УДК 517.988.28

©2011. **П. А. Машаров**

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАДИУСЕ ПОМПЕЙЮ ДЛЯ ШАРОВЫХ СЕГМЕНТОВ, СОДЕРЖАЩИХ ПОЛУШАР

Найдено значение наименьшего радиуса шара, в котором данное множество является множеством Помпейю. В качестве множества рассматривается каждый шаровой сегмент с высотой, большей радиуса. Полученное значение существенно уточняет известные ранее оценки.

Ключевые слова: *экстремальный вариант проблемы Помпейю, радиус Помпейю, множество Помпейю, шаровой сегмент.*

Введение и формулировка основного результата. Всюду в работе через $\mathbb{R}^n$ обозначается вещественное евклидово пространство размерности $n \geqslant 3$ с евклидовой нормой $|\cdot|$. Группу движений $\mathbb{R}^n$ будем обозначать через $\mathbf{M}(n)$. $\mathrm{Mot}(A,B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n)\colon \lambda A \subset B\}$ – часть группы движений, оставляющая A внутри B. $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| < R\}$ – шар радиуса R. Для непустого открытого множества $B \subset \mathbb{R}^n$ под $\mathrm{L}_{loc}(B)$ будем понимать класс локально интегрируемых на B функций.

Компактное множество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством Помпейю в B, если из того, что комплекснозначная $f \in \mathrm{L}_{loc}(B)$, для которой $\int_{\lambda A} f(x)\,dx = 0$ для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(A,B)$, следует, что f равна нулю почти всюду в B. Совокупность всех множеств Помпейю в B будем обозначать через $\mathrm{Pomp}(B)$.

Классическая проблема Помпейю об описании класса $\mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ изучалась во многих работах, см. обзоры [1], [2] с обширной библиографией. Из результата Вильямса ([3]) следует, что если граница множества A липшицева, гомеоморфна сфере, но не вещественно аналитическая, то $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$.

Если же некоторое множество $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{R}^n)$, то возникает вопрос, будет ли $A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$ при достаточно большом R? В [4] В.В. Волчков получил утвердительный ответ на этот вопрос. В связи с этим в [5] поставлена

`Проблема`. Для данного A найти $\mathcal{P}(A) = \inf\{R > 0\colon A \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}$.

Величину $\mathcal{P}(A)$ естественно называть экстремальным радиусом Помпейю (или просто радиусом Помпейю) для множества A.

Ряд результатов, содержащих оценки сверху для величины $\mathcal{P}(A)$, получены К.А. Беренстейном и Р. Гэем, см. [6]. В [4-5], [7-9] содержится достаточно полная история данного вопроса и близких к нему.

В работе для каждого шарового сегмента $\mathbb{S}_h = \{x \in \mathbb{R}^n\colon |x| \leqslant 1, x_n \geqslant 1 - h\}$, содержащего полушар, найден экстремальный радиус Помпейю, то есть получена

Теорема 1. *Для каждого* $h \in (1;2)$ *значение*

$$\mathcal{P}(\mathbb{S}_h) = \mathcal{R}(h) \overset{\text{опр.}}{=} \begin{cases} \sqrt{8h - 3h^2}/2, & 1 < h \leqslant 8/7; \\ h, & 8/7 < h < 2. \end{cases}$$

1. Описание группы SO(n)**.** Вращениями евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называют линейные преобразования g этого пространства, не меняющие его ориентации и оставляющие инвариантным расстояние точек от начала координат: $|gx| = |x|$. Вращения n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$ образуют группу, которая обозначается через SO(n). Инвариантная нормированная мера на группе SO(n) имеет вид

$$d\tau = A_n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{k} \sin^{j-1} \theta_j^k d\theta_j^k, \quad \text{где} \quad A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma(k/2)}{2\pi^{k/2}}, \tag{1}$$

а θ_j^k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $1 \leqslant i \leqslant k$ – углы Эйлера вращения g (см. [10, с. 434]).

Пусть далее $T(g)$ – квазирегулярное представление группы SO(n), то есть $(T(g)f)(\sigma) = f(g^{-1}\sigma)$ для любых $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{S})$, $\sigma \in \mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1\}$, $g \in \mathrm{SO}(n)$ (см. [10, с. 442]). Обозначим $T^k(\tau)$ – сужение квазирегулярного представления на пространство $\mathcal{H}_k$ однородных гармонических полиномов степени k, рассматриваемое как подпространство $\mathrm{L}^2(\mathbb{S})$ (см. [10, с. 446]).

Пусть $\{Y_l^{(k)}\}$, $1 \leqslant l \leqslant d_k$ – фиксированный ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}_k$, $\{t_{lp}^k\}$ – матрица представления $T^k(\tau)$, то есть

$$\left(T^k(\tau)Y_l^{(k)}\right)(\sigma) = Y_l^{(k)}(\tau^{-1}\sigma) = \sum_{p=1}^{d_k} t_{lp}^k(\tau) Y_p^{(k)}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{S}. \tag{2}$$

При $k = 0$ имеем $d_k = 1$, $Y_1^{(k)}(\sigma) = 1$, $t_{11}^k(\tau) = 1$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}$, $\tau \in \mathrm{SO}(n)$. При $n = 2$ и $k \geqslant 1$ всюду в дальнейшем будем использовать следующий базис в $\mathcal{H}_k$: $Y_1^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 + i\sigma_2)^k$, $Y_2^{(k)}(\sigma) = (\sigma_1 - i\sigma_2)^k$. Если τ – вращение на угол θ в $\mathbb{R}^2$, то для этого базиса $t_{11}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{22}^k(\tau) = e^{-ik\theta}$, $t_{12}^k(\tau) = t_{21}^k(\tau) = 0$.

Всякой функции $f \in \mathrm{L}_{loc}(\mathbb{B}_R)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad \rho \in (0, R), \tag{3}$$

где

$$f_{kl}(\rho) = \int_{\mathbb{S}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\omega(\sigma) \tag{4}$$

(здесь и далее $d\omega$ – нормированная поверхностная мера на $\mathbb{S}$).

При $n = 2$ из последнего равенства имеем

$$f_{kl}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma) = \int_{\mathrm{SO}(2)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{ll}^k(\tau)}\, d\tau. \tag{5}$$

В [11, с. 30] получена аналогичная формула для $n \geqslant 3$:

Лемма (1.1.1 из [11]). *Пусть $n \geqslant 3$, $f \in \mathrm{L}_{loc}(\mathbb{B}_R)$. Тогда*

$$f_{kl}(\rho) Y_p^{(k)}(\sigma) = d_k \int_{\mathrm{SO}(n)} f(\tau^{-1}x) \overline{t_{lp}^k(\tau)}\, d\tau. \tag{6}$$

Отметим также следующие интегральные формулы (см. [5, Глава 1, § 2.1]). Пусть $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Тогда для любой $f \in \mathrm{L}(\mathbb{B}_{r,R})$ (здесь и далее используем обозначение для шарового слоя $\mathbb{B}_{r,R} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon r < |x| < R\}$) выполняется следующее равенство

$$\int_{\mathbb{B}_{r,R}} f(x)\,dx = \int_r^R \rho^{n-1}\,d\rho \int_{\mathbb{S}} f(\rho\sigma)\,d\omega(\sigma). \tag{7}$$

Кроме этого, для любой функции $f \in \mathrm{L}(\mathbb{S})$ верно

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}} f(\sigma)\,d\omega(\sigma) = \int_{\mathrm{SO}(n)} f(\tau\mathbf{e}_1)\,d\tau, \tag{8}$$

где $\omega_{n-1} = \begin{cases} \frac{n\pi^{n/2}}{(n/2)!} & \text{если } n \text{ четное}, \\ \frac{2^n\pi^{(n-1)/2}\left((n-1)/2\right)!}{(n-1)!} & \text{если } n \text{ нечетное} \end{cases}$ – площадь единичной сферы $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.

2. Геометрические конструкции. Для множества A из $\mathbb{R}^n$ рассмотрим величину $r^*(A) = \inf\{R > 0 : \mathrm{Mot}(\overline{A}, \mathbb{B}_R) \neq \varnothing\}$. Отметим, что

$$r^*(\mathbb{S}_h) = \begin{cases} \sqrt{1-h^2}, & h \in (0,1); \\ 1, & h \geqslant 1. \end{cases}$$

Из определений $r^*(A)$ и $\mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ следует, что для произвольного компакта A множество $\mathrm{Mot}(A, \mathbb{B}_R) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $R > r^*(A)$.

Рассмотрим граничные положения $\mathbb{S}_h$ в $\mathbb{B}_R$ и определим диапазон расстояний от центра шара $\mathbb{B}_R$ до точек единичной сферы и нижнего основания сегмента $\mathbb{S}_h$, а также соотношения между ними для различных $h > 1$.

Расстояние от центра шара, частью которого является рассматриваемый сегмент, до основания $\mathbb{S}_h$ равно $h-1$, поэтому радиус основания равен $\sqrt{1-(h-1)^2} = \sqrt{2h-h^2}$. Минимальное расстояние от центра шара $\mathbb{B}_R$ до этого основания равно $\max\{0; R-h\}$. А максимальное такое расстояние равно $\sqrt{R^2-(2h-h^2)} = \sqrt{R^2+h^2-2h}$.

Максимальное расстояние до точек сферической границы сегмента равно радиусу шара R, а минимальное такое, при котором сфера помещается в шар – $\max\left\{0, h - \sqrt{R^2+h^2-2h}\right\}$.

В дальнейшем необходимо будет воспользоваться решением неравенства, левой и правой частями которого будут некоторые только что найденные выражения. Итак, рассмотрев уравнение $\sqrt{R^2+h^2-2h} = h - \sqrt{R^2+h^2-2h}$, получаем решение $R_0 = \sqrt{8h-3h^2}/2$. Таким образом, если $R > R_0$, то $h - \sqrt{R^2+h^2-2h} < \sqrt{R^2+h^2-2h}$. Рассмотрев уравнение $R_0 = h$, имеем $h_0 = 8/7$.

3. Некоторые классы функций и их свойства. В работе будут использоваться следующие стандартные обозначения. Для $m \in \mathbb{N}$ под $C^m(B)$ будем понимать класс функций, все частные производные порядка до m включительно которых (включая смешанные) непрерывны, $C(B)$ – класс непрерывных на B функций, $C^\infty(B) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} C^m(B)$.

Пусть множество $B \subset \mathbb{R}^n$ – открытое. Рассмотрим класс функций $\mathfrak{P}(A, B)$, состоящий из таких функций $f \in \mathrm{L}_{loc}(B)$, для которых равенство

$$\int_{\lambda A} f(x)\, dx = 0 \tag{9}$$

верно для всех $\lambda \in \mathrm{Mot}(\overline{A}, B)$. Добавляя гладкость, получим классы функций $\mathfrak{P}^m(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^m(B)$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{P}^\infty(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C^\infty(B)$ и $\mathfrak{P}^0(A, B) = \mathfrak{P}(A, B) \cap C(B)$.

Сначала отметим одно простое свойство указанных классов функций. Для любых двух функций $f, g \in \mathfrak{P}^m(A, B)$, где $m = \{0, 1, \ldots, \infty\}$ или $f, g \in \mathfrak{P}(A, B)$ и для произвольных двух чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ функция $\alpha f + \beta g \in \mathfrak{P}^m(A, B)$, или, соответственно, принадлежит $\mathfrak{P}(A, B)$. Это утверждение следует из линейности пространств гладких и интегрируемых функций $C^m(B)$, $\mathrm{L}_{loc}(B)$ и из линейности интеграла.

Непосредственно из определения классов $\mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$ и $\mathfrak{P}^m(A, \mathbb{B}_R)$ следует

Лемма 1. *Если $f(x)$ принадлежит одному из $\mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_R)$ или $\mathfrak{P}^m(A, \mathbb{B}_R)$, то для любого движения $\lambda \in \mathbf{M}(n)$ такого, что $|\lambda\vec{0}| < \delta$ ($\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ – начало отсчета), функция $f(\lambda x)$ принадлежит, соответственно, $\mathfrak{P}(A, \mathbb{B}_{R-\delta})$ или $\mathfrak{P}^m(A, \mathbb{B}_{R-\delta})$.*

Кроме того, классы $\mathfrak{P}(A, B)$ и $\mathfrak{P}^m(A, B)$ можно рассматривать как множества решений уравнений свертки $f * \chi_A = 0$ из классов $\mathrm{L}_{loc}(B)$ и $C^m(B)$, соответственно.

Лемма 2. *Пусть $f \in \mathfrak{P}^m(A, B)$, $m \geqslant 1$. Тогда все частные производные функции f принадлежат $\mathfrak{P}^{m-1}(A, B)$.*

Доказательство. Зафиксируем $\lambda \in \mathrm{Mot}(A, B)$ и рассмотрим функцию $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\chi_{x-\lambda A}(x-y)\, dy = \int_{\lambda A} f(y)\, dy \equiv 0$, так как $f \in \mathfrak{P}^m(A, B)$. С другой стороны, сделав в интеграле замену $t = x - y$, получаем $\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+t)\chi_{x-\lambda A}(t)\, dt$. Дифференцируя последнее равенство по j-той переменной x_j, получаем $\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(x+t)}{\partial x_j}\chi_{x-\lambda A}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f(y)}{\partial x_j}\chi_{x-\lambda A}(x-y)\, dy = \int_{\lambda A} \frac{\partial f(y)}{\partial x_j}\, dy \equiv 0$. Последнее равенство как раз и означает $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathfrak{P}^{m-1}(A, B)$, $j \in \overline{1, n}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $R > r^*(\mathbb{S}_h)$, функция $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ ($f \in \mathfrak{P}^m(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$). Тогда каждое слагаемое ряда (3), доопределенное в точке $x = 0$ по непрерывности, принадлежит тому же классу. То есть при всех $k \geqslant 0$; $1 \leqslant l, p \leqslant d_k$ функции $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ (соответственно $f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma) \in \mathfrak{P}^m(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$).*

Доказательство. Путем непосредственных вычислений, используя (6) и инвариантность $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ относительно вращений, получаем, что для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ верно $\int_{\lambda\mathbb{S}_h} f_{kl}(\rho)Y_p^{(k)}(\sigma)\, dx = \int_{\lambda\mathbb{S}_h} \left[d_k \int_{\mathrm{SO}(n)} f(\tau^{-1}x)\overline{t_{lp}^k(\tau)}\, d\tau \right] dx = $
$= d_k \int_{\mathrm{SO}(n)} \left[\int_{\lambda\mathbb{S}_h} f(\tau^{-1}x)\, dx \right] \overline{t_{lp}^k(\tau)}\, d\tau = 0$, что в данном случае означает принадлежность классу $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$. Для доказательства принадлежности $\mathfrak{P}^m(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ заметим,

что произведение непрерывно дифференцируемых функций является непрерывно дифференцируемой функцией. □

4. Вспомогательные утверждения. Для получения основного результата работы необходимо будет воспользоваться общим решением некоторого функционального уравнения, впервые рассмотренного в работе [12].

Теорема (3.4.4 в [11]). *Пусть* $0 < \delta < 1$, $f \in C(\mathbb{B}_{1-\delta,1+\delta})$ *и при всех* $u, v \in \mathbb{S}$, $w \in \mathbb{B}_\delta$ *имеет место равенство*

$$f(w+u) + f(w-u) = f(w+v) + f(w-v). \tag{10}$$

Тогда

$$f(x) = C_1|x|^2 + C_2 xy + C_3, \tag{11}$$

где $y \in \mathbb{S}$. *Обратно, всякая функция вида (11) удовлетворяет равенству (10).*

Лемма 4. *Пусть* $R > r^*(\mathbb{S}_h)$, *функция* $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$. *Тогда* f *удовлетворяет (10) при всех* $u, v \in \mathbb{S}$ *и* $w \in \mathbb{B}_{R-1}$.

Доказательство. Достаточно получить (10) при $w = 0$, так как общий случай получается из этого сдвигом.

Пусть $\mathbb{S}'_h = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| = 1, x_n \geqslant 1-h\}$ – боковая поверхность шарового сегмента $\mathbb{S}_h$, $\mathbb{S}''_h = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant 1, x_n = 1-h\}$ – основание $\mathbb{S}_h$. Таким образом, граница $\partial\mathbb{S}_h = \mathbb{S}'_h \cup \mathbb{S}''_h$.

Для интегрируемой вектор-функции $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ поверхностный интеграл второго рода связан с поверхностным интегралом первого рода формулой (см., например, [13, §15.8]) $\int_{\partial\mathbb{S}_h}\big(f_1(x)\,dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + f_n\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}\big) = \int_{\partial\mathbb{S}_h}\big(f_1(x)\sigma_1 + \ldots + f_n(x)\sigma_n\big)\,d\omega(\sigma)$.

С другой стороны, по формуле Гаусса-Остроградского, имеем

$$\int_{\partial\mathbb{S}_h}\big(f_1(x)\,dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n + \ldots + f_n\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n-1}\big) = \int_{\mathbb{S}_h}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)dx. \tag{12}$$

Таким образом, для любого $j \neq n$ и $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ имеем

$$\int_{\mathbb{S}'_h} f(g^{-1}\sigma)\sigma_j\,d\omega(\sigma) + \int_{\mathbb{S}''_h} f(g^{-1}\sigma)\sigma_j\,d\omega(\sigma) = \int_{\mathbb{S}_h}\frac{\partial}{\partial x_j} f(g^{-1}x)\,dx = 0$$

для всех $g \in \mathrm{SO}(n)$. Но так как на $\mathbb{S}''_h$ все $\sigma_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$, то

$$\int_{\mathbb{S}'_h} f(g^{-1}\sigma)\sigma_j\,d\omega(\sigma) = 0. \tag{13}$$

Умножая обе части равенства (13) на $\overline{t^k_{lp}(g)}$ и интегрируя на $\mathrm{SO}(n)$, из (5) и (6) получаем $f_{kl}(1)\int_{\mathbb{S}'_h}\sigma_j Y(\sigma)\,d\omega(\sigma) = 0$ при $Y = Y^{(k)}_p$, $1 \leqslant p \leqslant d_k$, а значит и при всех $Y \in \mathcal{H}_k$. Если k четно, последний интеграл не равен нулю при $Y(\sigma) = (\sigma_{n-1} + i\sigma_n)^k$, откуда $f_{kl}(1) = 0$. Тогда все слагаемые ряда (3) для функции $f(x) + f(-x)$ при $k \geqslant 1$ равны нулю, откуда следует утверждение леммы 4. □

Лемма 5. *Пусть* $R > 1$ *и* $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$: $f = C$ *при* $|x| > 2 - R$. *Тогда*

$$\int_{\widetilde{B}} \big(f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) - C\big)\, dx_1 \dots dx_{n-1} = 0, \tag{14}$$

где $\widetilde{B} = \overline{\mathbb{B}} \cap \{x_n = 1 - h\} = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \colon x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \leqslant 2h - h^2, x_n = 1 - h\}$ – *основание рассматриваемого шарового сегмента* $\mathbb{S}_h$.

Доказательство. Для таких $\delta > 0$, что $\cos\delta > h - 1$ рассмотрим множества

$$\begin{aligned}
S^1 &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant 1, -x_1 \operatorname{tg}\delta - \frac{h-1}{\cos\delta} \leqslant x_n \leqslant x_1 \operatorname{tg}\delta - \frac{h-1}{\cos\delta}\Big\},\\
S^2 &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant 1, x_1 \operatorname{tg}\delta - \frac{h-1}{\cos\delta} \leqslant x_n \leqslant -x_1 \operatorname{tg}\delta - \frac{h-1}{\cos\delta}\Big\},\\
S^3 &= \Big\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \leqslant 1, -x_1 \operatorname{tg}\delta - \frac{h-1}{\cos\delta} \leqslant x_n, x_1 \operatorname{tg}\delta - \frac{h-1}{\cos\delta} \leqslant x_n\Big\}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что существует вращение $g_\delta \in \mathrm{SO}(n)$ такое, что $g_\delta \mathbb{S}_h = S^1 \cup S^3$, и $g_{-\delta}\mathbb{S}_h = g_\delta^{-1}\mathbb{S}_h = S^2 \cup S^3$. Так как $f \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$, то $\int_{g_\delta \mathbb{S}_h} f(x)\, dx = 0$ и $\int_{g_\delta^{-1}\mathbb{S}_h} f(x)\, dx = 0$. Вычитая последние два равенства, получаем

$$\int_{S^1} f(x)\, dx = \int_{S^2} f(x)\, dx. \tag{16}$$

А так как вместе с f классу $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ принадлежит и любая производная от f, то, подставляя в (16) вместо f функцию $\frac{\partial(f-C)}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ и переходя к пределу в этом равенстве при $\delta \to +0$, по теореме о среднем, получаем

$$\int_{\widetilde{B}} x_1 \frac{\partial(f - C)}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)\, dx_1 \dots dx_{n-1} = 0. \tag{17}$$

Используя формулу интегрирования по частям и условие, что $f = C$ в $|x| > 2 - R$, получаем (14). $\square$

Зададим гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ через единичный вектор нормали и расстояние до начала координат: $\xi_{\sigma,d} = \{x \in \mathbb{R}^n \colon (\sigma, x) = d\}$, где $d \in \mathbb{R}_+$ и $\sigma \in \mathbb{S}$. Пусть $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Радона $\mathbf{R}f$ может быть рассмотрено как функция на $\mathbb{S} \times \mathbb{R}_+$ и определено по формуле

$$\mathbf{R}f(\sigma, d) = \int_{\xi_{\sigma,d}} f(x)\, dm_{n-1}(x), \tag{18}$$

где dm_{n-1} – $(n-1)$-мерная мера. По теореме Фубини видно, что преобразование $\mathbf{R}$ определено для всех $\sigma \in \mathbb{S}$ и почти всех $d \in \mathbb{R}_+$.

Лемма (Следствие 1.8.2 в [5]). *Пусть* $g \in C^\infty(\mathbb{R}^1)$ – *четная с компактным носителем. Тогда существует радиальная функция* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *с компактным носителем, для которой* $\mathbf{R}f(\sigma, d) = g(d)$ *для всех* $\sigma \in \mathbb{S}$, $d \in \mathbb{R}$.

Лемма (Следствие 1.8.4 в [5]). *Пусть* $r \geqslant 0$ *и* $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* $\mathbf{R}f(\sigma, d) = 0$ *для всех* $\sigma \in \mathbb{S}$ *и почти всех* $d \in (r, +\infty)$. *Если существует множество* $\Omega \subset (r, +\infty)$ *положительной меры такое, что* $f(x) = 0$ *в* $\{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| \in \Omega\}$, *тогда* $f = 0$ *в* $\mathbb{B}_{r,+\infty}$.

5. Доказательство основного результата. Перед тем, как перейти к доказательству основного результата работы, рассмотрим следующие функции (см. [5, Глава 1, § 3.3]) $v(x) = \begin{cases} Ce^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$ где $C = \big(\int\limits_{\mathbb{B}} e^{1/(|x|^2-1)}\,dx\big)^{-1}$. Для любого $\varepsilon > 0$ положим

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} v(x/\varepsilon). \tag{19}$$

Отметим, что радиальная функция $\varphi_\varepsilon \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ обладает свойствами: $\varphi_\varepsilon \geqslant 0$, $\sup \varphi_\varepsilon = \overline{\mathbb{B}}_\varepsilon$, и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала, что если $R > \mathcal{R}(h)$, то $\mathbb{S}_h \in \mathrm{Pomp}(\mathbb{B}_R)$. Для этого достаточно показать, что $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R) = \{0\}$, то есть из того, что $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ следует, что $f = 0$.

Итак, считаем $h \in (1, 2)$ фиксированным и $R > \mathcal{R}(h)$. Рассмотрим произвольную $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ и $\varepsilon \in (0, R - \mathcal{R}(h))$. Тогда для φ_ε, заданной формулой (19), функция $\psi = f * \varphi_\varepsilon \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_{R-\varepsilon})$. Определенная таким образом ψ удовлетворяет лемме 4, и по теореме 3.4.4 из [11] функция ψ является многочленом в $\mathbb{B}_{h-\sqrt{(R-\varepsilon)^2+h^2-2h},R-\varepsilon}$. Подберем такой дифференциальный оператор D с постоянными коэффициентами, чтобы $\psi_D = D\psi = C$ в $\mathbb{B}_{h-\sqrt{(R-\varepsilon)^2+h^2-2h},R-\varepsilon}$. Кроме этого, $\psi_D \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, то есть эта функция удовлетворяет условиям леммы 5. Доопределим ее нулем вне $\overline{\mathbb{B}_{R-\varepsilon}}$. Тогда, учитывая лемму 1, получаем, что интегралы от функции $h = \psi_D - C$ по всем гиперплоскостям равны нулю. Тогда по следствию 1.8.4 из [5] $h = 0$ в $\mathbb{B}_{R-\varepsilon}$, то есть $\psi_D = C$. Но так как $\psi_D \in \mathfrak{P}^\infty(\mathbb{B}_{R-\varepsilon})$, то $C = 0$. Подобным образом получим, что все коэффициенты многочлена ψ равны нулю, то есть $\psi = 0$. Используя стандартный метод сглаживания (см, например, §1.3.3 в [5]), получаем $f = 0$ в $\mathbb{B}_R$.

Пусть теперь $R \in (r^*(\mathbb{S}_h), h)$. Тогда существует $\varepsilon = h - R$ такое, что для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ выполняется $\mathbb{B}_\varepsilon \subset \lambda\mathbb{S}_h$. Рассмотрим теперь функции

$$v_2(x) = \begin{cases} Ce^{1/(|x|^4-1)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{где} \quad C^{-1} = \int_{\mathbb{B}} e^{1/(|x|^4-1)}\,dx \tag{20}$$

и

$$\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} v_2(x/\varepsilon). \tag{21}$$

Если φ_ε – функция определенная формулой (19), тогда $f = \big(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x)\big) \cdot \chi_{\mathbb{B}_\varepsilon}$ – не равная нулю функция, принадлежащая $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$.

При $R \leqslant r^*(\mathbb{S}_h)$ множество $\mathrm{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R) = \varnothing$, поэтому, очевидно, любая функция $f \in C^\infty(\mathbb{B}_R)$ принадлежит $\mathfrak{P}^\infty(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$.

Осталось доказать, что для каждого $h \in (1; 8/7)$ при $R \in [h; \sqrt{8h - 3h^2}/2)$ класс $\mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ состоит не только из нулевой функции. Рассмотрим линейно независимые радиальные ненулевые функции $g_1, g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, которые обращаются в нуль при $|x| \leqslant \sqrt{R^2+h^2-2h}$ и при $|x| \geqslant h - \sqrt{R^2+h^2-2h}$. Тогда существуют радиальные функции f_1, f_2 такие, что их преобразования Радона $\mathbf{R}f_j(\sigma, |x|) = g_j(x)$ для всех $\sigma \in \mathbb{S}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ (см. следствие 1.8.2 из [5]). По следствию 1.8.4 из [5], $f_1 = f_2 = 0$ для $|x| \geqslant h - \sqrt{R^2+h^2-2h}$. Так как для рассматриваемых R выполняется $h - \sqrt{R^2+h^2-2h} > \sqrt{R^2+h^2-2h}$, то для любого $\lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$ сегмент $\lambda\mathbb{S}_h$ содержит сегмент $\tilde{\mathbb{S}}$ шара $\mathbb{B}_{h-\sqrt{R^2+h^2-2h}}$ высоты $h - 2\sqrt{R^2+h^2-2h}$ с основанием, параллельным основанию $\mathbb{S}_h$. Рассмотрим не равную нулю функцию $f = \alpha f_1 + \beta f_2$, подобрав значения α и β таким образом, чтобы $\int_{\tilde{\mathbb{S}}} f(x)\,dx = 0$. Эта ненулевая функция $f \in \mathfrak{P}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$, так как $\int_{\lambda\mathbb{S}_h} f(x)\,dx = \int_{\tilde{\mathbb{S}}} f(x)\,dx = 0$. $\square$

Отметим, что значение $\mathcal{P}(\mathbb{S}_1)$ найдено в [5], основной результат работы в случае $n = 2$ был ранее получен в [14], а в случае $n \geqslant 2$ для всех $h \in (\sqrt{5}-1, 2)$ – в [15]. Кроме того, из известных ранее результатов С.Беренстейна и Р.Гэя (см., например, [6]) для $h > 1$ следовала лишь оценка $\mathcal{P}(\mathbb{S}_h) < 2$.

6. Некоторые применения. Теорема 1 позволяет получить достаточное условие замкнутости в пространстве $\mathrm{L}^p(\mathbb{B}_R)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ системы функций

$$\{\chi_{\mathbb{S}_h}(\lambda^{-1}x) \colon \lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)\}. \tag{22}$$

Теорема 2. *Пусть $h \in (1; 2)$, $R > \mathcal{R}(h)$. Тогда система функций (22) замкнута в пространстве $\mathrm{L}^p(\mathbb{B}_R)$ при любом $1 \leqslant p < \infty$.*

Отметим, что утверждение теоремы 2 теряет силу при $p = \infty$, так как ненулевые тождественные константы не могут быть аппроксимированы указанным в теореме 2 способом.

Рассмотрим также применение теоремы 1 в теории отображений, сохраняющих меру. Здесь под $\mathrm{meas}\, E$ понимается мера Лебега множества E.

Теорема 3. *Пусть $h \in (1; 2)$, $R > \mathcal{R}(h)$ и f – C^1-диффеоморфизм $\mathbb{B}_R$ на область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Тогда если $\mathrm{meas}\, f(\lambda\mathbb{S}_h) = \mathrm{meas}\, \lambda\mathbb{S}_h$ $\forall \lambda \in \mathrm{Mot}(\mathbb{S}_h, \mathbb{B}_R)$, то для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{B}_R$ выполняется $\mathrm{meas}\, f(E) = \mathrm{meas}\, E$.*

Доказательства теорем 2 и 3 полностью повторяют доказательства аналогичных теорем из [15].

1. *Zalcman L.* A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approximation dy solutions of partial differential equations / ed. B. Fuglede et al., 1992. P. 185-194.
2. *Zalcman L.* Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of the Pompeiu problem’. In: Radon Transforms and Tomography. Contemp. Math., 2001. № 278. P. 69-74.
3. *Williams S.A.* A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. 1976. V. 223. P. 183-190.
4. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. Springer. 2009, 671 p.
5. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. 2003, 454 p.
6. *Berenstein C.A., Gay R.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. 1989. – V. 52. – P. 133-166.
7. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Экстремальные задачи интегральной геометрии // Математика сегодня № 1. – Вып. 12. – Киев. – 2001. – С. 51-79.
8. *Машаров П.А.* Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. – 2001. – № 7. – С. 25-29.

9. *Елец Л.В., Машаров П.А.* Об одной экстремальной задаче о множествах Помпейю // УМЖ, Т. 61. – 2009. – С. 61-72.
10. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представлений групп. 2-е изд. – М.: Наука – 1991. – 576 с.
11. *Волчков В.В.* Преобразование Помпейю. Донецк: ДонГУ. – 1999. – 210 с.
12. *Szabo G.* On functions having the same integral on congruent semidisks // Ann. Univ. sci. Budapest. – 1982. – V. 3. – P. 3-9.
13. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ. Краткий курс в современном изложении. Киев, "Факт". – 2004. – 560 с.
14. *Машаров П.А.* Про циліндри з локальною властивістю Помпейю // Вістник Донецького національного університету. Серія А. Природничі науки. – 2000. – № 1. – С. 21-25.
15. *Машаров П.А.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю со сферической границей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 153-161.

P. A. Masharov

On Pompeiu radius for spherical segments containing the half ball.

Exact value for the smallest radius of the ball, in which the given set is a Pompeiu set is obtained in the paper. The set is presented by the ball segment with the altitude is bigger then radius. The value in this paper essentially improve the known results.

Keywords: *extremal version of the Pompeiu problem, Pompeiu radius, Pompeiu set, ball segment.*

П. А. Машаров

Про екстремальний радіус Помпейю для кульових сегментів, що містять півкулю.

Отримано значення найменшого радіуса кулі, в якій дана множина є множиною Помпейю. У якості множини розглянуто кожен сегмент кулі, що має висоту більшу за радіус. Отримане значення істотно уточнює відомі раніше оцінки.

Ключові слова: *екстремальний варіант проблеми Помпейю, радіус Помпейю, множина Помпейю, кульовий сегмент.*

Донецкий национальный ун-т
pavelmasharov@gmail.com

Получено 01.12.2011