УДК 517.5

©2011. **Н. В. Фещенко**

АНАЛОГИ ПРОБЛЕМЫ ЗАЛЬЦМАНА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

В работе рассматривается аналог проблемы Зальцмана для n-мерного симплекса. Полностью разобран случай, когда функция имеет нулевой интеграл по всем симплексам, которые касаются данного внутренним образом. С помощью доказанного результата доказана теорема о полноте некоторой системы функций в L_p, получен новый результат о гомеоморфизмах с N-свойством Лузина.

Ключевые слова: *Проблема Зальцмана, функции, интегрируемые по Лебегу, линейный функционал, теорема Хана-Банаха, теорема Рисса, гомеоморфизмы.*

1. Введение. В данной работе рассматриваются аналоги и приложения следующей проблемы, поставленной Л. Зальцманом, которая в свою очередь является актуальной в современной интегральной геометрии.

Пусть S – замкнутый единичный квадрат, ∂S – его граница и $S^0 = S \backslash \partial S$. Обозначим через $S\,(z)$ наибольший замкнутый квадрат в S с центром в точке z из S^0. Для каждого $z \in S^0$ пусть $S_\alpha(z)$ – квадрат, гомотетичный $S\,(z)$ с центром гомотетии z и линейным коэффициентом α, где $0 < \alpha \leq 1$. Верно ли, что $f \equiv 0$, если f – непрерывная функция на S такая, что интеграл от f над $S_\alpha(z)$ равняется нулю для всех z из S^0?

Зальцман показал, что ответ на этот вопрос утвердительный, в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = 1/3$. Berenstein в обзорной работе [1] о проблеме Помпейю интересовался случаем $\alpha = 1/2$, но не разобрал его. Thompson и Schonbek [2] ответили на этот вопрос положительным ответом для всех $\alpha = \frac{n}{n+2}$, где n – положительное целое число и, в частности, для $\alpha = 1/3$ и $\alpha = 1/2$. Позднее Thompson [3] обобщил этот результат для всех $\alpha \in \left[\frac{3}{4};\ 1\right)$.

В работе [5] автором был изучен аналог проблемы Зальцмана для правильного треугольника на плоскости и правильного тетраэдра в пространстве. Доказан аналог результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$ в обоих случаях, а также некоторый аналог теоремы Томпсона и Шонбека для дискретного множества параметров α в случае правильного треугольника.

В данной работе изучается аналог проблемы Зальцмана для симплекса в n-мерном пространстве. Доказан аналог результата Зальцмана для квадрата при $\alpha = 1$, который обобщает результаты для треугольника и тетраэдра из [5]. Кроме того, рассматриваются приложения полученных результатов в теории приближений и теории отображений с сохранением меры.

2. Аналог проблемы Зальцмана в для n-мерного симплекса. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$. Выберем в нем набор из $n+1$ точек $A_0, A_1, \ldots, A_n$,

Автор выражает благодарность Волчкову В.В. за постановку проблемы и внимание к работе.

не лежащих в одной $n-1$-мерной гиперплоскости. Замкнутая выпуклая оболочка этих точек называется n-мерным симплексом (или просто симплексом) с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

Введем некоторые определения, связанные с симплексами. Пусть T – это некоторый фиксированный n-мерный симплекс с вершинами $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Центром симплекса T будем называть его центр масс, то есть точку

$$C := \frac{A_0 + A_1 + \ldots + A_n}{n+1}.$$

Гранью симплекса, противолежащей вершине A_j, будем называть выпуклую оболочку G_j всех остальных вершин. Это будет $n-1$-мерный симплекс, лежащий в гиперплоскости, порожденной вершинами $A_0, \ldots, A_j, A_{j+1}, \ldots, A_n$.

Пусть C – это центр симплекса и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Обозначим через ${}^{\alpha}T$ симплекс с вершинами $B_j := C + \alpha(A_j - C),\ j \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Фактически этот симплекс получается из T гомотетией с центром в C с коэффициентом α. Будем называть симплекс $\widetilde{T}$ похожим на T, если $\widetilde{T} = B + {}^{\alpha}T$ для некоторой точки $B \in \mathbb{R}^n$ и некоторого $\alpha > 0$.

Пусть T – некоторый фиксированный n-мерный симплекс, ∂T – его граница и $\mathrm{int}(T) := T \setminus \partial T$ – его внутренность. Для точки $A \in \mathrm{int}(T)$ обозначим через $T(A)$ наибольший замкнутый симплекс с центром в точке A, лежащий в T и похожий на T.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L(T)$ *и*

$$\int\limits_{T(A)} f(x)dx = 0, \quad A \in \mathrm{int}(T). \tag{1}$$

Тогда $f = 0$.

Доказательство. Пусть T^j – симплекс с вершинами $A_0, \ldots, A_{j-1}, C, A_j, \ldots, A_n$. Очевидно, что $T = T^0 \cup T^1 \cup \ldots \cup T^n$. Поэтому достаточно доказать, что $f = 0$ на каждом из симплексов T^j. Рассмотрим для определенности симплекс T^0. Для остальных симплексов T^j доказательство будет аналогичным. Обозначим $\overrightarrow{v_j} := A_j - A_0$. Введем следующее обозначение

$$P^0 := P(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}) := \{t_1\overrightarrow{v_1} + t_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + t_n\overrightarrow{v_n} : 0 \le t_1, t_2, \ldots, t_n \le 1\}.$$

То есть, P^0 – это n-мерный параллелепипед, натянутый на вектора $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 пусть* $A \in \mathrm{int}(T^0)$ *и* $\alpha > 0$ *такое, что параллелепипед* $P := A + \alpha P^0$ *целиком лежит в* $\mathrm{int}(T^0)$. *Тогда* $\int_P f(x)dx = 0$.

Доказательство леммы 1. Для произвольного множества

$$S \subseteq I_n := \{1, 2, \ldots, n\}$$

обозначим

$$A_S := A + \alpha \sum_{j\in S} \overrightarrow{v_j}.$$

Ясно, что множество точек $\{A_S\}_{S\subset I_n}$ составляет множество всех вершин параллелепипеда P. Далее обозначим через T_S симплекс, похожий на T, одной из вершин которого является A_S, а остальные n вершин лежат в грани G_0. Ясно, что для каждой точки A_S такой симплекс единственный, и он имеет вид $T(C_S)$ для некоторой точки $C_S \in \mathrm{int}(T^0)$. Поэтому по условию теоремы 1

$$\int\limits_{T_S} f(x)dx = 0.$$

Обозначим для удобства $T_j := T_{\{j\}}$ и $T_0 := T_\varnothing$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\bigcap_{j\in S} T_j = T_S, \quad S \subset I_n,$$

где по определению $\bigcap_{j\in\varnothing} T_j := T_0$ и

$$P = T_0 \setminus \bigcup_{j=1}^{n} T_j.$$

Поэтому по формуле включений-исключений в интегральной форме имеем

$$\int\limits_P f(x)dx = \int\limits_{T_0\setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} T_j} f(x)dx$$

$$= \sum_{S\subset I_n} (-1)^{|S|} \int\limits_{\bigcap\limits_{j\in S} T_j} f(x)dx = \sum_{S\subset I_n} (-1)^{|S|} \int\limits_{T_S} f(x)dx = 0$$

в силу (1). Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы.

Пусть $A \in \mathrm{int}(T^0)$ и U – некоторая окрестность точки A, целиком лежащая в $\mathrm{int}(T^0)$. Пусть $R := [0, a_1] \times [0, a_2] \times \ldots \times [0, a_n]$ – произвольный прямоугольный параллелепипед, некоторый сдвиг которого целиком лежит в U. Рассмотрим функцию

$$F(x) := \int\limits_{x+R} f(u)du = \int\limits_R f(x+u)du,$$

при тех значениях x, для которых $x + R \subset U$. Так как некоторый сдвиг R целиком лежит в U, то функция F определена на некотором непустом открытом множестве. По свойствам интеграла Лебега функция F непрерывна.

Пусть точка $B \in \mathrm{int}(T^0)$ такая, что $Q := B + R \subset U$. Тогда при достаточно малых $\alpha > 0$ выполнено включение $P_\alpha + R \subset U$, где $P_\alpha := B + \alpha P^0$. Значит, по теореме Фубини и лемме 1 имеем

$$\int\limits_{P_\alpha} F(x)dx = \int\limits_{P_\alpha} dx \int\limits_R f(x+u)du$$

$$= \int\limits_R du \int\limits_{P_\alpha} f(x+u)dx = \int\limits_R du \int\limits_{u+B+\alpha P^0} f(x)dx = 0 \quad (2)$$

в силу (1).

Так как F – непрерывная функция, то по теореме о среднем для любого рассматриваемого α найдется точка $B_\alpha \in P_\alpha$ такая, что

$$\int\limits_{P_\alpha} F(x)dx = F(B_\alpha)\mu(P_\alpha),$$

где $\mu(\Omega)$ – это n-мерная мера Лебега множества Ω.

Откуда в силу (2) следует, что $F(B_\alpha) = 0$. Так как $\mathrm{diam} P_\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$ и $B \in P_\alpha$ при всех α, то $B_\alpha \to B$ при $\alpha \to 0$. Поэтому

$$F(B) = \lim_{\alpha \to 0} F(B_\alpha) = 0.$$

Таким образом, доказано, что

$$\int\limits_Q f(u)du = 0$$

для любого прямоугольного параллелепипеда Q со сторонами, параллельными осям координат, лежащего в U.

Отсюда из общих свойств меры и интеграла Лебега следует, что $f = 0$ п.в. в U. А так как A – произвольная точка из $\mathrm{int}(T^0)$, то $f = 0$ п.в. в T^0. С учетом замечаний в начале доказательства получаем, что теорема доказана. □

3. Полнота некоторой системы функций в L_p.

Теорема 2. *Система функций* $\{\chi_{T(A)}\}_{A \in \mathrm{int}(T)}$, *где*

$$\chi_{T(A)}(w) = \begin{cases} 1, & w \in T(A), \\ 0, & w \notin T(A), \end{cases}$$

является замкнутой в $L_p(T)$ *при* $1 \le p < \infty$.

Доказательство. По следствию из теоремы Хана-Банаха утверждение теоремы 2 эквивалентно следующему: для любой функции φ, линейной и непрерывной на $L_p(T)$, из условия $\langle \varphi, \chi_{T(A)} \rangle = 0,\ A \in \mathrm{int}(T)$, следует, что $\varphi = 0$.

По теореме Рисса об общем виде линейного функционала

$$\langle \varphi, g\rangle = \int\limits_T g(x)h(x)dx,$$

где $h \in L^q(T)$, $\quad 1/p + 1/q = 1, \quad 1 \le p < \infty, \quad 1 < q \le \infty.$

Так как

$$0 = \left\langle \varphi, \chi_{T(A)}\right\rangle = \int\limits_T \chi_{T(A)}(x)h(x)dx = \int\limits_{T(A)} h(x)dx,$$

то

$$\int\limits_{T(A)} h(x)dx = 0, \quad A \in T.$$

Поскольку $h \in L^q(T) \subset L^1(T)$, то из теоремы 1 следует, что $h = 0$. Поэтому $\varphi = 0$. $\square$

4. О гомеоморфизмах с N-свойством Лузина.

Теорема 3. *Пусть $f : T \to \mathbb{R}^n$ гомеоморфизм с N-свойством Лузина и*

$$\mu(f(T(A))) = \mu(T(A)),\ A \in \mathrm{int}(T),$$

где μ – мера Лебега в $\mathbb{R}^n$.

Тогда $\mu(f(E)) = \mu(E)$ для любого измеримого множества $E \subseteq T$.

Доказательство. Рассмотрим функцию множеств $\nu(E) := \mu(f(E))$. Так как f – гомеоморфизм, то f – инъективное отображение. Поэтому ν является мерой. По N-свойству [4, с. 231] мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ. Значит, по теореме Радона-Никодима найдется такая функция $w \in L(T)$, что для любого измеримого множества E

$$\mu(f(E)) = \int\limits_E w(x)dx.$$

Так как $\mu(E) = \int_E 1\ dx$, то по условию теоремы

$$0 = \mu(f(T(A))) - \mu(T(A)) = \int\limits_{T(A)} (w(x) - 1)dx, \quad A \in T.$$

Из теоремы 1 теперь следует, что $w(x) = 1$ п.в. на E относительно μ. Поэтому $\mu(f(E)) = \mu(E)$ для любого измеримого множества $E \subseteq T$. $\square$

1. *Berenstein C. A.* El problema de Pompeiu // Atas do Novo Coloquio Brasileiro de Matematica, Pocos de Caldas. – 1973. – Vol. 1 – P. 31-37.
2. *Thompson K. W. and Schonbek T.* A Problem of Pompeiu Type // American Mathematical Monthly. – 1980. – No. 87. – P. 32-36.

3. *Thompson K. W.* Additional results of Zalcman's Pompeiu problem // Aequationes Mathematicae. – 1992. – No. 44. – P. 42-47.
4. *Натансон И. П.* Теория функций действительного переменного. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
5. *Фещенко Н. В.* Аналоги проблемы Зальцмана и их применение // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – Т. 20. – С. 177-187.

N. V. Feschenko

Analogues of Zalcman's problem in n-dimensional space and their applications.

We consider an analogue of Zalcman's problem for n-dimensional simplex. The case, when function has zero integral over all simplexes, which is tangent to given one by inner way, is fully analyzed. By means of proved result theorem on completeness of some system of functions in L_p are proved, some result on homeomorphisms with Lusin's N-property is obtained.

Keywords: *Zalcman's problem, Lebesgue integrable functions, linear functional, Hahn-Banach theorem, Riesz theorem, homeomorphisms.*

Н. В. Фещенко

Аналоги проблеми Зальцмана в n-вимірному просторі та їх застосування.

У роботі розглядається аналог проблеми Зальцмана для n-вимірного симплекса. Повністю розібрано випадок, коли функція має нульовий інтеграл по всіх симплексах, що дотикаються даного внутрішнім чином. За допомогою доведеного результату доведено теорему про повноту деякої системи функцій в L_p, здобуто новий результат про гомеоморфізми з N-властивістю Лузіна.

Ключові слова: *Проблема Зальцмана, функції, інтегровані за Лебегом, лінійний функціонал, теорема Хана-Банаха, теорема Рісса, гомеоморфізми.*

Донецкий национальный ун-т
`natalyafeschenko@mail.ru`

Получено 24.11.11