УДК 512.579

©2012. **О. М. Литвин, Ю. І. Першина**

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНОЇ ФУНКЦІЇ РОЗРИВНИМ СПЛАЙНОМ, КОЛИ ВУЗЛИ СПЛАЙНА НЕ ЗБІГАЮТЬСЯ З РОЗРИВАМИ ФУНКЦІЇ

Побудовано та досліджено розривні апроксимаційні сплайни для наближення розривних функцій. Розроблено алгоритм пошуку розривів функції однієї змінної за допомогою наближення її побудованим розривним апроксимаційним сплайном. Також розроблено алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого розривного сплайна. Наведено приклади.

Ключові слова: *розривна функція, розривна апроксимація, оцінка похибки, знаходження розривів функції.*

1. Вступ. Задачі дослідження розривних функцій виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних функцій. Наприклад, при дослідженні внутрішньої структури тіла людини корисно враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність у різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність, тобто щільність тіла є функцією з розривами першого роду на системі поверхонь, що відділяють різні його частини); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Дослідженню розривних функцій присвячені, наприклад, роботи [1]-[4], а наближення неперервних функцій розглядається, наприклад, у роботах [5], [6]. У роботі [1] досліджувалася задача рівномірного наближення неперервних та неперервно-диференційовних функцій розривними сплайнами однієї змінної. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [4], [6], в яких неперервні та диференційовні функції наближуються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення розривних функцій, то авторам невідомі загальні методи сплайн-апроксимації та сплайн-інтерполяції розривних функцій за допомогою розривних сплайнів. Авторами вже були досліджені деякі питання наближення розривних функцій розривними сплайнами для функцій однієї змінної [7] та для функцій двох змінних [8], [9].

Ті методи, що вже були побудовані припускають, що розриви наближуваної функції відомі, і тому вони співпадають з розривами наближуючого сплайна. В даній роботі розробляється метод наближення розривних функцій однієї змінної розривними сплайнами, коли розриви наближуваної функції ще треба знайти. А також пропонується алгоритм оптимального вибору вузлів наближуючого розривного сплайна.

2. Постановка задачі. Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими розривами першого роду, причому невідомо, де вони знаходяться. Метою роботи є побудова розривного апроксимаційного сплайна для наближення розривної функції, побудованого на заданих вузлах $x_k, k = \overline{1, n}$, які розбивають інтервал $[a, b]$ на n частин, та розробка алгоритму оптимального вибору вузлів наближуючого сплайна.

3. Побудова розривного апроксимаційного сплайна. Нехай $x_k, k = \overline{1, n}$ – вузли наближуючого апроксимаційного сплайна і деякі з них збігаються з точками розриву заданої розривної функції. Будемо будувати розривний апроксимаційний сплайн на кожному з відрізків у вигляді формули

$$S(x) = Sp_k(x, C) = C_k^+ h_k(x) + C_{k+1}^- h_{k+1}(x), k = \overline{1, n-1}, \tag{1}$$

$h_k(x)$ – базисні поліноми з властивостями $h_i(x_j) = \delta_{i,j}$, коефіцієнти C_k^+, C_{k+1}^- сплайна знаходяться методом найменших квадратів з умови

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - S(x))^2 dt \to \min_C. \tag{2}$$

Теорема 1. *Оцінка похибки наближення розривної функції* $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$ $k = \overline{1, n-1}$ *розривним лінійним апроксимаційним сплайном* $S(x)$ *вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття має вигляд:*

– якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, *то*

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1}|)\} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \ |f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}, \tag{3}$$

– якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, *то*

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \leq \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1}|)\} + \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}, \tag{4}$$

$$L_\infty[a, b] = \lim_{p \to \infty} L_p[a, b].$$

Доведення. Згідно формули (1) розривний лінійний апроксимаційний сплайн на кожному інтервалі розбиття набуває вигляду

$$S(x) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, x \in [x_k, x_{k+1}].$$

Розв'яжемо мінімізаційну задачу:

$$J_k(x) = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k})^2 dx \to \min_C, k = \overline{1, n-1}.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\frac{\partial J_k(C)}{\partial C_k^+} = 0$, $\frac{\partial J_k(C)}{\partial C_{k+1}^-} = 0$, відносно невідомих C_k^+, C_{k+1}^-:

$$\begin{cases} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} 2(f(x) - C_k^+ \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}) \cdot (-\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})dx = 0 \\ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} 2(f(x) - C_k^+ \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}) \cdot (-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})dx = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_k^+ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2 + C_{k+1}^- \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx \\ C_k^+ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx + C_{k+1}^- \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2 dx = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx. \end{cases}$$

В отриманій системі зробимо заміну $C_k^+ = f(x_k+0)+\varepsilon_k^+$, $C_{k+1}^- = f(x_{k+1}-0)+\varepsilon_{k+1}^-$ і замінимо $f(x)$ інтерполяційним поліномом Лагранжа із залишковим членом $R(x)$. У результаті отримаємо наступні вирази для інтегральних членів здобутої системи:

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}})^2 dx = \frac{x_{k+1}-x_k}{3};$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} = \frac{x_{k+1}-x_k}{6};$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k})^2 x = \frac{x_{k+1}-x_k}{3};$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx = \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)f(x_k+0) + \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}-0) +$$

$$+ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} dx;$$

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx = \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)f(x_k+0) + \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}-0) +$$

$$+ \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k} dx.$$

Отрмаємо систему наступного вигляду:

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\cdot\varepsilon_k^+ + \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\cdot\varepsilon_{k+1}^- = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\cdot\varepsilon_k^+ + \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\cdot\varepsilon_{k+1}^- = \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx. \end{cases} \tag{5}$$

Для аналізу правих частин отриманої системи скористаємося формулами з роботи [1]:

– якщо $f(x)\in C^1[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\|f(x)-S(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]} \le \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]};$$

– якщо $f(x)\in C^2[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\|f(x)-S(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]} \le (\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}.$$

Використовуючи позначення $\|\varepsilon\| = max\{\varepsilon_k^+,\varepsilon_{k+1}^-\}$, перепишемо систему (5) у вигляді:

1) якщо $f(x)\in C^1[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\cdot\|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}\cdot(\frac{x_{k+1}-x_k}{2})^2 \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\cdot\|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}\cdot(\frac{x_{k+1}-x_k}{2})^2. \end{cases}$$

З цієї системи виходить, що

$$\|\varepsilon\| \le \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}. \tag{6}$$

2) якщо $f(x)\in C^2[x_k,x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\cdot\|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}\cdot\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{16} \\ \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{x_{k+1}-x_k}{3}\cdot\|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}\cdot\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{8}. \end{cases}$$

З цієї системи виходить, що

$$\|\varepsilon\| \le \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_{L_\infty[x_k,x_{k+1}]}. \tag{7}$$

З нерівностей (6), (7) і випливає доведення теореми.

Теорема доведена.

Зауваження 1. Якщо функція $f(x)=a(const)$ наближується розривним лінійним сплайном вигляду (1) методом найменших квадратів, то оцінка (3) є точною, якщо ж функція має вигляд $f(x)=ax+b$, то в оцінці (4) також досягається рівність.

Наслідок. *Якщо наближувана функція $f(x)$ є кусково-лінійною або кусково-постійною функцією з точками розриву $x = x_k, k = \overline{1,n}$ та наближуємо її кусково-лінійним сплайном $S(x)$, визначеним формулами (1)-(2), то отримаємо точно наближувану функцію $f(x)$, тобто $S(x) = f(x)$.*

Зауваження 2. Якщо $C_k^+ = C_k^- = S(x_k), k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний апроксимаційний сплайн є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

4. Алгоритм оптимального вибору вузлів наближуючого розривного сплайна. Нехай $x_k, k = \overline{1,n}$ – вузли наближуючого сплайна, які не збігаються з розривами заданої функції $f(x)$. Викладемо алгоритм знаходження розривів заданої функції покроково.

Крок 1. Будуємо розривний апроксимаційний сплайн $S(x)$ на заданих вузлах $x_k, k = \overline{1,n}$ за формулою (1), який на кожному інтервалі розбиття може мати різний аналітичний вигляд $S_k(x, C)$ з невідомими $C_k^+, C_{k+1}^-, k = \overline{1, n-1}$.

Крок 2. Знаходимо матрицю C невідомих коефіцієнтів сплайна з умови (2). При проведенні обчислювального експерименту для мінімізації використовувалася стандартна процедура системи комп'ютерної математики MathCad – під назвою $Minimize(\sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - Sp_k(t, C))^2 dt, C)$.

Після підстановки знайдених коефіцієнтів у сплайн (1) отримаємо розривний сплайн, що складається з функцій $S_k(x) = Sp_k(x, C), k = \overline{1, n-1}$.

Крок 3. На кожному з інтервалів $[x_k, x_{k+1}], k = \overline{1, n-1}$ обчислюємо значення

$$J_k^* = \max_{x_k \le x \le x_{k+1}} J_k(x); J_k(x) = |f(x) - S_k(x)|.$$

Означення. Якщо $|\lim\limits_{x \to x_q^+} f(x) - \lim\limits_{x \to x_q^-} f(x)| < \varepsilon$, то функцію $f(x)$ будемо називати ε-неперервною в точці x_q.

Крок 4. Якщо виконуються умови: 1) $J_q < \varepsilon, J_{q+1} < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення; 2) $f(x)$ є ε-неперервною в точці x_{q+1}, то вузол x_{q+1} видаляємо з розгляду.

Крок 5. З усіх $J_k, k = \overline{1, n-1}$ обираємо максимальне значення $W = \max\limits_{1 \le k \le n-1} (J_k^*)$ та ділимо інтервал, якому належить це максимальне значення, наприклад, $W \in [x_r, x_{r+1}], r < n$ навпіл, тобто вводимо до множини вузлів сплайна новий вузол $x^* = x_r + \frac{x_{r+1} - x(r)}{2}$.

Крок 6. На новій множині вузлів знову будуємо апроксимаційний сплайн за формулою (1) та за формулою (2) знаходимо невідому матрицю коефіцієнтів C. І далі перевіряємо виконання умови $\max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - S(x)| < \varepsilon$, де ε – задана точність наближення. Якщо ця умова виконується, то ми отримали оптимальний вибір вузлів наближуючого сплайна, серед яких знаходяться і розриви заданої функції. Якщо ж вказана умова не виконується, то повертаємося до кроку 3.

Приклад 1. Нехай в області $D = [0, 1]$ задана функція (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2, & x \in (0, 0.5]; \\ 2, & x \in (0.5, 1]. \end{cases}$$

Тобто функція має один розрив першого роду в точці $x = 0.5$.

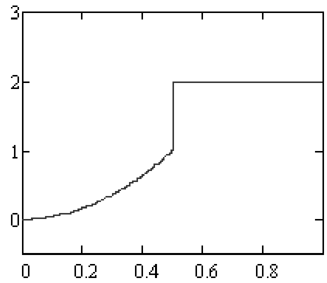

Рис. 1. Графічний вигляд функції $f(x)$

Обираємо вузли сплайна так, щоб вони не збігалися з розривами заданої функції $x_1 = 0, x_2 = 0.3, x_3 = 0.6, x_4 = 1$. Побудуємо розривний апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (1), який у нашому випадку буде мати вигляд:

$$S_k(x, C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}, x_k \leq x \leq x_{k+1}, k = \overline{1, 3}, \tag{8}$$

де елементи матриці C знаходимо з умови (2). Тобто будуємо розривний сплайн з точками розриву у вузлах сплайна (рис. 2). Задамо точність наближення $\varepsilon = 0.01$.

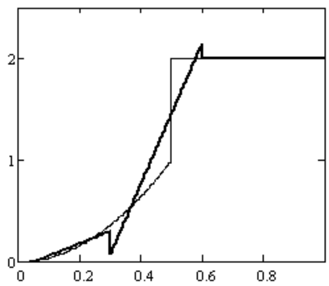

Рис. 2. Графічний вигляд наближуваної функції (нежирна лінія) та побудованого сплайна (жирна лінія)

Результат був отриманий за 24 ітерації. Наведемо результат деяких з них на рис. 3. Тобто на 24-й ітерації сплайн $S(x)$ наблизив задану функцію $f(x)$ з точністю ε. При цьому оптимально обрали вузли сплайна, які дорівнюють $x_1 = 0$, $x_2 = 0,075$, $x_3 = 0,15$, $x_4 = 0,3$, $x_5 = 0,5$, $x_6 = 1$.

Приклад 2. Нехай в тому ж інтервалі $[0, 1]$ задана функція (рис. 4).

$$g(x) = \begin{cases} -12x^2 + 2, & x \in (0, 0.4]; \\ 3 - x, & x \in (0.4, 0.7]; \\ 1, & x \in (0.7, 1]. \end{cases}$$

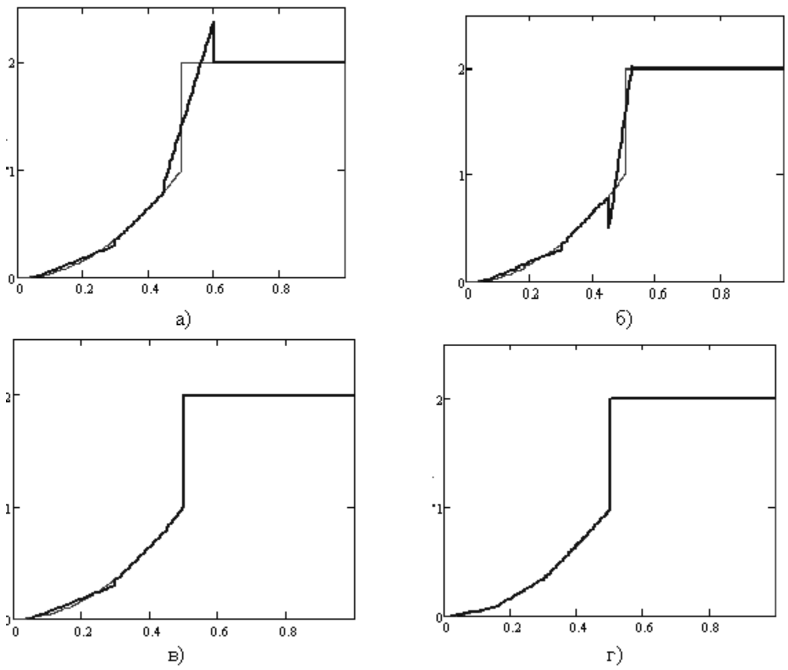

Рис. 3. Графічний вигляд наближуваної функції (нежирна лінія) та побудованого сплайна (жирна лінія) на: а) 2-й ітерації; б) 3-й ітерації; в) 18-й ітерації; г) 24-й ітерації

Тобто ця функція має два розриви першого роду в точках $x = 0.4$ та $x = 0,7$. Оберемо вузли сплайна $x_1 = 0, x_2 = 0.3, x_3 = 0.6, x_4 = 1$. Побудуємо розривний

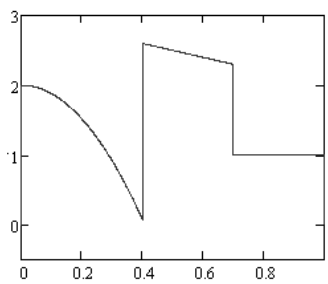

Рис. 4. Графічний вигляд функції $g(x)$

апроксимаційний лінійний сплайн у вигляді формули (8). Задамо точність таку ж як і в прикладі 1. На рис. 5 наведемо декілька проміжних результатів наближення. Тобто на 37-й ітерації сплайн $S(x)$ наблизив задану функцію $g(x)$ з точністю ε. При цьому ми оптимально обрали вузли наближуючого сплайна, серед яких є і розриви заданої функції.

$$x_1 = 0, x_2 = 0.075, x_3 = 0.15, x_4 = 0.225, x_5 = 0.3, x_6 = 0.375,$$

$$x_7 = 0.4, x_8 = 0.7, x_9 = 1.$$

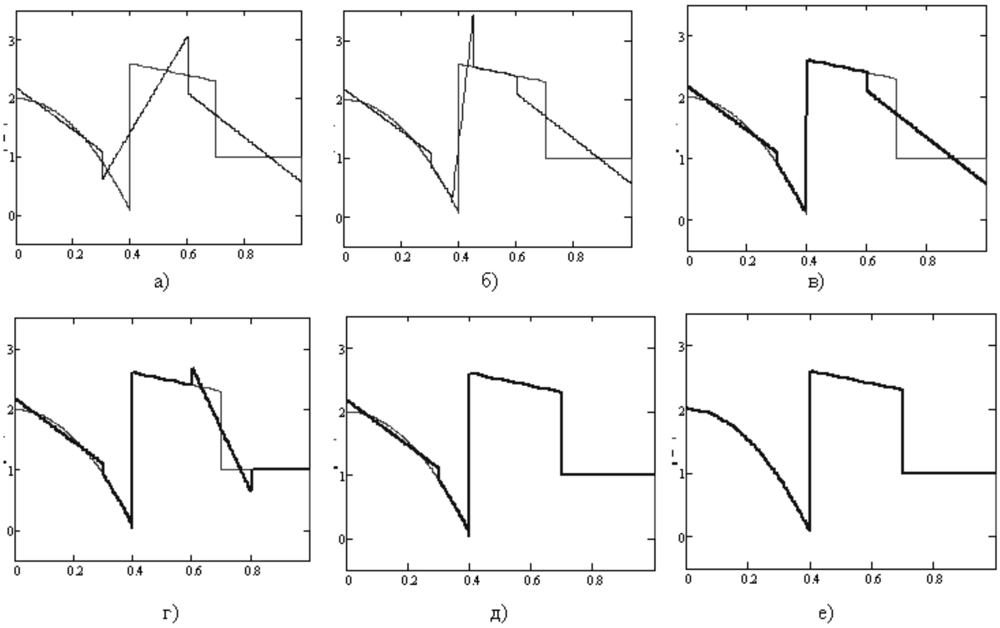

Рис. 5. Графічний вигляд наближуваної функції (нежирна лінія) та побудованого сплайна (жирна лінія) на: а) 1-й ітерації; б) 5-й ітерації; в) 10-й ітерації; г) 15-й ітерації; д) 30-й ітерації; г) 37-й ітерації

5. Висновки. Таким чином, у роботі розроблено алгоритм пошуку розривів функції однієї змінної за допомогою наближення її розривним апроксимаційним сплайном. Також розроблений алгоритм оптимального визначення вузлів наближуючого розривного сплайна. Наведено приклади, що підтверджують викладену теорію.

Надалі авторами планується дослідити питання оптимального пошуку вузлів розривного сплайна для функцій двох змінних з ректангульованою областю визначення.

1. *Попов Б.А.* Равномерное приближение сплайнами. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
2. *Петровская Н.Б.* Аппроксимация разрывных решений для одного класса схем высокого порядка // Математическое моделирование. – Москва. – 2005. – Т. 17, № 1. – С. 79-92.
3. *Arnold D.N.* Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM Journal on Numerical Analysis. – 2002. – Vol. 39, № 5.– P. 1749-1779.
4. *Литвин О.М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
5. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
6. *Завьялов Ю.Н., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980 – 352 с.
7. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Математичне моделювання процесів, які мають розриви, за допомогою розривних інтерполяційних сплайнів // Научно-технический журнал "Искусственный интеллект". – Донецк. – 2011. – № 2. – С. 152-158.
8. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) // Компьютерная матема-

тика. – Киев, 2011. – № 1. – С. 96-105.
9. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины. – Киев. – 2011, № 5. – С. 34-47.

O. M. Lytvyn, Y. I. Pershina

Approach of discontinuous function by an discontinuous spline when spline knots do not coincide with function ruptures.

Are constructed and investigated discontinuous approximational splines for approach of discontinuous functions. The algorithm of search of ruptures of function of one variable by means of its approach by constructed approximational spline is developed. Also the algorithm of optimum definition of knots of an approaching discontinuous spline is developed. Examples are resulted.

Keywords: *discontinuous function, discontinuous approximation, error estimation, finding of ruptures of function.*

О. Н. Литвин, Ю. И. Першина

Приближение разрывной функции разрывным сплайном в случае, когда узлы сплайна не сходятся с разрывами функции.

Построены и исследованы разрывные аппроксимационные сплайны для приближения разрывных функций. Разработан алгоритм поиска разрывов функции одной переменной с помощью приближения ее построенным разрывным аппроксимационным сплайном. Также разработан алгоритм оптимального определения узлов приближающего разрывного сплайна. Приведены примеры.

Ключевые слова: *разрывная функция, разрывная аппроксимация, оценка погрешности, нахождение разрывов функции.*

Українська інженерно-педагогічна академія, Харків
yulia_pershina@mail.ru

Получено 26.03.12