УДК 517.9

©2011. **М. В. Краснощок**

КЛАСИЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ ДИФУЗІЇ У ПРУЖНОМУ ТІЛІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

Досліджено задачу, яку можна розглядати як узагальнення однофазової квазістаціонарної задачі Стефана, що враховує кривизну вільної межі. Доведено існування класичного розв'язку початково-крайової задачі з вільною межею для стаціонарної системи пружності та рівняння Лапласа. Використано метод побудови регуляризатора та теорему про нерухому точку стискального відображення.

Ключові слова: *вільна межа, пружність, оцінки Шаудера.*

1. Вступ. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^2$ з границею S; $\gamma(t)$ – замкнена крива, яка розподіляє Ω на дві підобласті $\Omega_+(t)$ і $\Omega_-(t)$ таким чином, що $\partial\Omega_-(t) = S \cup \gamma(t)$, $\partial\Omega_+(t) = \gamma(t)$, $\gamma(0) = \Gamma$, $\Omega_\pm(0) = \Omega_\pm$. Позначимо також $Q_\tau^\pm = \{(x,t): \ x \in \Omega_+(t), \ t \in (0,\tau)\}$, $\gamma_\tau = \{(x,t): \ x \in \gamma(t), \ t \in (0,\tau)\}$, $S_\tau = S \times (0,\tau)$, $\Gamma_\tau = \Gamma \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau^\pm = \Omega_\pm \times (0,\tau)$, $\Omega_\tau = \Omega \times (0,\tau)$.

Для вектор-функції $u(x,t) = (u_1(x,t), u_2(x,t))$ визначимо ($\nu \in (0,1/2)$, $E > 0$):

$$L_0 u = \tfrac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot u) + \Delta u, \quad \sigma_{ij}(u) = \tfrac{E}{1+\nu}\left(\varepsilon_{ij}(u) + \tfrac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon(u)\delta_{ij}\right), \\ \varepsilon_{ij}(u) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \ \varepsilon(u) = \varepsilon_{11}(u) + \varepsilon_{22}(u), \tag{1}$$

а також вектор $\sigma_n(u)$ з компонентами $\|\sigma_{ij}(u)n_j\|_{1\le i\le 2}$, де n – нормаль до $\gamma(t)$, спрямована всередину $\Omega_+(t)$. Тут і всюди далі за повторюваними індексами виконується підсумовування від 1 до 2.

Розглянемо задачу (див. [1], [2]): знайти вектор-функції $u^+(x,t)$, $u^-(x,t)$, функцію $v(x,t)$ і вільну межу $\gamma(t)$ за умовами

$$L_0 u^\pm = 0, \quad (x,t) \in Q_\tau^\pm, \tag{2}$$

$$\Delta v = 0, \quad (x,t) \in Q_\tau^-, \tag{3}$$

$$\gamma(t)|_{t=0} = \Gamma, \ \ u^- = 0, \ \frac{\partial v}{\partial n_S} = 0, \ \ (x,t) \in S_\tau, \tag{4}$$

$$[u] = 0, \ [\sigma_n(u)] = \sigma_n^0, \ \ (x,t) \in \gamma_\tau, \tag{5}$$

$$v = \varkappa + G(u), \ V_n = \frac{\partial v}{\partial n}, \ \ (x,t) \in \gamma_\tau, \tag{6}$$

де n_S – одинична нормаль до S, $[u] = u^+ - u^-$ (аналогічно для $\sigma_n(u)$), V_n – швидкість вільної межі у напрямку n, $\varkappa$ – кривизна кривої $\gamma(t)$, $\sigma_n^0 = (\sigma_{1j}^0 n_j, \sigma_{1j}^0 n_j)$, $G(u) = \frac{l}{2}((\sigma_{ij}(u^+) - \sigma_{ij}^0)(\varepsilon_{ij}(u^+) - \varepsilon_{ij}^0) - \sigma_{ij}(u^-)\varepsilon_{ij}(u^-) + 2\sigma_{ij}(u^-)(\varepsilon_{ij}(u^-) - \varepsilon_{ij}(u^+)))$, де $l > 0$, а σ_{ij}^0 та ε_{ij}^0 – задані сталі, зв'язані між собою співвідношеннями (1).

Зауважимо, що виконуючи прості алгебраїчні перетворення, можна довести, що, внаслідок умов (5), функція $G(u)$ ннабуває наступного вигляду

$$G(u) = -l\sigma^0_{ij}\varepsilon_{ij}(u^-) - \frac{l}{2}\sigma^0_{ss}\varepsilon^0_{ss},$$

де $\sigma^0_{ss} = \sigma^0_{ij}s_i s_j$, $\varepsilon^0_{ss} = \varepsilon^0_{ij}s_i s_j$, $s = (s_1, s_2)$ – дотична до $\gamma(t)$. Як і в [2], для прикладу, будемо вважати, що $\varepsilon^0_{ij} = \delta_{ij}$, тоді $\varepsilon^0_{ss} = 1$, $\sigma^0_{ss} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ і

$$G(u) \equiv G(u^-) = -\sigma^0_{ss} l \left(\varepsilon(u^-) + \frac{1}{2}\right). \tag{7}$$

Система (2), (3), (5), (6) є моделлю фазових перетворень у пружному середовищі (див. [1], [2]), в якій переміщення u^+ і u^- описують, відповідно, пружний стан "частинки" і "матриці а концентрація v – дифузію у "матриці". Дану систему можна охарактеризувати як задачу з вільною межею для еліптичної системи з еволюційною граничною умовою. Дослідженню задач такого типу присвячено, наприклад, роботи [3]-[8] – для еліптичних рівнянь, [9]-[10] – для системи Стокса і [11] – для системи теорії пружності (див. також [12]). У даній роботі доведено існування класичного розв'язку задачі (2)-(7).

2. Функціональні простори. Основний результат. Позначимо через $\langle u \rangle^{(\alpha)}_{x,Q_\tau}$ і $\langle u \rangle^{(\alpha)}_{t,Q_\tau}$ константи Гельдера з показником $\alpha \in (0,1)$ функції u відповідно за змінними x і t у деякій області Q_τ (див. [13], с. 16). Далі введемо для функцій неперервних в Q^+_τ (аналогічно в Q^-_τ, $\Omega^\pm_\tau$, $\mathbb{R}^1_\tau$) наступні півнорми ($\alpha, \beta \in (0,1)$):

$$[u]^{(\alpha,\beta)}_{Q^+_\tau} = \sup_{t,t' \in (0,\tau)} \sup_{x,x' \in \Omega(t) \cap \Omega(t')} \frac{|u(x,t) - u(x,t') - u(x',t) + u(x',t')|}{|x-x'|^\alpha |t-t'|^\beta},$$

$$\langle\langle u \rangle\rangle^{(\alpha,\beta)}_{Q^+_\tau} = \langle u \rangle^{(\alpha)}_{x,Q^+_\tau} + \langle u \rangle^{(\beta)}_{t,Q_\tau} + [u]^{(\alpha,\beta)}_{Q^+_\tau}.$$

При $k = 0, 1, 2, ..$ введемо $\mathcal{E}^{k+\alpha,\beta}(Q_\tau)$ (див. [3]), як простір функцій із скінченною нормою

$$|u|^{(k+\alpha,\beta)}_{Q_\tau} = \sum_{|j| \le k} \sup_{Q_\tau} |D^j_x u| + \sum_{|j| \le k} \langle\langle D^j_x u \rangle\rangle^{(\alpha,\beta)}_{Q_\tau}.$$

Через $\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\mathbb{R}^1_\tau)$ позначимо функціональний простір з нормою

$$\|u\|^{(4+\alpha,\alpha/3)}_{\mathbb{R}^1_\tau} = \sum_{3k+l \le 4} |D^k_{x_1} D^l_t u|^{(\alpha,\alpha/3)}_{\mathbb{R}^1_\tau} + \sum_{3k+l \le 4} \langle D^k_{x_1} u \rangle^{(\frac{4+\alpha-k}{3})}_{t,\mathbb{R}^1_\tau}.$$

Будемо говорити, що крива Γ належить до класу $C^{k+\alpha}$ ($k = 1, 2, ..$), якщо кожна точка $\xi \in \Gamma$ має окіл, в якому Γ є графіком функції класу $C^{k+\alpha}$ і, значить, існує дифеоморфізм Z_ξ, який спрямлює дану криву поблизу точки ξ. Відповідно належність функції $u(x,t)$ до простору $\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$ означатиме, що локально функція

$\left(Z_\xi^{-1}u\right)(z,t)$, де $(z,t)\in\mathbb{R}^1_\tau$, належатиме до класу $\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}$. У свою чергу сім'я кривих γ_τ належить до класу $\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}$, якщо існує параметризація (див. нижче (9)) $\gamma(t)=\{(x,t):\ x=\Upsilon(\xi,t),\ \xi\in\Gamma\}$ така, що $\Upsilon\in\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$.

Запис $u\in\mathcal{E}_0^{k+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau)$ $(u\in\mathcal{P}_0^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau))$ означатиме, що $u\in\mathcal{E}^{k+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau)$ $(u\in\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau))$ і $u|_{t=0}=0$; якщо ж $u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=0$, тоді $u\in\mathcal{P}_{00}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$. Якщо для вектора $u=(u_1,u_2)$, наприклад, $u_i\in\mathcal{E}_0^{3+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau)$, $i=1,2$, тоді, для скорочення запису, домовимося писати $u\in\mathcal{E}_0^{3+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau)$.

Основним результатом даної роботи є наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $\Gamma\in C^{6+\alpha}$, $S\in C^{5+\alpha}$, тоді для достатньо малого τ існує єдиний класичний розв'язок задачі (2)-(7), причому $u^\pm\in\mathcal{E}^{3+\alpha,\alpha/3}(Q^\pm_\tau)$, $v\in\mathcal{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(Q^-_\tau)$, $\gamma_\tau\in\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}$.*

У подальшому розгляді нам знадобиться інтерполяційна нерівність (див. с. 43 монографії [14]):

$$|u|_Q^{(q)}\le C\left(|u|_Q^{(r)}\right)^{\frac{q-p}{r-p}}\left(|u|_Q^{(p)}\right)^{\frac{r-q}{r-p}},\tag{8}$$

де $|u|_Q^{(q)}$ – норма у просторі $C^q(Q)$, $0\le p<q<r$, стала C залежить від p, q, r, Q.

3. Зведення до задачі в зафіксованих областях. Нехай $\xi\in\Gamma$ і $n_0(\xi)$ – одинична нормаль до Γ. Вважаємо, що для достатньо малого λ_0 існує окіл $\mathcal{N}$ кривої Γ такий, що кожну точку $x\in\mathcal{N}$ можна єдиним способом записати у вигляді $x=\xi+\lambda n_0(\xi)$, $|\lambda|\le\lambda_0$, причому λ є регулярною функцією змінної x (див. [3]). Для достатньо малих значень t вільна межа $\gamma(t)$ міститься в $\mathcal{N}$ і може бути задана рівнянням $\lambda=\rho(\xi,t)$, тобто

$$\gamma(t)=\{x\in\mathbb{R}^2:\ x=\xi+\rho(\xi,t)n_0(\xi)\ \ \xi\in\Gamma\}.\tag{9}$$

Позначимо через $N(x)$ і $\rho_*(\xi,t)$ продовження із збереженням класу векторного поля $n_0(\xi)$ і функції $\rho(\xi,t)$ з Γ на Ω, а саме: $N\in C^{5+\alpha}(\Omega)$, $\rho_*\in\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Omega_\tau)$, якщо $n_0\in C^{5+\alpha}(\Gamma)$, $\rho\in\mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$ (див. [15], а також леми про продовження в §6.9 монографії [16]).

Далі визначимо перетворення координат ([3], [15]) $e_\rho:\Omega_\pm\to\Omega_\pm(t)$ за допомогою формул

$$x=e_\rho(y,t)\equiv y+N(y)\rho_*(y,t),\quad y\in\Omega.$$

Елементи його матриці Якобі мають вигляд $J_{km}=\delta_{km}+\frac{\partial(N_kr)}{\partial y_m}$. Позначимо через J^T – транспоновану матрицю, J^{-1} – обернену матрицю з елементами $\{J^{km}\}_{1\le k,m\le 2}$, $J^{-T}=(J^{-1})^T$. Зазначимо, що $J|_{t=0}=I$, де I одинична матриця.

Маємо (див. [15], [17])

$$\nabla_x|_{x=e_\rho(y,t)}\equiv\nabla_\rho=J^{-*}\nabla_y,\quad n_\rho=\frac{J^{-*}n_0}{|J^{-*}n_0|},\quad V_n=\frac{(N\cdot J^{-T}n_0)}{|N\cdot J^{-T}n_0|}\rho_t.$$

Таким чином, у координатах $\{y\}$, для невідомих функцій $U^{\pm}(y,t) = u^{\pm}(e_\rho(y,t),t)$, $V(y,t) = v(e_\rho(y,t),t)$, $\rho(y,t)$ задача (2)-(7) набуває вигляду

$$\begin{aligned} L_\rho U^{\pm} = 0, \quad (y,t) \in Q_\tau^{\pm}, \\ \Delta_\rho V = 0, \quad (y,t) \in Q_\tau^{-}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \rho|_{t=0} = 0,\ y \in \Gamma,\ U^- = 0,\ \tfrac{\partial V}{\partial n_S} = 0, \quad (y,t) \in S_\tau, \\ [U] = 0,\ \big[\sigma_{n_\rho}(U)\big] = \sigma^0_{n_\rho}, \quad (y,t) \in \gamma_\tau, \\ V = \varkappa n_\rho + G_\rho(U^-),\ \rho_t = H_\rho(V), \quad (y,t) \in \gamma_\tau, \end{gathered} \tag{11}$$

де

$$\begin{gathered} L_\rho U^{\pm} = \tfrac{1}{1-2\nu}\nabla_\rho(\nabla_\rho \cdot U) + \nabla^2_\rho U,\ \Delta_\rho V = \nabla^2_\rho V, \\ \sigma_{n_\rho}(U) = \tfrac{E}{1+\nu}\left[\tfrac{1}{2}(\nabla_\rho U + (\nabla_\rho U)^T + \tfrac{\nu}{1-2\nu}(\nabla_\rho \cdot U)I\right] J^{-T} n_0, \\ \sigma^0_{n_\rho} = \sigma^0_{ss} J^{-T} n_0, \quad G_\rho(U^-) = -l\sigma^0_{ss}((\nabla_\rho \cdot U) + 1/2), \\ H_\rho(V) = \tfrac{(J^{-T}n_0 \cdot \nabla_\rho V)}{(N \cdot J^{-T} n_0)}, \quad \varkappa_\rho = -(\nabla \cdot n) = -(\nabla_\rho \cdot n_\rho). \end{gathered} \tag{12}$$

4. Лінеаризація. Значення функцій $U^{\pm}$, V при $t = 0$, тобто $U_0^{\pm} = U^{\pm}|_{t=0}$, $V_0 = V|_{t=0}$ знаходяться наступним чином. Спочатку побудуємо функції $U_0^{\pm} \in C^{4+\alpha}(\Omega_{\pm})$ за умовами

$$\begin{gathered} L_0 U_0^{\pm} = 0, \quad y \in \Omega_{\pm}, \\ U_0^- = 0,\ y \in S,\ [U_0] = 0,\ [\sigma_{n_0}(U_0)] = \sigma^0_{n_0}, \end{gathered}$$

а потім функцію $V_0 \in C^{3+\alpha}(\Omega_-)$ таку, що

$$\begin{gathered} \Delta V_0 = 0, \quad y \in \Omega_-, \\ \tfrac{\partial V_0}{\partial n_S} = 0, \quad y \in S,\ V = \varkappa_0 + G_0(U_0^-), \quad y \in \Gamma. \end{gathered}$$

Існування функцій $U^{\pm}$ випливає з результатів [18], [19, ч.1], а функції V_0 – розділу 6 монографії [16].

Для подальшої лінеаризації на початкових даних задачі (10)-(12), зробимо заміну $U^{\pm} = U_0^{\pm} + \rho_*(N \cdot \nabla)U_0^{\pm} + \mathcal{U}^{\pm}$, $V = V_0 + \rho_*(N \cdot \nabla)V_0 + \mathcal{V}$, де $\mathcal{U}^{\pm}$, $\mathcal{V}$ – нові невідомі функції (див. [3]). Далі введемо "варіації" функцій і операторів, що залежать від ρ (див. [15]), наприклад, $\delta L_0 = \frac{d}{d\mu} L_{\mu\rho}|_{\mu=0}$, аналогічно $\delta\Delta_0$, $\delta\sigma_{n_0}$, $\delta\sigma^0_{n_0}$, $\delta\varkappa_0$, δG_0, δH_0.

Користуючись формулами, одержаними в роботі [15], маємо

$$\delta J_{0,km} = \frac{\partial(N_k\rho_*)}{\partial y_m}, \quad \delta J_0^{km} = -\frac{\partial(N_k\rho_*)}{\partial y_m}, \quad \frac{\partial J^{km}}{\partial y_i} = -J^{kj}\frac{\partial^2(N_k\rho_*)}{\partial y_i \partial y_q} J^{qm}.$$

Отже отримуємо

$$\delta L_0 U_0^{\pm} = -L_0(\rho_*(N \cdot \nabla)U_0^{\pm}),\ \delta\Delta_0 = -\Delta(\rho_*(N \cdot \nabla)V_0),$$

$$\delta\varkappa_0 = \Delta_\Gamma \rho - \varkappa_0^2 \rho,\ \delta G_0(U_0^-) = -G_0(\rho_*(N \cdot \nabla)U_0^-) - \sigma^0_{ss} l \rho_* N_k \tfrac{\partial^2 U^-_{0,i}}{\partial y_k \partial y_i},$$

$$\delta H_0(V_0) = -H_0(\rho_*(N \cdot \nabla)V_0) + \rho_* \tfrac{\partial^2 V_0}{\partial n_0^2} - (\nabla V_0 \cdot \nabla_\gamma \rho_*),$$

$$\delta\sigma_{n_0}(U_0^{\pm}) = -\sigma_{n_0}(\rho_*(N \cdot \nabla)U_0^{\pm}) + b_1(\rho_*),\ \ \delta\sigma^0_{n_0} = -\sigma^0_{ss}\nabla\rho,$$

де $b_1(\rho_*)$ – вектор з компонентами $\| - \sigma_{ij}(U_0^{\pm})\frac{\partial \rho_*}{\partial y_j} + \rho_* n_{0,j} N_k \frac{\partial \sigma_{ij}(U_0^{\pm})}{\partial y_k}\|_{1\le i\le 2}$.

Після відповідних перетворень задачу (10)-(12) можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered} L_0\mathcal{U}^{\pm} = \mathcal{F}^{\pm}(\rho,\mathcal{U}^{\pm}),\ \ (y,t)\in Q_\tau^{\pm}, \\ \Delta\mathcal{V} = \widetilde{\mathcal{F}}(\rho,\mathcal{V}),\ \ (y,t)\in Q_\tau^{-}, \\ \mathcal{U}^{-}=0,\ \ \tfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial n_S}=0,\ \ (y,t)\in S_\tau,\ \ \rho(y,0)=0,\ \ y\in\Gamma, \\ [\mathcal{U}] = \mathcal{J}(\rho),\ \ [\sigma_{n_0}(\mathcal{U})] = \mathcal{B}_1(\rho)+\mathcal{B}_2(\rho,\mathcal{U}),\ \ (y,t)\in\Gamma_\tau, \\ \mathcal{V} - G_0(\mathcal{U}^-) - \Delta_\Gamma\rho = \mathcal{G}_1(\rho) + \mathcal{G}_2(\rho,\mathcal{U}^-),\ \ (y,t)\in\Gamma_\tau, \\ \rho_t - \tfrac{\partial\mathcal{V}}{\partial n_0} = \mathcal{H}_1(\rho)+\mathcal{H}_2(\rho,\mathcal{V}) + \psi(V_0),\ \ (y,t)\in\Gamma_\tau, \end{gathered} \tag{13}$$

де

$$\begin{gathered} \mathcal{F}^{\pm}(\rho,\mathcal{U}^{\pm}) = -(L_\rho - L_0 - \delta L_0)U_0^{\pm} - (L_\rho - L_0)(\rho_*(N\cdot\nabla)U_0^{\pm} + \mathcal{U}^{\pm}), \\ \widetilde{\mathcal{F}}_{\mathcal{V}}(\rho,\mathcal{V}) = -(\Delta_\rho - \Delta - \delta\Delta_0)V_0 - (\Delta_\rho - \Delta)(\rho_*(N\cdot\nabla)V_0 + \mathcal{V}), \\ \mathcal{J}(\rho) = -\rho_*\left[(n_0\cdot\nabla)U_0\right],\ \ \mathcal{B}_1(\rho) = b_1(\rho_*) + \delta\sigma_{n_0}^0, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_2(\rho,\mathcal{U}) = -\left[(\sigma_{n_\rho} - \sigma_{n_0} - \delta\sigma_{n_0})(U_0) + (\sigma_{n_\rho} - \sigma_{n_0})(\rho_*(N\cdot\nabla)U_0^{\pm} + \mathcal{U}^{\pm})\right] + \\ +\sigma_{n_\rho}^0 - \sigma_{n_0}^0 - \delta\sigma_{n_0}^0,\ \ \mathcal{G}_1(\rho) = -\sigma_{ss}^0 l/2 - \sigma_{ss}^0 l\rho_*\tfrac{\partial(\nabla\cdot U_0^-)}{\partial n_0} - \varkappa_0^2\rho_*, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{G}_2(\rho,\mathcal{U}^-) = \varkappa_\rho - \varkappa_0 - \delta\varkappa_0 + (G_\rho - G_0)(\rho_*(N\cdot\nabla)U_0^- + \mathcal{U}^-), \\ \psi(V_0) = H_0(V_0),\ \ \mathcal{H}_1(\rho) = \rho_*\tfrac{\partial^2 V_0}{\partial n_0^2} - (\nabla V_0\cdot\nabla_\Gamma\rho_*), \\ \mathcal{H}_2(\rho,\mathcal{V}) = (H_\rho - H_0 - \delta H_0)(V_0) + (H_\rho - H_0)(\rho_*(N\cdot\nabla)V_0 + \mathcal{V}). \end{gathered}$$

5. Лінійна задача. Спочатку розглянемо наступну задачу для оператора Лапласа з динамічною крайовою умовою

$$\begin{gathered} \Delta v = \psi,\ \ (x,t)\in Q_\tau^-, \\ \tfrac{\partial v}{\partial n_S} = 0,\ \ (x,t)\in S_\tau,\ \ \rho(x,0)=0,\ \ x\in\Gamma, \\ v - \Delta_\Gamma\rho = \phi,\ \ (x,t)\in\Gamma_\tau, \\ \rho_t - \tfrac{\partial v}{\partial n_0} = \varphi,\ \ (x,t)\in\Gamma_\tau, \end{gathered} \tag{15}$$

де $\psi\in\mathcal{E}_0^{\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\phi\in\mathcal{E}_0^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$, $\varphi\in\mathcal{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$. Задача (15) різними методами досліджувалася, наприклад, у роботах [3], [6], [8]. У даній роботі використовується метод побудови регуляризатора (див. [6], [13], [20], [7]), а також деякі підходи роботи [3].

Нагадаємо деякі поняття з §4 розділу 4 монографії [13]. Нехай області $\omega^{(k)}$, $\Omega^{(k)}$ покривають область Ω таким чином, що частина кривої $\Gamma^{(k)} = \Gamma\cap\omega^{(k)}$ задається у локальній системі координат рівнянням $y_2 = F^{(k)}(y_1)$. Якщо $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - F^{(k)}(y_1)$, тоді через Z_k позначимо оператор, який локально зіставляє кожній функції $u(z)$ ту саму функцію при переході від координат $\{z\}$ до вихідних координат $\{x\}$. Окрім того, нехай за допомогою функцій $\zeta^{(k)}$, $\eta^{(k)}$, побудовано розбиття одиниці в Ω, тобто $\sum\limits_k \zeta^{(k)}(x)\eta^{(k)}(x) = 1$, $x\in\Omega$.

Далі наступну модельну задачу, із розв'язання якої встановлено класи регулярності задачі (15):

$$\begin{gathered} \Delta v = 0, \ \ (z,t) \in \Pi_\tau, \\ \rho(z,0) = 0, \ \ z \in \Sigma, \\ v - \rho_{z_1 z_1} = 0, \ \ (z,t) \in \Sigma_\tau, \\ \rho_t + v_{z_2} = \varphi, \ \ (z,t) \in \Sigma_\tau, \end{gathered} \tag{16}$$

де $\Pi = \{z \in \mathbb{R}^2 : \ \ z_2 > 0\}$, $\Sigma = \{z \in \mathbb{R}^2 : \ \ z_2 = 0\}$.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in \mathcal{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Sigma_\tau)$, тоді існує єдиний розв'язок задачі (16) такий, що $v \in \mathcal{E}_0^{2+\alpha,\alpha/3}(\Sigma_\tau)$, $\rho \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha,\alpha/3}(\Sigma_\tau)$.*

Як і в роботі [3], доведення даної леми засновано на представленні функції ρ у вигляді інтеграла

$$\rho(z_1,t) = \int\limits_0^t ds \int\limits_{\mathbb{R}^1} G(z_1-\xi_1, t-s)\varphi(\xi_1,s)d\xi_1,$$

де $G(z_1,t) = \int\limits_0^\infty exp(-t\lambda^3)\cos(\lambda z_1)d\lambda$ при $t > 0$ і $G(z_1,t) = 0$ при $t < 0$. За допомогою методу інтегрування частинами (див. [3]), одержуємо оцінки ядра $G(z_1,t)$:

$$|D_t^k D_{z_1}^l G(z_1,t)| \le Ct^{-\frac{3k+l+1}{3}} \frac{1}{1+(z/t^{1/3})^{3k+m(k)+l+1}},$$

де $m(k) = 1$, якщо $k = 0$ або k парне число, і $m(k) = 0$, якщо k – непарне.

Лема 2. *Нехай $\vartheta_0 \in {}^{1+\alpha}(\Gamma)$, тоді існує функція $\rho_0 \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$ така, що $\rho_{0,t}(x,0) = \vartheta_0(x)$ при $x \in \Gamma$.*

Доведення. Позначимо через $\mathfrak{N}_\Gamma$ множину індексів k таких, що $\omega^{(k)} \cap \Gamma \ne \varnothing$. Зобразимо функцію ϑ_0 у вигляді $\vartheta_0 = \sum\limits_{k \in \mathfrak{N}_\Gamma} \eta^{(k)} Z_k \theta_k$, де $\theta_k(z) = Z_k^{-1}(\zeta^{(k)}\vartheta_0)$. Розглянемо задачі виду (16), в яких $\varphi = \theta_k$ і позначимо розв'язки цих задач через $p_k(z_1,t)$. Введемо функцію $\rho_0 = \sum\limits_{k \in \mathfrak{N}_\Gamma} \eta^{(k)} Z_k p_k$. Очевидно, що $\rho_{0,t}(x,0) = \vartheta_0(x)$ при $x \in \Gamma$ і (див. попередню лему) $\rho_0 \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$. $\square$

Далі, використовуючи класичну теорію еліптичних рівнянь другого порядку (див., наприклад, розділ 6 монографії [16]), достатньо розглянути задачу (15) у випадку $\psi = \phi = 0$.

Позначимо через $\mathbb{D}$ оператор, який зіставляє функції $f \in \mathcal{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$ нормальну похідну $\mathbb{D}f = \frac{\partial v_f}{\partial n}|_\Gamma$ розв'язку v_f крайової задачі

$$\begin{gathered} \Delta v_f = 0, \ \ (x,t) \in Q_\tau^-, \\ \tfrac{\partial v_f}{\partial n_S} = 0, \ \ (x,t) \in S_\tau, \ \ v_f = f, \ \ (x,t) \in \Gamma_\tau. \end{gathered}$$

Таким чином, задачу (15) (де $\psi = \phi = 0$) можна сформулювати, як задачу Коші на кривій Γ_τ для функції ρ, тобто

$$\mathbb{A}\rho \equiv \rho_t - \mathbb{D}(\Delta_\Gamma \rho) = \varphi, \ \ (x,t) \in \Gamma_\tau, \ \ \rho(x,0) = 0, \ \ x \in \Gamma.$$

Завдяки Лемі 2, можна вважати, що $\varphi \in \mathcal{E}_0^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$. Далі, аналогічно роботі [20] (див. також [6]), можна використати метод побудови регуляризатора (§7 розділу 4 монографії [13]) для доведення справедливості наступної леми.

Лема 3. *Нехай $\varphi \in \mathcal{E}_0^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$, тоді для довільного τ, існує єдиний розв'язок $\rho \in \mathcal{P}_{00}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$ задачі $\mathbb{A}\rho = \varphi$.*

Нарешті розглянемо лінійну задачу, відповідну до задачі (13), (14):

$$L_0\mathcal{U}^\pm = f^\pm, \ \ (x,t) \in Q_\tau^\pm, \tag{17}$$

$$\Delta\mathcal{V} = \widetilde{f}, \ \ (x,t) \in Q_\tau^-, \tag{18}$$

$$\mathcal{U}^- = 0, \ \ (x,t) \in S_\tau, \ \ [\mathcal{U}] = w, \ \ [\sigma_{n_0}(\mathcal{U})] = b, \ \ (x,t) \in \Gamma_\tau, \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial n_S} = 0, \ \ (y,t) \in S_\tau, \ \ \rho(y,0) = 0, \ \ y \in \Gamma, (y,t) \in \Gamma_\tau, \\ \mathcal{V} - G_0(\mathcal{U}^-) - \Delta_\Gamma\rho = g, \ \ (y,t) \in \Gamma_\tau, \\ \rho_t - \frac{\partial\mathcal{V}}{\partial n_0} = h, \ \ (y,t) \in \Gamma_\tau, \end{gathered} \tag{20}$$

де

$$\begin{gathered} f^\pm \in \mathcal{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^\pm), \widetilde{f} \in \mathcal{E}^{\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^-), w \in \mathcal{E}^{3+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau), \\ b \in \mathcal{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau), g \in \mathcal{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau), h \in \mathcal{E}^{1+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau). \end{gathered} \tag{21}$$

Якщо $\mathcal{U}^\pm \in \mathcal{E}^{3+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^\pm)$, $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\rho \in \mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$, позначимо

$$|||(\mathcal{U}^+,\mathcal{U}^-,\mathcal{V},\rho)||| = |\mathcal{U}^+|_{Q_\tau^+}^{3+\alpha,\alpha/3} + |\mathcal{U}^-|_{Q_\tau^-}^{3+\alpha,\alpha/3} + |\mathcal{V}|_{Q_\tau^-}^{2+\alpha,\alpha/3} + \|\rho\|_{\Gamma_\tau}^{4+\alpha,\alpha/3}.$$

З результатів роботи [18] випливає, що існує єдиний розв'язок задачі (17), (19): $\mathcal{U}^\pm \in \mathcal{E}^{3+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^\pm)$. З Леми 3 робимо висновок про існування $\mathcal{V} \in \mathcal{E}^{2+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^-)$, $\rho \in \mathcal{P}^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)$ – єдиного розв'язку задачі (18), (20). Таким чином, має місце наступна теорема.

Теорема 2. *Нехай виконано умови (21), тоді існує єдиний розв'язок задачі (17)-(20), причому справедлива оцінка*

$$\begin{gathered} |||(\mathcal{U}^+,\mathcal{U}^-,\mathcal{V},\rho)||| \le C\Big(|f^+|_{Q_\tau^+}^{1+\alpha,\alpha/3} + |f^-|_{Q_\tau^-}^{1+\alpha,\alpha/3} + |\widetilde{f}|_{Q_\tau^-}^{\alpha,\alpha/3} + \\ + |w|_{\Gamma_\tau}^{3+\alpha,\alpha/3} + |b|_{\Gamma_\tau}^{2+\alpha,\alpha/3} + |g|_{\Gamma_\tau}^{2+\alpha,\alpha/3} + |h|_{\Gamma_\tau}^{1+\alpha,\alpha/3}\Big) \end{gathered} \tag{22}$$

6. Доведення Теореми 1. Для $r > 0$ визначимо множину $K_r = \{\mathcal{U}^\pm \in \mathcal{E}_0^{3+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^\pm),\ \mathcal{V} \in \mathcal{E}_0^{2+\alpha,\alpha/3}(Q_\tau^-),\ \rho \in \mathcal{P}_0^{4+\alpha,\alpha/3}(\Gamma_\tau)\ :\ |||(\mathcal{U}^+,\mathcal{U}^-,\mathcal{V},\rho)||| \le r\}$. Позначимо $W = (\mathcal{U}^+,\mathcal{U}^-,\mathcal{V},\rho)$, $\widehat{W} = (\widehat{\mathcal{U}}^+,\widehat{\mathcal{U}}^-,\widehat{\mathcal{V}},\widehat{\rho})$, $\theta = (0,0,0,0)$. В операторній формі задача (13), (14) набуває вигляду

$$AW = F(W),$$

де A та F представляють відповідно ліві і праві частини даних співвідношень. Далі визначимо оператор Φ, який зіставляє елементу $\widehat{W} \in K_r$ розв'язок W задачі $AW = F(\widehat{W})$ (див. [3], [15]).

Насамперед зазначимо, що існує достатньо мале значення параметра ϵ таке, що при $\sup\limits_{t\in(0,\tau)} |\rho_*|_\Omega^{(1)} \leq \epsilon$ величини $detJ$, $(n_0 \cdot J^{-T} n_0)$, $|J^{-T} n_0|$ є строго додатними, причому значення ϵ залежить від кривої Γ, області Ω та операторів продовження $n_0 \to N$ і $\rho \to \rho_*$. Оскільки, за конструкцією оператору продовження, маємо

$$\sup_{t\in(0,\tau)} |\rho_*|_\Omega^{(1)} \leq C \sup_{t\in(0,\tau)} |\rho|_\Gamma^{(1)} \leq C\tau^{\alpha/3} \|\rho\|_{\Gamma_\tau}^{(4+\alpha,\alpha/3)},$$

можна обрати $\tau = \tau_1(\epsilon, r)$ настільки малим, що $C\tau^{\alpha/3} r \leq \epsilon$, і, як наслідок, праві частини (14) будуть коректно визначеними при $\tau \leq \tau_1(\epsilon, r)$ і $W \in K_r$.

Лема 4. *При $W \in K_r$, $\widehat{W} \in K_r$ справедливі оцінки*

$$|\mathcal{J}(\rho) - \mathcal{J}(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(3+\alpha,\frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{B}_1(\rho) - \mathcal{B}_1(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(2+\alpha,\frac{\alpha}{3})} +$$
$$+|\mathcal{G}_1(\rho) - \mathcal{G}_1(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(2+\alpha,\frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{H}_1(\rho) - \mathcal{H}_1(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{3})} \leq C(r)\tau^{\frac{3-\alpha}{12}} \|\rho - \widehat{\rho}\|_{\Gamma_\tau}^{4+\alpha,\alpha/3}. \tag{23}$$

$$|\mathcal{F}^+(W) - \mathcal{F}^+(\widehat{W})|_{Q_\tau^+}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{F}^-(W) - \mathcal{F}^-(\widehat{W})|_{Q_\tau^-}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{3})} +$$
$$+|\widetilde{\mathcal{F}}^-(W) - \widetilde{\mathcal{F}}^-(\widehat{W})|_{Q_\tau^-}^{(\alpha,\frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{B}_2(\rho) - \mathcal{B}_2(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(2+\alpha,\frac{\alpha}{3})} + |\mathcal{G}_2(\rho) - \mathcal{G}_2(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(2+\alpha,\frac{\alpha}{3})} + \tag{24}$$
$$+|\mathcal{H}_2(\rho) - \mathcal{H}_2(\widehat{\rho})|_{\Gamma_\tau}^{(1+\alpha,\frac{\alpha}{3})} \leq C(r)\left(\tau^{\frac{\alpha}{3}} + \tau^{\frac{3-\alpha}{12}}\right) |||W - \widehat{W}|||.$$

Оцінка (23) є наслідком нерівності

$$|\rho|_{\Gamma_\tau}^{3+\alpha,\alpha/3} \leq C\tau^{\frac{3-\alpha}{12}} |\rho|_{\Gamma_\tau}^{4+\alpha,\alpha/3},$$

яка, у свою чергу, випливає з інтерполяційної нерівності (8).

При доведенні оцінки (24) ми використовуємо методи роботи [15], розділу 8.5.3 монографії [21] та нерівності вигляду

$$|uv|_{Q_\tau}^{(k+\alpha,\frac{\alpha}{3})} \leq C\tau^{\frac{\alpha}{3}} |u|_{Q_\tau}^{(k+\alpha,\frac{\alpha}{3})} |v|_{Q_\tau}^{(k+\alpha,\frac{\alpha}{3})},$$

де $u, v \in \mathcal{E}^{(k+\alpha,\frac{\alpha}{3})}(Q_\tau)$, $(k = 0, 1, 2, .)$. З оцінок (23), (24) і оцінки (22) розв'язку лінійної задачі (17)-(20) випливають нерівності

$$|||\Phi(W) - \Phi(\widehat{W})||| \leq C(r)(\tau^{\frac{3-\alpha}{12}} + \tau^{\frac{\alpha}{3}})|||W - \widehat{W}||| \leq \frac{1}{2}|||W - \widehat{W}|||,$$

якщо $\tau \leq \tau_2(r)$, де $\tau_2(r)$ таке, що $C(r)(\tau_2^{\frac{3-\alpha}{12}} + \tau_2^{\frac{\alpha}{3}})r \leq \frac{1}{2}$.

З оцінки (22) отримуємо також оцінку $|||\Phi(\theta)||| \leq C_*$. Звідси маємо

$$|||\Phi(W)||| \leq |||\Phi(W) - \Phi(\theta)||| + |||\Phi(\theta)||| \leq \frac{r}{2} + C_*.$$

Далі, спочатку візьмемо r достатньо великим: $r = 2C_*$, а потім, для вже зафіксованого r, покладемо $\tau = \min\{\tau_1(r,\epsilon), \tau_2(r)\}$. Тоді

$$|||\Phi(W) - \Phi(\widehat{W})||| \leq \frac{1}{2}|||W - \widehat{W}|||, \quad |||\Phi(W)||| \leq r$$

для довільних елементів W, $\widehat{W} \in K_r$, і твердження Теореми 1 випливає з теореми Банаха про нерухому точку стискального відображення.

1. *Thornton K., Ågren J., Voorhees P.W.* Modelling the evolution of phase boundaries in solids at thew meso- and nano-scale // Acta Materalia. – 2003. – V. 51. – С. 5675-5710.
2. *Akaiwa N., Thornton K., Ågren J., Voorhees P.W.* Large-scale simulations of microstructural evolution in elastically stressed solids // Journal of Comp. Physics. – 2001. – V. 173. – С. 61-86.
3. *Базалий Б.В.* Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр.мат.журнал. – 1997. – Т. 49. – С. 1299-1315.
4. *Гусаков В.Н., Дегтярев С.П.* Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации // Укр. матем. журнал. – 1989. – 41, No. 9. – С. 1192-1198.
5. *Фролова Е.В.* Квазистационарное приближение для задачи Стефана // Проблемы мат. анализа. – 2005. – Вып. 31. – С. 167-179.
6. *Mucha P.* On the weak solutions to the Stefan problem with Gibbs-Thompson correction // Differential and integral equations. – V. 20. – 2007. – P. 769-792.
7. *Васильева Н.В.* Об одной краевой задаче со старшими производными в граничном условии, возникающей при исследовании задачи Hele-Shaw с нерегулярной границей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – Т. 7. – С. 33-44.
8. *Chen X., Hong J., Yi F.* Existence, uniqueness and regularity of the Mullins-Sekerka problem // Commun. in Partial Differential Equations. – 1996. – V. 21. – P. 1705-1727.
9. *Friedman A., Reitich F.* Quasi-static motion of a capillary drop, I: the two-dimensional case // Journal of Differential Equations. – 2002. – V. 178. – P. 212-263.
10. *Gunther M., Prokert, G.* On Stokes flow with variable and degenerate surface tension coefficient // Nonlinear Differ. Equ. Appl. – 2005. – V. 12. – P. 21-60.
11. *Bum Ja Jin* Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface // Nonlinear Analysis. – 2002. – V. 51. – P. 1009–1029.
12. *Бокало М.М., Дмитришин Ю.Б.* Нелінійна динамічна крайова задач без початкової умови для квазілінійних еліптичних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2007. – Т. 17. – С. 1-19.
13. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
14. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 176 с.
15. *Бижанова Г.И., Солонников В.А.* О задачах со свободными границами для параболических уравнений второго порядка // Алгебра и анализ. – 2000. – Т. 12. – С. 98-139.
16. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – Москва: Наука, 1989. – 464 с.
17. *Сарсекеева А.С.* Исследование задачи Стефана с условием Гиббса-Томпсона на свободной границе // Математический журнал. – 2002. – Т. 2. – С.61-69.
18. *Шефтель З.Г.* Общая теория граничных задач для эллиптических систем с разрывными коэффициентами // Укр. матем. журнал. – 1966. – Т. 18. – С. 132-136.
19. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. – Москва: Мир, 1974. – 159 с.
20. *Краснощек Н.В.* Об одной начально-краевой задаче для стационарной системы теории упругости с дополнительным динамическим условием на границе // Труды ИПММ. – 2010. – Т. 21. – С. 137-149.
21. *Lunardi A.* Analytic semigroup and optimal regularity in parabolic problems. – Basel: Birkhäuser Verlag, 1995. – 340 p.

M. V. Krasnoschok

Classical solvability of a diffusion problem in solid with free boundary.

We consider a generalization of one-phase quasi-stationary Stefan problem with regard for the curvature of the free boundary. The existence of a classical solution of initial-boundary problem with free boundary for stationary system of elasticity and Laplace equation is proved. It is used the method of construction of regularizer and the contraction mapping principle.

Keywords: *free boundary, elasticity, Schauder estimates.*

Н. В. Краснощёк

Классическая разрешимость задачи диффузии в упругом теле со свободной границей.

Исследована задача, которую можно рассматривать как обобщение однофазной квазистационарной задачи Стефана, учитывающей кривизну свободной границы. Доказано существование классического решения начально-краевой задачи со свободной границей для стационарной системы теории упругости и уравнения Лапласа. При этом используются метод построения регуляризатора и теорема о неподвижной точке сжимающего отображения.

Ключевые слова: *свободная граница, упругость, оценки Шаудера.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
krasnoschok@iamm.ac.donetsk.ua
Получено 09.09.11