УДК 517.925.3

©2012. **Р. И. Гладилина**

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В статье исследуется проблема о неустойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях. С помощью второго метода Ляпунова получены новые условия неустойчивости по части переменных нулевого решения импульсной системы с менее жесткими требованиями к функциям Ляпунова.

Ключевые слова: *импульсные системы, функции Ляпунова, частичная устойчивость.*

1. Введение. Проблема устойчивости импульсных систем относительно части переменных рассматривалась в [1-9]. Исследование устойчивости проводилось прямым методом Ляпунова. Поскольку устойчивость движений желательна во многих прикладных задачах, то важно иметь в распоряжении эффективные способы обнаружения неустойчивости. Вопросы частичной неустойчивости решений импульсных систем рассматривались в [1, 2, 4, 6].

Предметом исследования в данной работе является установление условий неустойчивости по части переменных, в которых на функции Ляпунова налагались бы менее жесткие требования, чем в опубликованных статьях.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t,x), \quad t \neq \tau_i(x), \\ \Delta x &= I_i(x), \quad t = \tau_i(x), \quad i \in N, \end{aligned} \tag{1}$$

где $t \in R_+,\ x \in \Omega \subset R^n,\ f \in C(R_+ \times \Omega, R^n),\ f(t,0) \equiv 0;\ f(t,x) \in Lip(x)$, $I_i \in C(\Omega, R^n),\ I_i(x) \in Lip,\ I_i(0) \equiv 0$, $\tau_i \in C^1(\Omega, R_+)$, $\tau_i(x)$ – поверхности разрыва, $0 < \tau_1(x) < \tau_2(x) < \ldots$ и $\tau_i(x) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Предположим, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1) существует, непрерывно слева и пересекает каждую гиперповерхность $t = \tau_i(x)$ только один раз. Достаточные условия отсутствия биений решений о поверхности разрыва можно найти, например, в [10, с. 23-25].

Представим вектор x в виде $x = (y, z),\ y \in R^m,\ z \in R^s\ (m+s = n)$. Преположим, что решения системы (1) z-продолжимы [11].

Исследование устойчивости по части переменных проведем в области

$$\Omega_H = B_H^m \times R^s,\ (H > 0),\ B_H^m = \{y \in R^m : \|y\| < H\}.$$

Заметим, что под устойчивостью нулевого решения импульсной системы (1) понимается устойчивость по Ляпунову [11].

Введем вспомогательные кусочно-непрерывные функции $V : R_+ \times B_H \to R$, удовлетворяющие требованиям: функция $V(t,x)$ непрерывна слева и $V(t,0) \equiv 0$ при любом $t \in R_+$. При $t \neq \tau_i(x)$ определим производную от функции $V(t,x)$ в силу системы (1)

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x) + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(t,x), f(t,x) \rangle.$$

В дальнейшем функцию Ляпунова вдоль решения будем обозначать через $v(t) = V(t, x(t,t_0,x_0))$, а моменты попадания решения на поверхности разрыва $t = \tau_i(x)$ – через τ_i.

Функция $a : R_+ \to R_+$ называется функцией класса Хана ($a \in \mathcal{K}$), если $a(r)$ – непрерывная, строго возрастающая и $a(0) = 0$.

3. Основные результаты. В теоремах о неустойчивости прямого метода Ляпунова требуется, чтобы функция Ляпунова и ее производная по времени были знакоопределенными. Однако на практике такие функции не всегда можно построить.

Докажем теорему, в которой производная функции Ляпунова по времени сколь угодно мало отличается от нуля, т.е. практически близка к знакопостоянной функции.

Теорема 1. *Пусть для системы уравнений (1) существует ограниченная в области $R_+ \times \Omega_h$, $0 < h < H$ функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условию*

$$V(t,x) \leq b(\|x\|), \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega_h, \quad b \in \mathcal{K} \tag{2}$$

и условиям A:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 1/k \; c(\|x\|) \quad \text{для} \;\; t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \;\; (k \in N), \;\; c \in \mathcal{K}, \tag{3}$$

$$\Delta V_k = V(\tau_k + 0, x + I_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0 \quad (k \in N), \tag{4}$$

$$\inf_{k \in N} (\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in \Omega_h), \tag{5}$$

или условиям B:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 0 \quad \text{для} \;\; t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)], \;\; (k \in N), \tag{6}$$

$$\Delta V_k \geq 1/k \; c(\|x\|) \quad (k \in N) \quad c \in \mathcal{K}, \tag{7}$$

причем для любого $t \geq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x, для которых $V(t,x) > 0$. Тогда нулевое решение системы (1) y-неустойчиво.

Доказательство. Пусть $\alpha > 0$ – сколь угодно мало. По условию в окрестности $\|x\| < \alpha$ найдется такая точка x_0, что $V(t_0,x_0) > 0$. Обозначим $V(t_0,x_0) = V_0$. Докажем, что траектория $x(t)$, выходящая из выбранной таким образом точки x_0, с течением времени выйдет за пределы области Ω_h.

В силу условий (3), (4) или (6), (7) функция $v(t)$ – неубывающая, следовательно, $v(t) \geq v(t_0) = V_0 > 0$ при всех $t > t_0$. Из неравенства (2) получим

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \geq b^{-1}(V_0) \;\; \text{при} \; t \geq t_0. \tag{8}$$

По условию, функция $V(t,x)$ ограничена:

$$V(t,x) \le M \quad (M > 0) \quad \text{для} \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega_h. \tag{9}$$

Если выполнены условия A, то, учитывая (8), получим

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \ge 1/k\ c(b^{-1}(V_0)).$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль траектории, используя условие (9)

$$M \ge v(\tau_k) \ge v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t)dt \ge V_0 + \sum_{i=1}^{k} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t)dt \ge$$

$$\ge V_0 + c(b^{-1}(V_0)) \sum_{i=1}^{k} 1/i(\tau_i - \tau_{i-1}) \ge V_0 + c(b^{-1}(V_0))\theta \sum_{i=1}^{k} 1/i.$$

Так как гармонический ряд $\sum_{i=1}^{\infty} 1/i$ расходится, то найдется такое κ, что правая часть неравенства будет больше заданного числа M. Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t,t_0,x_0)$ покидает область Ω_h за конечное время и, в силу условия z-продолжимости решения, $x(t,t_0,x_0)$ выходит за пределы множества $\|y\| < h$.

Если имеют место условия B, то из неравенства (7) получим

$$v(\tau_k + 0) - v(\tau_k) \ge 1/k\ c(b^{-1}(V_0)) \ \ (k \in N).$$

Откуда

$$v(\tau_k + 0) \ge v(\tau_k) + 1/k\ c(b^{-1}(V_0)) \ \ (k \in N). \tag{10}$$

Из условия (6) имеем

$$v(\tau_k) \ge v(\tau_{k-1} + 0) \ \ (k \in N). \tag{11}$$

Используя неравенства (10), (11), получим

$$v(\tau_k + 0) \ge v(\tau_{k-1} + 0) + 1/k\ c(b^{-1}(V_0)) \ \ (k \in N).$$

Применяя полученную итерационную формулу, для любого натурального k получим следующую цепочку неравенств:

$$M \ge v(\tau_k + 0) \ge v(\tau_{k-1} + 0) + 1/k\ c(b^{-1}(V_0)) \ge$$

$$\ge v(\tau_{k-2} + 0) + c(b^{-1}(V_0))(1/k + 1/(k-1)) \ge \cdots \ge$$

$$\ge v(t_0) + c(b^{-1}(V_0))((1/k + 1/(k-1)) + \cdots + 1/2 + 1).$$

В силу ограниченности функции $V(t,x)$ заключаем, что решение $x(t,t_0,x_0)$ покидает область Ω_h и выходит за пределы множества $\|y\| < h$. Теорема доказана. □

В следующей теореме отпадает необходимость требовать ограниченность функции V в области Ω_h, так как это условие становится следствием существования бесконечно малого высшего предела функции по y.

Теорема 2. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, удовлетворяющая условию*

$$V(t,x) \le b(\|y\|), \quad (t,x) \in R_+ \times \Omega_h, \quad b \in \mathcal{K}$$

и условиям A:

$$\dot V_{(1)}(t,x) \ge 1/k\ c(\|y\|) \quad \textit{для} \ \ t \in (\tau_{k-1}(x);\tau_k(x)], \ (k \in N), \ c \in \mathcal{K},$$

$$\Delta V_k \ge 0 \quad (k \in N),$$

$$\inf_{k\in N}(\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in \Omega_h),$$

или условиям B:

$$\dot V_{(1)}(t,x) \ge 0 \quad \textit{для} \ \ t \in (\tau_{k-1}(x);\tau_k(x)], \ (k \in N),$$

$$\Delta V_k \ge 1/k\ c(\|y\|) \quad (k \in N) \quad c \in \mathcal{K},$$

причем для любого $t \ge 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x, для которых $V(t,x) > 0$. Тогда нулевое решение системы (1) y-неустойчиво.

Доказательство теоремы аналогично доказательсту предыдущей теоремы.

Пример 1. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений относительно переменных y_1, y_2.

$$\dot y_1 = 1/k y_1^3 + y_2 z^2, \qquad \Delta y_1 = -y_1 + y_2;$$

$$\dot y_2 = 1/k y_2^3 - y_1 z^2, \qquad \Delta y_2 = -y_2 + y_1;$$

$$\dot z = y_1^2 y_2, \qquad \Delta z = -z + y_1^2.$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = 1/2(y_1^2 + y_2^2)$.

Нетрудно проверить, что выполнены все условия A теоремы 2, а именно:

$$\dot V = y_1\dot y_1 + y_2\dot y_2 = 1/k y_1^4 + y_1 y_2 z^2 + 1/k y_2^4 - y_1 y_2 z^2 = 1/k(y_1^4 + y_2^4).$$

$$\Delta V_k = y_2^2 + y_1^2 - y_1^2 - y_2^2 \equiv 0.$$

Таким образом, нулевое решение системы y-неустойчиво.

Заметим, что для установления неустойчивости решения достаточно потребовать ограниченность функции Ляпунова не во всей области Ω_h, а только в некоторой ее части.

Обозначим $\Pi = (t,x) \in R_+ \times \Omega_h : \ V(t,x) > 0$ – множество точек, в которых функция Ляпунова положительна.

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, ограниченная в области П, существующей при всяком $t \geq 0$ и произвольных сколь угодно малых $\|x\|$, и пусть эта функция удовлетворяет*

условиям А:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 1/k\ \varphi(V(t,x)) \quad \textit{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)],\ (k \in N), \tag{12}$$

$$\Delta V_k \geq 0 \quad (k \in N), \tag{13}$$

$$\inf_{k \in N}(\tau_k(x) - \tau_{k-1}(x)) = \theta > 0, \quad (x \in \Omega_h), \tag{14}$$

или условиям В:

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 0 \quad \textit{для} \quad t \in (\tau_{k-1}(x); \tau_k(x)],\ (k \in N), \tag{15}$$

$$\Delta V_k \geq 1/k\ \varphi(V(\tau_k, x)) \quad (k \in N), \tag{16}$$

где функция $\varphi:\ R_+ \to R_+$ непрерывна, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(s) > 0$ при $s > 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) у-неустойчиво.

Доказательство. Согласно условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0) > 0$. Докажем, что решение $x(t)$, выходящее из точки x_0, со временем выйдет за пределы области П.

В силу условий А или В функция $v(t)$ будет неубывающей в области Ω_h, поэтому $v(t) \geq v(t_0) > 0$ при всех $t \geq t_0$. Это означает, что точки $(t, x(t)) \in \Pi$ при всех $t \geq t_0$. Следовательно, при всех $t \geq t_0$ значения функции $V(t,x)$ будут ограничены:

$$V(t,x) \leq M \quad (M = const > 0). \tag{17}$$

Пусть

$$c = \inf_{V_0 \leq s \leq a_0} \varphi(s), \text{ где } a_0 = \sup_{(t,x) \in \Pi} V(t,x). \tag{18}$$

Очевидно, что $c > 0$.

Допустим, что выполнены условия А. Учитывая последнее неравенство, получим

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) \geq 1/k\ \varphi(V(t,x)) \geq c/k.$$

Проинтегрируем это неравенство вдоль решения с учетом неравенств (13), (14), (17)

$$M \geq v(\tau_k) \geq v(t_0) + \int_{t_0}^{\tau_k} v'(t)dt \geq V_0 + \sum_{i=1}^{k} \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} v'(t)dt \geq$$

$$\geq V_0 + c\sum_{i=1}^{k} 1/i(\tau_i - \tau_{i-1}) \geq V_0 + c\theta \sum_{i=1}^{k} 1/i. \tag{19}$$

При больших к правая часть неравенства будет больше заданного числа M.

Пусть имеют место условия B. Из неравенства (15) получим

$$v(\tau_{k-1}+0) - v(\tau_k) \le 0 \quad (k \in N),$$

а условие (16) с учетом (18) примет вид

$$v(\tau_k+0) - v(\tau_k) \ge c/k \quad (k \in N).$$

Тогда получим

$$M \ge v(\tau_k+0) \ge v(\tau_k+0) + \Sigma_{i=1}^{k}(v(\tau_{i-1}+0) - v(\tau_i)) \ge$$

$$\ge v(t_0) + \Sigma_{i=1}^{k}(v(\tau_i+0) - v(\tau_i)) \ge V_0 + c\sum_{i=1}^{k} 1/i. \qquad (20)$$

Из неравенств (19), (20) вытекает, что решение $x(t,t_0,x_0)$ оставляет область П за конечное время и, в силу условия z-продолжимости решения, выходит за пределы множества $\|y\| < h$, что завершает доказательство теоремы. □

Таким образом, нулевое решение системы y-неустойчиво.

В сформулированных теоремах производная (скачки) функции $V(t,x)$ могут быть сколь угодно малыми, но остаются положительными. Покажем, что можно еще ослабить условия. Для установления неустойчивости решения достаточно, чтобы производная (скачки) функции $V(t,x)$ были неотрицательны. Докажем теорему о неустойчивости со знакопостоянной производной (скачками) функции Ляпунова.

Теорема 4. *Пусть для системы уравнений (1) существует функция $V(t,x)$, ограниченная в области П, существующей при всяком $t \ge 0$ и произвольных сколь угодно малых $\|x\|$. Если эта функция удовлетворяет условиям (2), (4), (6) и, при этом вдоль решений выполнено хотя бы одно из условий:*

A: для любого натурального p существует $s > p$ $(s \in N)$ такое, что

$$\Delta V_s \ge c(\|x\|, \quad c \in \mathcal{K}; \qquad (21)$$

B: существует $\eta > 0$ такое, что для любого $T > 0$ найдется $t_* > T$ такое, что

$$\dot V_{(1)}(t,x) \ge c(\|x\|) \quad \text{при } t \in [t_*, t_* + \Delta t], \text{ где } \Delta t \ge \eta > 0, \quad c \in \mathcal{K}, \qquad (22)$$

то тривиальное решение системы (1) y-неустойчиво.

Доказательство. По условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0,x_0) > 0$. Покажем, что решение $x(t,t_0,x_0)$ со временем выйдет за пределы области П.

В силу условий теоремы функция $v(t)$ будет неубывающей в области Ω_h, поэтому $v(t) \ge v(t_0) > 0$ при всех $t \ge t_0$. Это означает, что точки $(t, x(t)) \in$ П при всех $t \ge t_0$. Следовательно, при всех $t \ge t_0$ значения функции $V(t,x)$ будут ограничены. Из неравенства (2) следует оценка (8).

Пусть выполнено условие (A) теоремы. Тогда существует подпоследовательность $\{\Delta V_{k_s}\}$, которую мы в дальнейшем будем обозначать $\{\Delta V_s\}$, такая, что $\Delta V_s \geq c(\|x\|)$ $(s \in N)$.

Для этой подпоследовательности, подобно доказательству теоремы 1, получим

$$M \geq v(\tau_s + 0) \geq v(\tau_{s-1} + 0) + c(b^{-1}(V_0)) \geq$$

$$\geq v(\tau_{s-2} + 0) + 2c(b^{-1}(V_0)) \geq \cdots \geq$$

$$\geq v(t_0) + sc(b^{-1}(V_0)).$$

Правая часть последнего неравенства становится неограниченной при больших s, значит нулевое решение системы (1) покинет множество Π за конечное время.

Пусть выполнено условие (B). Положим $T = t_0$. По условию теоремы существует такое $t_1 > T$, что на $[t_1, t_1 + \eta]$ выполняется условие (22). Полагая $T = t_1$, найдем интервал $[t_2, t_2 + \eta]$, на котором производная функции $V(t, x)$ по времени также будет положительной. Продолжая процесс, получим последовательность интервалов $[t_s, t_s + \eta]$, в каждом из которых имеет место неравенство (22). Интегрируя это неравенство вдоль решения в пределах от t_0 до $t_s + \eta$, аналогично теореме 1 получим

$$M \geq v(t_s + \eta) \geq v(t_0) + \int_{t_0}^{t_s+\eta} v'(t)dt \geq v(t_0) + \sum_{i=1}^{s} \int_{t_i}^{t_i+\eta} v'(t)dt \geq$$

$$\geq V_0 + sc(b^{-1}(V_0))\eta.$$

Правая часть полученного неравенства при больших s становится больше заданного числа M. Полученное противоречие доказывает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область Π за конечное время и выходит за пределы множества $\|y\| < h$. Следовательно, решение системы (1) – неустойчиво. $\square$

Замечание. Подобным образом можно обобщить теорему 2, получить условия неустойчивости со знакопостоянной производной (скачками) функции Ляпунова.

Пример 2. Исследуем устойчивость нулевого решения системы уравнений относительно переменных y_1, y_2.

$$\dot{y}_1 = y_1^3 \sin^2 t + y_2(z - y_1)^3, \quad \Delta y_1 = -y_1 - \sqrt{y_2^2 + \tau_i(x)};$$

$$\dot{y}_2 = y_2^3 \sin^2 t - y_1(z - y_1)^3, \quad \Delta y_2 = -y_2 - y_1;$$

$$\dot{z} = y_1^2 z e^t + y_2^3, \qquad \Delta z = y_1^2 + y_2^2 + z^2,$$

$$\tau_i(x) = (y_1 + y_2)^2 \sin^2 \frac{\pi}{2} i, \ i \in N.$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V = y_1^2 + y_2^2$.

Найдем производную и скачки функции $V(t, x)$:

$$\dot{V} = 2y_1\dot{y}_1 + 2y_2\dot{y}_2 = 2(y_1^4 + y_2^4)\sin^2 t \geq 0.$$

$$\Delta V_i = (y_1 + \Delta y_1)^2 + (y_2 + \Delta y_2)^2 - (y_1^2 + y_2^2) = (y_1^2 + y_2^2)\sin^2\frac{\pi}{2}i \geq 0,$$

причем $\Delta V_k = 0$ при $k = 2i,\ i \in N$ и $\Delta V_k = (y_1^2 + y_2^2) > 0$ при $k = 2i+1,\ i \in N$. Выполнены условия A предыдущей теоремы, следовательно, нулевое решение системы y-неустойчиво.

Производная $\dot V = 0$ при $\sin t = 0,\ t = \pi k,\ k = 0, 1, 2 \ldots$. Возьмем произвольное $\epsilon \in (0, 1)$. Тогда $|\sin t| > \epsilon$ при $t \in (\arcsin\epsilon + \pi k, \pi - \arcsin\epsilon + \pi k)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. На этих интервалах производная положительна:

$$\dot V \geq 2\epsilon^2(y_1^4 + y_2^4) > 0.$$

Выполнены условия B предыдущей теоремы, поэтому нулевое решение системы y-неустойчиво.

Следующая теорема дает достаточные условия неустойчивости решения независимо от знака производной функции $V(t, x)$, то есть производная может быть отрицательной, и соответсвующая система дифференциальных уравнений без импульсных воздействий может быть устойчивой и даже асимптотически устойчивой.

Теорема 5. *Пусть для системы уравнений (1) существует ограниченная в области $R_+ \times \Omega_h$ функция $V(t, x)$, удовлетворяющая условию*

$$v(\tau_{k+1} + 0) - v(\tau_k + 0) \geq c(v(\tau_k + 0)), \quad (k \in N), \quad c \in \mathcal{K}, \tag{23}$$

причем для любого $t \geq 0$ в сколь угодно малой окрестности начала координат существуют точки x, для которых $V(t, x) > 0$. Тогда нулевое решение системы (1) y-неустойчиво.

Доказательство. Согласно условию теоремы в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует точка x_0 такая, что $V(t_0, x_0) > 0$. Докажем, что решение $x(t, t_0, x_0)$ с течением времени выйдет за пределы области Ω_h.

Предположим противное, что $x(t, t_0, x_0) \in \Omega_h$ при всех $t > t_0$.

Согласно условию теоремы, функция $V(t, x)$ ограничена в области $R_+ \times \Omega_h$, Поэтому существует такое положительное число $M > 0$, что при всех $t > t_0$ выполняется неравенство $v(t) \leq M$. Учитывая это неравенство и условие (23), получим

$$M \geq v(\tau_{k+1} + 0) \geq v(\tau_k + 0) + c(v(\tau_k + 0)) \geq v(\tau_{k-1} + 0) + 2c(v(\tau_{k-1} + 0)) \geq$$

$$\geq \cdots \geq v(\tau_1 + 0) + kc(v(\tau_1 + 0)) \quad (k \in N).$$

Получили противоречие, так как правая часть последнего неравенства становится неограниченной при больших k. Это означает, что решение $x(t, t_0, x_0)$ покидает область Ω_h за конечное время, и, в силу условия z-продолжимости решения, $x(t, t_0, x_0)$ выходит за пределы множества $\|y\| < h$.

Теорема доказана. □

1. *Simeonov P.S., Bainov D.D.* Stability with respect to part of the variables in systems with impulse effect // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1987. – **124**. – P. 547-560.

2. *Гладилина Р.И.* Об устойчивости по части переменных в системах с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. – 2003. – **8**. – С. 7-18.
3. *Гладіліна Р.І.* Метод функцій Ляпунова в задачах стійкості за частиною змінних для імпульсних систем // Вісн. Київ. ун-ту. Кібернетика. – 2004. – Вип. 5. – С. 4-7.
4. *Гладилина Р.И.* Прямой метод Ляпунова в задачах об устойчивости по части переменных для систем с импульсным воздействием // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – **9**. – С. 46-52.
5. *Гладилина Р.И., Игнатьев А.О.* О сохранении устойчивости импульсных систем с возмущениями // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 8. – С. 78-85.
6. *Gladilina R.I.* Partial instability of impulsive systems // Second International Conference "Nonlinear Dynamics – 2007". Proceedings. – Kharkov: NTU "Kharkov Polytechnical Institute". – 2007. – P. 67-72.
7. *Гладилина Р.И., Игнатьев А.О.* О необходимых и достаточных условиях устойчивости инвариантных множеств нелинейных импульсных систем // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 2. – С. 132-142.
8. *Гладилина Р.И.* Необходимые условия частичной устойчивости импульсных систем // Динамические системы: Межвед. научн. сборник. ТНУ, 2011. – **29**. – С. 21-42.
9. *Гладилина Р.И.* Необходимые условия асимптотической устойчивости систем дифференциальных уравнений с ипульсными воздействиями на поверхностях // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 1. – С. 31-41.
10. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
11. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

R. I. Gladilina

On instability with respect to part of the variables of impulsive systems.

The instability problem of the trivial solution of the systems of differential equations with unfixed times of impulse effect was studied by means of Lyapunov functions. The new conditions of instability were obtained.

Keywords: *Lyapunov's functions, stability, impulsive system.*

Р. І. Гладіліна

Нестійкість імпульсних систем за частиною змінних.

За допомогою другого методу Ляпунова встановлено нові достатні умови нестійкості за частиною змінних тривіального розв'язку системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях, в яких послаблено вимоги до функцій Ляпунова.

Ключові слова: *імпульсні системи, функції Ляпунова, стійкість за частиною змінних.*

Донецкий национальный технический ун-т
`Gladilina@yandex.ru`

Получено 19.05.12