УДК 517.5

©2011. **О. А. Очаковская**

ПЛОТНОСТИ УПАКОВОК НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Рассмотрены некоторые примеры функций с нулевыми интегралами по всем гиперболическим кругам одного фиксированного радиуса. Получены новые оценки плотностей укладок гиперболических кругов.

Ключевые слова: *шаровые средние, плотность укладки.*

1. Введение. По поводу используемых ниже понятий и фактов, связанных с гиперболической плоскостью, см. [1].

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость. Для множества $A \subset \mathbb{C}$ символами ∂A и $\bar{A}$ обозначаются, соответственно, граница и замыкание A.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ действует транзитивно на $\mathbb{D}$ посредством конформных отображений (см., например, [2, гл. 2, §2.4]). Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре гиперболической плоскости, реализованной в виде круга $\mathbb{D}$.

Группа $\mathcal{M}(\mathbb{D})$ изоморфна группе $SU(1,1)$, состоящей из матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad \text{где } a, b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1,$$

которая действует на $\mathbb{D}$ посредством отображений

$$gz = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Гиперболическое расстояние d между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ определяется равенством

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \bar{z}_1 z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \bar{z}_1 z_2| - |z_2 - z_1|}, \tag{1}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Расстояние d и гиперболическая мера

$$d\mu(z) = \frac{dxdy}{(1-|z|^2)^2} \tag{2}$$

инвариантны относительно группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$.

Пусть G –измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{D}$. Символом $\mathrm{meas}(G)$ обозначим гиперболическую меру множества G. Всюду в дальнейшем предполагается, что $0 < \mathrm{meas}(G) < +\infty$.

Семейство $\mathcal{K} = (K_1, \ldots, K_s)$ замкнутых подмножеств $\mathbb{D}$ называется *упаковкой* (или *укладкой*) множества G, если

$$\bigcup_{j=1}^{s} K_j \subset G \quad \text{и} \quad \mathrm{meas}(K_i \cap K_j) = 0 \quad \text{для всех } 1 \le i, j \le s,\ i \ne j.$$

Плотность $d(G,\mathcal{K})$ этой упаковки определяется равенством

$$d(G,\mathcal{K})=\frac{1}{\mathrm{meas}(G)}\sum_{j=1}^{s}\mathrm{meas}(K_j). \tag{3}$$

Проблема оценки величины $d(G,\mathcal{K})$ и ее евклидовых аналогов при различных G и $\mathcal{K}$ изучалась многими авторами (см., например, [3]-[5] и библиографию к этим работам). Наиболее часто рассматривался следующий частный случай.

Пусть K – заданное замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, $0<\mathrm{meas}(K)<+\infty$ и пусть M – заданная подгруппа группы $\mathcal{M}(\mathbb{D})$. Обозначим через $m(G,K,M)$ наибольшее количество непересекающихся образов $\lambda_j K\subset G,\ \lambda_j\in M$ (то есть, $\mathrm{meas}(\lambda_j K)\cap(\lambda_i K))=0$ для $\lambda_i\neq\lambda_j K)$. Требуется оценить сверху величину $m(G,K,M)$ или, эквивалентно, плотность $d(G,\mathcal{K})$, где $\mathcal{K}=\{\lambda_j K\}$ является соответствующей упаковкой G. Для этого случая мы будем использовать обозначение $d(G,K,M)$ вместо $d(G,\mathcal{K})$. Очевидно

$$m(G,K,M)\le\Big[\frac{\mathrm{meas}(G)}{\mathrm{meas}(K)}\Big]\quad\text{и}\quad d(G,K,M)\le\frac{\mathrm{meas}(K)}{\mathrm{meas}(G)}\Big[\frac{\mathrm{meas}(G)}{\mathrm{meas}(K)}\Big],$$

где $[t]$ – целая часть числа $t\in\mathbb{R}^1$. Эти оценки называют тривиальными. Один из способов получения нетривиальных оценок для указанных величин предложил Б.Д. Котляр (см. [6], а также [7]). Им было доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Предположим, что существует ненулевая функция $f\in L^\infty(G)$, для которой*

$$\int\limits_{\lambda K} f(z)\,d\mu(z)=0\quad \textit{для всех } \lambda\in M \textit{ таких, что } \lambda K\subset G. \tag{4}$$

Тогда

$$m(G,K,M)\le\left[\frac{1}{\mathrm{meas}(K)}\left(\mathrm{meas}(G)-\frac{1}{\|f\|_{L^\infty(G)}}\int\limits_G f(z)\,d\mu(z)\right)\right]. \tag{5}$$

Таким образом, для получения нетривиальной оценки для $m(G,K,M)$ или $d(G,K,M)$ важно иметь ненулевую функцию f, удовлетворяющую (4). Более того, если запас таких функций окажется достаточно велик, можно надеяться на получение хорошей оценки, если взять в правой части (5) нижнюю грань по всем таким f.

Гиперболическим кругом радиуса $r>0$ с центром $w\in\mathbb{D}$ называется множество

$$K_r(w):=\{z\in\mathbb{D}:d(z,w)\le r\}.$$

В случае, когда K – гиперболический круг, ненулевые функции с условием (4) существуют (см., например, [5]) при любом M.

Для всякой области $\mathcal{O}\subset\mathbb{D}$ символом $V_r(\mathcal{O})$ обозначим множество всех функций $f\in L^{1,loc}(\mathcal{O})$ таких, что

$$\int\limits_{K_r(w)} f(x)\,d\mu(z)=0 \tag{6}$$

для любого гиперболического круга $K_r(w) \subset \mathcal{O}$ (если $\mathcal{O}$ не содержит таких кругов, то полагаем $V_r(\mathcal{O}) = L^{1,loc}(\mathcal{O})$).

Классы $V_r(\mathcal{O})$ и различные их обобщения изучались во многих работах (см., например, [5], [8] и библиографию к этим работам). Известно, что класс $V_r(\mathbb{D}) \cap C(\overline{\mathbb{D}})$ является достаточно широким, однако он не содержит ненулевых функций, быстро стремящихся к нулю при $|z| \to 1$.

В связи с этим изучались точные условия, описывающие допустимую скорость убывания ненулевых функций класса $V_r(\mathcal{O})$ вблизи $\Lambda = \partial\mathcal{O} \cap \partial\mathbb{D}$. Однако, несмотря на активную работу в этой области, полученных точных результатов относительно немного (см. обзор в работе [8]).

В данной работе строятся новые примеры функций класса $V_r(\mathbb{D})$ (см. теорему 2 ниже). Это позволило получить нетривиальную оценку сверху для плотностей упаковок шаров с радиусами, связанными с нулями некоторой целой функции(см. теорему 3).

2. Вспомогательные сведения. Разложение Ивасавы группы $SU(1,1)$ имеет вид $SU(1,1) = \mathcal{N}\mathcal{A}\mathcal{K}$, где

$$\mathcal{N} = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1+is & -is \\ is & 1-is \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}^1 \right\}, \quad \mathcal{A} = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}^1 \right\},$$

и $\mathcal{K} = SO(2)$ – группа поворотов. Орбитами группы $\mathcal{N}$ являются орициклы, касающиеся $\partial\mathbb{D}$ в точке $z = 1$. Орбитами группы $\mathcal{A}$ являются дуги окружностей, проходящих через точки -1 и 1, содержащиеся в круге $\mathbb{D}$. Из определений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$ видно, что

$$a_{t+\tau} = a_t a_\tau \quad \text{и} \quad n_s a_t = a_t n_{se^{-2t}} \tag{7}$$

для любых $t, \tau, s \in \mathbb{R}^1$. Кроме того, из (1) получаем

$$d(0, a_t 0) = d(0, tht) = t \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R}^1. \tag{8}$$

Всякое $z \in \mathbb{D}$ имеет вид

$$z = n_s a_t 0 = \frac{\operatorname{sh} t - ise^{-t}}{\operatorname{ch} t - ise^{-t}}, \tag{9}$$

где числа $s, t \in \mathbb{R}^1$ определены однозначно, при этом

$$s = -\frac{Imz}{|1-z|^2}, \quad t = \frac{1}{2} \ln \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}. \tag{10}$$

Используя (2) и (10), имеем

$$d\mu(z) = e^{-2t} dx\, dt.$$

Далее, пусть $K_r = K_r(0)$ и

$$Q_r = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : n_s a_t 0 \in K_r\}. \tag{11}$$

Простые вычисления с использованием (8) и (9) показывают, что

$$Q_r = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : t \in [-r, r],\ |s| \le U_r(t) e^t \operatorname{ch} r\}, \tag{12}$$

где

$$U_r(t) = \begin{cases} \sqrt{th^2 r \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}, & \text{если } t \in [-r, r] \\ o, & \text{если } |t| > r. \end{cases}$$

Преобразование Фурье

$$\hat{U}_r(z) = \int\limits_{-r}^{r} U_r(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C},$$

является четной целой функцией, удовлетворяющей условию

$$|\hat{U}_r(z)| \leq Ce^{r|\Im z|}, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

для некоторого $C > 0$, не зависящего от z. Нам потребуются некоторые свойства функции $\hat{U}_r$, содержащиеся в следующем утверждении.

Лемма. *Имеют место следующие утверждения.*

1. *Для любого* $z \in \mathbb{C}$

$$\hat{U}_r(z) = \pi thr (\operatorname{ch} r)^{iz} F\Big(\frac{3 - iz}{2}, \frac{1 - iz}{2}, 2, th^2 r\Big), \tag{14}$$

где F – гипергеометрическая функция.

2. *Функция $\hat{U}_r$ имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули являются вещественными и простыми.*

Доказательство леммы содержится в [9, леммы 4, 6]. В этой же работе имеются более подробные сведения о свойствах $\hat{U}_r$.

Обозначим $Z(\hat{U}_r) = \{z \in \mathbb{R}^1 : \hat{U}_r(z) = 0\}$.

Пусть $\mathcal{L} = 4(1 - |z|^2)\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ – оператор Лапласа-Бельтрами. Для любой $f \in C^2(\mathbb{D})$ выполнено равенство

$$\mathcal{L}f = e^{4t}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - 2\frac{\partial F}{\partial t}, \tag{15}$$

где $f(z) = F(s, t)$ (см. (9) и (10). Если $\mathcal{L}f = -(\lambda^2 + 1)f$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\int\limits_{K_r(w)} f(z)\, d\mu(z) = 2\hat{U}_r(-\lambda) \operatorname{sh} r f(w) \tag{16}$$

для любых $w \in \mathbb{D}$, $r > 0$ (см. (14) и [9, формула (29)]).

3. Доказательство теоремы 2.

Теорема 2. *Для любых $a \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ и любой последовательности $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел, удовлетворяющей условию*

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\inf_{q \geq m} M_q^{1/q})^{-1} < +\infty, \tag{17}$$

существует ненулевая вещественно-аналитическая функция $f \in V_r(\mathbb{D})$ *такая, что*

$$\int\limits_{E(T,r)} |f(z)|\Big(1+\frac{|Imz|}{|1-z|^2}\Big)^q d\mu(z) \leq M_q \exp(-\gamma e^{2T}) \tag{18}$$

при всех $E(T,r) \subset \mathbb{D}_a,\ q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\lambda, \xi > 0$. Тогда для функции $y(t)$, заданной для вещественных t следующим образом:

$$y(t) = \int\limits_1^\infty (u^2-1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} \exp\Big(-\frac{u}{2}\xi e^{2t} + (1+i\lambda)t\Big)du, \tag{19}$$

выполнено равенство

$$y(t) = \frac{\pi^{3/2}e^{\pi\lambda/4}2^{i\lambda}e^t}{(1+e^{\pi\lambda})\Gamma(\frac{1-i\lambda}{2})\xi^{i\lambda/2}} H^{(1)}_{\frac{i\lambda}{2}}\Big(\frac{i}{2}\xi e^{2t}\Big), \tag{20}$$

где $H^{(1)}_{\frac{i\lambda}{2}}$ – функция Ганкеля первого рода (см. [10, формула (19.11)]). Из (20) и [10, формула (23.18)] следует, что y удовлетворяет уравнению

$$y'' - 2y' + (\lambda^2 + 1 - \xi^2 e^{4t})y = 0. \tag{21}$$

Положим

$$g(z,\xi) = y(t)e^{i\xi s}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{22}$$

(см. (9)). Из равенств (21) и (15) получаем

$$(1-|z|^2)\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)g(z,\xi) = (1+\lambda^2)g(z,\xi). \tag{23}$$

Пусть $r > 0$. Выберем $\lambda > 0$ так, чтобы $\hat{U}_r(-\lambda) = 0$ (см. лемму). Тогда из (23) и (16) следует, что

$$\int\limits_{K_r(w)} g(z,\xi)\, d\mu(z) = 2g(w,\xi)\hat{U}_r(-\lambda)\operatorname{sh} r = 0 \tag{24}$$

для всех $w \in \mathbb{D}$. Полагая $h(\xi) = Reg(0,\xi)$, из (19) и (22)имеем

$$h(\xi) = \int\limits_1^\infty e^{-u\xi/2}(u^2-1)^{1/2}\cos\Big(\frac{\lambda}{2}\ln(u^2-1)\Big)du.$$

Отсюда следует, что функция h является вещественно-аналитической функцией на $(0,+\infty)$, не равной нулю тождественно. Таким образом, множество нулей функции h на $(0,+\infty)$ нигде не плотно. Тогда для любого $\gamma > 0$ существуют числа $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$ такие, что

$$2e^{2r}\gamma < \alpha < \beta, \tag{25}$$

и функция h сохраняет знак на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Далее, пусть последовательность $\{M_q\}_{q=0}^{\infty}$ положительных чисел удовлетворяет условию (17). Из [11, теорема 1.3.8] следует, что для любого $A > 1$ существует ненулевая неотрицательная функция $\varphi_A \in C^{\infty}(\mathbb{R}^1)$ с носителем на (α, β) такая, что

$$\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]} \leq M_q A^{-q} \quad \text{для всех } q \in \mathbb{Z}_+. \tag{26}$$

Умножая (24) на $\varphi_A(\xi)$ и интегрируя полученное равенство на $[\alpha, \beta]$, находим

$$\int\limits_{K_r(w)} f(z)\, d\mu(z) = 0 \quad \text{для всех } w \in \mathbb{D},$$

где

$$f(z) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} g(z, \xi) \varphi_A(\xi)\, d\xi. \tag{27}$$

Это означает, что $f \in V_r(\mathbb{D})$. Кроме того, из (23) и (27) имеем $\mathcal{L}f = (\lambda^2 + 1)f$.

В силу эллиптичности оператора $\mathcal{L}$ отсюда вытекает, что f является вещественно-аналитической в $\mathbb{D}$. Поскольку функция $h\varphi_A$ сохраняет знак на (α, β), из (27) и определения h следует, что $f(0) \neq 0$. Докажем теперь, что f удовлетворяет условию (18). Из (27), (22) и (19) имеем

$$f(z) = \int\limits_{1}^{\infty} (u^2 - 1)^{\frac{i\lambda+1}{2}} e^{(1+i\lambda)t} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi_A(\xi) \exp\Big(i\xi s - \frac{u}{2}\xi e^{2t}\Big) d\xi\, dt. \tag{28}$$

Интегрирование по частям показывает, что внутренний интеграл в (28) не превосходит величины

$$(\beta - \alpha)\Big|s + \frac{iu}{2}e^{2t}\Big|^{-q} \exp\Big(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\Big)\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]}$$

при любом $q \in \mathbb{N}$.

Отсюда и из (28) имеем

$$|f(z)| \leq (\beta - \alpha)\Big|s + \frac{i}{2}e^{2t}\Big|^{-q} \|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]}\, e^t \int\limits_{1}^{\infty} u \exp\Big(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\Big) du \tag{29}$$

при всех $z \in \mathbb{D}$. Пусть теперь $z \in \mathbb{D}_a$. Тогда из (10) и определения $\mathbb{D}_a$ следует, что

$$tht > 2a - 1. \tag{30}$$

Учитывая, что

$$\int\limits_{1}^{\infty} u \exp\Big(-\frac{u}{2}\alpha e^{2t}\Big) du = \frac{2e^{-2t}}{\alpha}\Big(1 + \frac{2e^{-2t}}{\alpha}\Big) \exp\Big(-\frac{\alpha}{2}e^{2t}\Big),$$

из (29), (30) и (25) получаем

$$|f(z)|e^{-2t} \leq \frac{B^q}{(1+|s|)^q}\|\varphi_A^{(q)}\|_{C[\alpha,\beta]}\exp\Big(-\frac{\alpha}{2}e^{2t}\Big), \quad z\in\mathbb{D}_a,\ q\in\mathbb{N} \tag{31}$$

для некоторой постоянной $B > 1$, зависящей только от r, α, β, a. Выбирая теперь $A > B$ и используя (2), из неравенств (31) и (26) получаем (18). Итак, функция f удовлетворяет всем требуемым условиям и теорема 2 доказана.

4. Оценки плотности упаковок. Пусть $\lambda > 0$. Символом Φ обозначим множество всех непрерывных неотрицательных финитных функций на $(0, +\infty)$. Пусть также $F(z,\varphi) = \int\limits_0^\infty g(z,\xi)\varphi(\xi)d\xi$, где $\varphi \in \Phi$ и g определяется равенством (22).

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ – упаковка множества G, состоящая из гиперболических кругов, радиусы r которых удовлетворяют условию $U_r(\lambda) = 0$. Тогда*

$$d(G,\mathcal{K}) \leq 1 - \frac{1}{\mathrm{meas}(G)}\sup\frac{1}{\|F(\cdot,\varphi)\|_{L^\infty(G)}}\left|\int\limits_G F(z,\varphi)\,d\mu(z)\right|,$$

где $\sup$ *берется по множеству всех ненулевых $\varphi \in \Phi$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{K} = (K_1, \dots, K_s)$ и $A = \bigcup_{j=1}^s K_j$. Согласно теореме 2,

$$\int\limits_{K_j} F(z,\varphi)\,d\mu(z) \quad \text{для всех } j \in \{1,\dots,s\}.$$

Отсюда имеем

$$\left|\int\limits_G F(z,\varphi)\,d\mu(z)\right| = \left|\int\limits_{G\setminus A} F(z,\varphi)\,d\mu(z) + \int\limits_A F(z,\varphi)\,d\mu(z)\right|$$
$$= \left|\int\limits_{G\setminus A} F(z,\varphi)\,d\mu(z)\right| \leq \|F(\cdot,\varphi)\|_{L^\infty(G)}\mathrm{meas}(G\setminus A).$$

Следовательно, для ненулевой $\varphi \in \Phi$ получаем

$$\sum_{j=1}^s \mathrm{meas}(K_j) = \mathrm{meas}(D) = \mathrm{meas}(G) - \mathrm{meas}(G\setminus A)$$
$$\leq \mathrm{meas}(G) - \frac{1}{\|F(\cdot,\varphi)\|_{L^\infty(G)}}\left|\int\limits_G F(,\varphi)\,d\mu(z)\right|.$$

В силу произвольности φ отсюда и из (1) следует утверждение теоремы 3. $\square$

1. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
2. *Альфорс Л.* Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986. – 163 с.
3. *Конвей Дж., Слоен Н.* Упаковки шаров, решетки и группы. – Т. 1, 2. – М.: Мир, 1990. – 761 с.
4. *Рожерс К.* Укладки и покрытия. – М.: Мир, 1968. – 148 с.
5. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 p.
6. *Kotlyar B.D.* Packing of parallelotopes and some another sets. – Sibirsk. Mat. Zh. – V. 25. – № 2. – C. 222-225.
7. *Kotlyar B.D.* Densities of packings of bounded sets. – Soobsheniya A. N. Gruz. SSR. – V. 126. – № 3. – C. 469-672.
8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer-Verlag London Limited, 2009. – 671 p.
9. *Волчков В.В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах. – Известия РАН. – 65. – 2. – 2001. – С. 3-26.
10. *Коренев Б.Г.* Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971. – 287 с.
11. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т. 1. – М.: Мир, 1986. – 462 с.

O. A. Ochakovskaya

Densities of packings on hyperbolic plane.

Some examples of functions with zero integrals over hyperbolic disks of one fixed radius are considered. New estimates for the densities of hyperbolic disks packing are obtained.

Keywords: *spherical means, density of packing, hyperbolic plane.*

О. О. Очаковська

Щільність упаковок на гіперболічній площині.

Розглянуто деякі приклади функцій з нульовими інтегралами по усіх гіперболічних колах фіксованого радіуса. Отримано нові оцінки щільностей для укладок гіперболічних кіл.

Ключові слова: *сферичні середні, щільність укладок, гіперболічна площина.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakovskaja@yandex.ua

Получено 20.11.11