l / h \sqrt{a}}{(1-\nu)(3+\nu-\mu)\sqrt{3(1-\nu^2)}} \text{sign}(t-\tau)) \psi_2(\tau) \right) d\tau = \pi T^*(t), \quad (9)$$

$$\int_{-1}^1 \left((K_{31}(\tau-t) - \frac{c_{21}(t)\pi\chi^2 l / h \sqrt{a}}{(1-\nu)\sqrt{1-\mu}} \text{sign}(t-\tau)) \psi_1(\tau) + (K_{33}(\tau-t) - \frac{c_{22}(t)\pi\chi^2 l / h \sqrt{a}}{(1-\nu)(3+\nu-\mu)\sqrt{3(1-\nu^2)}} \text{sign}(t-\tau)) \psi_2(\tau) \right) d\tau = \pi c^2 R_2 M^*(t),$$

де вигляд K_{ij} отримано в [8], $c^2 = \sqrt{12(1-\nu^2)}/(R_2 h)$, $d^2 = \frac{\sqrt{1-\mu} \cos^2 \Theta + \lambda \chi^2 \sin^2 \Theta}{a} \frac{l_1 l_2}{l}$, $l_1^2 = 1 + \tilde{\mu}(1-\nu) \cos^2 2\Theta$, $l_2^2 = 1 - \tilde{\mu}(1+\nu) \cos^2 2\Theta$, $a = \frac{2-\mu+\mu\nu}{2}$, $\tilde{\mu} = \frac{\mu}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)} l}{\sqrt{Rh}}$, $\hat{\beta} = \beta$ - для повздовжньої орієнтації розрізу, $\hat{\beta} = \frac{\beta}{\sqrt{|a|}}$. E - модуль Юнга; ν - коефіцієнт Пуассона; $\lambda = R_2/R_1$; R_2, R_1 - радіуси головних кривин серединної поверхні оболонки.

Отримана система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язується методом механічних квадратур [9], [10], який дозволяє систему (9) звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розрахунки для ортотропної оболонки приводяться для матеріалу борон-епоксидного композиту [4]:

$$E_1 = 4.0405 \times 10^4 \text{ МПа}, E_2 = 15.3069 \times 10^4 \text{ МПа},$$

$$G_{1,2} = 2.9304 \times 10^4 \text{ МПа}, \nu = 0.484.$$

Рис.1. відображає залежність K_1/K_∞ від l/h для циліндричної оболонки при розтягуючому зусиллі. Криві 1, 2, 3, ... 7 відповідають значенням глибини – $l_0/h = 0, 1; 0.2; \dots 0.7$.

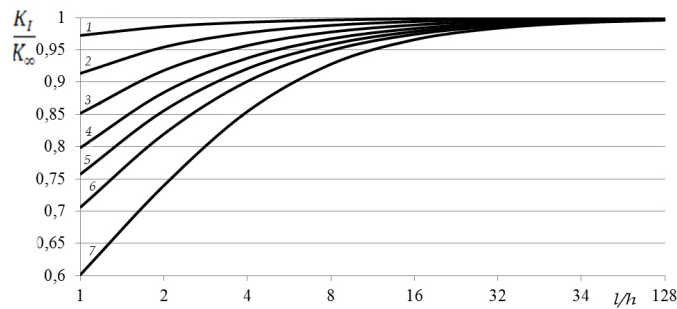


Рис. 1. $\beta = 1$

На рис. 2-5 зображено залежність K_1/K_∞ від β для різних оболонок з напівеліптичною тріщиною (1 – псевдосферична, 3 – сферична, 2 – циліндричної з повздожньою, 4 – циліндричної з поперечною) при $l/h = 1$ та різних l_0/h при розтягуючому зусиллі.

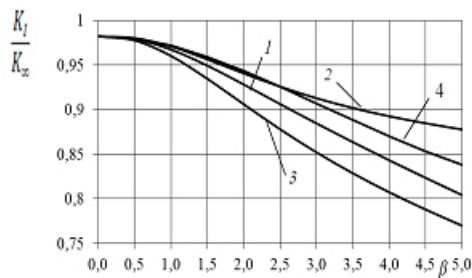


Рис. 2. $l_0/h = 0.1$.

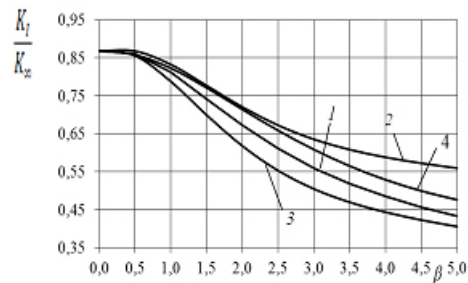


Рис. 3. $l_0/h = 0.3$.

Зі збільшенням довжини тріщини значення нормованого КІ зменшується. Для циліндричної оболонки з повздожньою тріщиною значення КІ вище, ніж для циліндричної з поперечною тріщиною.

На рис. 6-9 зображено залежність K_1/K_∞ від кривини оболонки λ для повздожньої напівеліптичної тріщини в центральній точці при розтягуючому зусиллі при $l/h = 1$. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\beta = 1, 2, 4$.

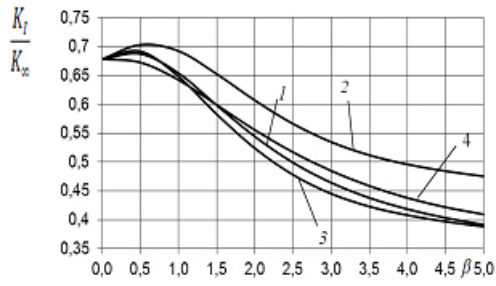


Рис. 4. $l_0/h = 0.5$.

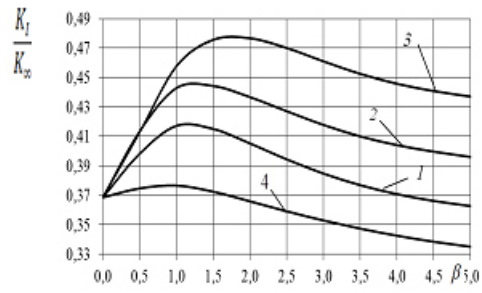


Рис. 5. $l_0/h = 0.7$.

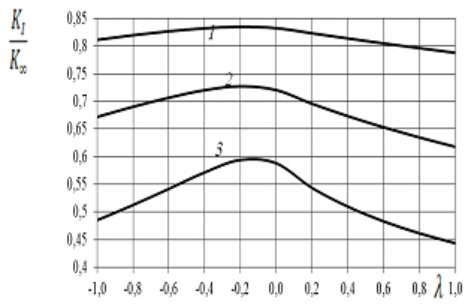


Рис. 6. $l_0/h = 0.3$.

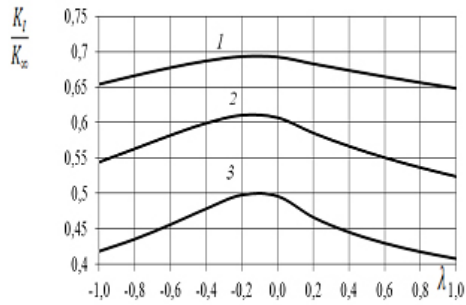


Рис. 7. $l_0/h = 0.5$.

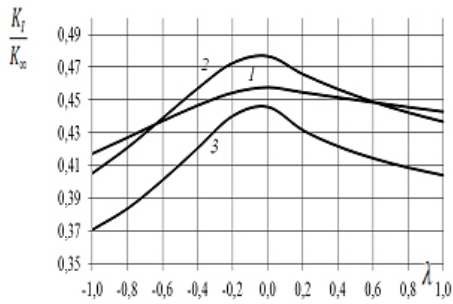


Рис. 8. $l_0/h = 0.7$.

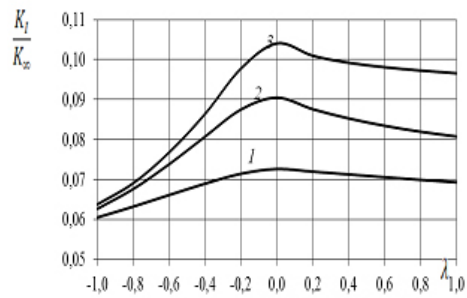


Рис. 9. $l_0/h = 0.9$.

На рис. 10-13 зображено залежність K_I/K_∞ від кривини оболонки λ для поперечної напівеліптичної тріщини в центральній точці при розтягуючому зусиллі при $l/h = 1$. Криві 1, 2, 3 відповідають значенням $\beta = 1, 2, 4$.

Найбільше значення КІ для повздовжньої тріщини досягається в оболонках кривини $\lambda \in [-0.1; 0]$, близьких до сферичної. Для поперечної тріщини, залежність КІ від кривини оболонки носить немонотонний характер, а саме для неглибоких тріщин

$l_0/h < 0.4$ найбільше значення КІ досягається в циліндричних оболонках, а для тріщин $l_0/h > 0.5$ досягається в сферичних оболонках, для $l_0/h \in [0.4; 0.5]$ найбільше значення КІ досягається в оболонках $\lambda \in [0.1; 0.2]$.

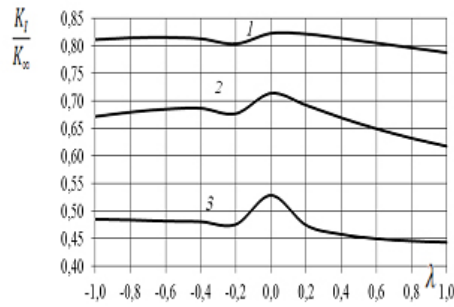


Рис. 10. $l_0/h = 0.3$.

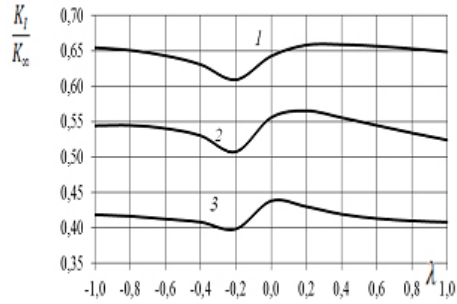


Рис. 11. $l_0/h = 0.5$.

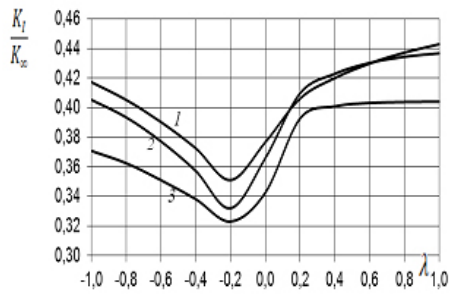


Рис. 12. $l_0/h = 0.7$.

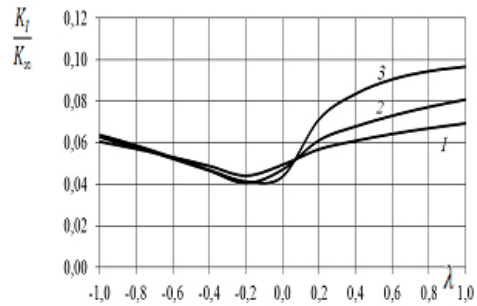


Рис. 13. $l_0/h = 0.9$.

В таблиці 1-2 представлена залежність K_1/K_∞ від l/h та l_0/h для циліндричної оболонки з поздовжньою та поперечною напівеліптичною тріщиною відповідно при розтягуючому зусиллі.

Таблиця 1

l/h	l_0/h						
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1	0,9821	0,9358	0,8695	0,7861	0,6827	0,5460	0,5460
2	0,9909	0,9664	0,9287	0,7861	0,8011	0,6872	0,5159
4	0,9951	0,9821	0,9619	0,9326	0,8879	0,8106	0,6706
8	0,9966	0,9882	0,9763	0,9604	0,9378	0,8964	0,8075
16	0,9966	0,9885	0,9780	0,9661	0,9530	0,9335	0,8907
32	0,9966	0,9882	0,9772	0,9645	0,9518	0,9368	0,9126
64	0,9973	0,9905	0,9811	0,9698	0,9574	0,9422	0,9189
128	0,9980	0,9929	0,9858	0,9770	0,9669	0,9537	0,9324
256	0,9985	0,9948	0,9896	0,9829	0,9751	0,9645	0,9467
512	0,9989	0,9963	0,9925	0,9876	0,9818	0,9736	0,9592

Таблиця 2

	l_0/h						
l/h	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
1	0,9819	0,9350	0,8679	0,7833	0,6789	0,5416	0,3692
2	0,9907	0,9655	0,9262	0,871	0,7933	0,6766	0,5044
4	0,9949	0,9812	0,9591	0,9262	0,8759	0,7911	0,6437
8	0,9967	0,9879	0,9744	0,9547	0,9245	0,8704	0,7629
16	0,9968	0,9889	0,9776	0,9628	0,9430	0,9097	0,8402
32	0,9961	0,9865	0,9735	0,9578	0,9400	0,9150	0,8682
64	0,9958	0,9854	0,9712	0,9541	0,9351	0,9107	0,8705
128	0,9968	0,9888	0,9774	0,9634	0,9471	0,9254	0,8892
256	0,9980	0,9931	0,9860	0,9768	0,9657	0,9500	0,9225
512	0,9989	0,9962	0,9921	0,9868	0,9800	0,9701	0,9517

В таблиці 3 представлено порівняння коефіцієнтів інтенсивності для сферичної оболонки з однією напівеліптичною тріщиною. Стівцями з зірочкою позначено результати, отримані Делайли та Ердоганом [3]. Різниця результатів не перевищує 5%.

Таблиця 3

	l_0/h							
l/R	0,2*	0,2	0,4*	0,4	0,6*	0,6	0,8*	0,8
0,2	0,882	0,856	0,643	0,559	0,375	0,345	0,136	0,127
0,1	0,886	0,861	0,644	0,602	0,366	0,339	0,124	0,117
0,05	0,886	0,862	0,641	0,6	0,356	0,331	0,116	0,111
0,02	0,885	0,861	0,635	0,595	0,347	0,323	0,323	0,106

В таблиці 4 представлено порівняння коефіцієнтів інтенсивності в центральній точці напівеліптичної тріщини для пластини. Стівцями з зірочкою позначено результати, отримані Делайли та Ердоганом.

Таблиця 4

	l/h							
l_0/h	0,5*	0,5	1*	1	1,5*	1,5	2*	2
0,1	0,91	0,907	0,945	0,954	0,959	0,969	0,967	0,977
0,2	0,729	0,688	0,817	0,823	0,858	0,879	0,883	0,909
0,3	0,545	0,49	0,662	0,655	0,724	0,744	0,765	0,798
0,4	0,39	0,347	0,507	0,492	0,577	0,588	0,627	0,588
0,5	0,268	0,248	0,365	0,354	0,43	0,435	0,479	0,5
0,6	0,174	0,178	0,244	0,246	0,295	0,303	0,336	0,353
0,7	0,102	0,116	0,146	0,155	0,179	0,189	0,207	0,221
0,8	0,05	0,066	0,073	0,085	0,089	0,101	0,104	0,116

1. *Jr. Rice J.R., Levy N.* The part-through crack in an elastic plate // Trans. ASME, J.Appl. Mech. – 1972. – **32**. – P. 185-194.
2. *Defale F., Erdogan F.* Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or an axial part-through crack // Trans. ASME, J.Appl. Mech. – 1982. – **49**, № 1. – P. 97-102.
3. *Joseph P.F., Erdogan F.* Plates and Shells Containing a Surface Crack Under General Loading Condition // NASA Contractor Report 178328, NASA Langley Research Center. – 1987.
4. *Wu B.H., Erdogan F.* The Surface Crack Problem in an Orthotropic Plate Under Bending and Tension // NASA Project Report, Lehigh University, NGR 39-007-011. – November, 1986.
5. *Осадчук В.А., Костенко І.С., Стасюк Р.З.* Дослідження збуреного напруженого стану замкненої циліндричної оболонки з системою поздовжніх ненаскрізних тріщин // Фіз.-хим. механіка матеріалів. – 1989. – № 6. – С. 89-92.
6. *Шевченко В.П., Довбня Е.Н., Цванг В.А.* Ортоотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Концентрация напряжений / Под редакцией Гузя А.Н, Космодамианского А.С., Шевченко В.П. - К.:А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов: в 12 т.; т. 7). – С. 212-249.
7. *Довбня К.М., Чернишенко М.О.* Дослідження напруженого стану в ізотропних оболонках довільної кривини з поверхневими тріщинами // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2005. – № 2. – С. 121-125.
8. *Довбня К.М., Яртемків В.В.* Застосування line-spring model для дослідження оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2007. – № 4. – С. 160-164.
9. *Корнейчук А.А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. – М.: Наука, 1964. – С. 64-74.
10. *Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В.* Численный анализ в плоских задачах теории трещин. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.

К. М. Dovbnya, N. A. Shevtsova

Investigation of the stressed state of an orthotropic shell of arbitrary curvature with and surface crack.

The problem of determining the stress state of orthotropic shell of arbitrary curvature with surface crack. The problem is reduced to a system of singular integral equations is solved numerically by mechanical quadratures. Investigation of the influence of geometrical parameters crack on the stress intensity factors in plates and shells with surface crack, KI.

Keywords: *orthotropic shell, surface crack.*

К. М. Довбня, Н. А. Шевцова

Исследование напряженного состояния ортоотропной оболочки произвольной кривизны с поверхностной трещиной.

Решена задача определения напряженного состояния ортоотропной оболочки произвольной кривизны с поверхностной трещиной. Получена система сингулярных интегральных уравнений, решенная методом механических квадратур. Исследовано влияние геометрических параметров трещины на коэффициенты интенсивности в пластинах и оболочках с поверхностной трещиной.

Ключевые слова: *ортоотропная оболочка, поверхностная трещина, КИН.*

Донецкий национальный ун-т
nadya.shevtsova@gmail.com

Получено 09.09.12