УДК 517.55

©2011. **Ю. С. Коломойцев**

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ

В работе показана точность теоремы, дающей достаточное условие для мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D)$, $0<p\le 1$, в терминах совместного убывания функции-мультипликатора и ее производных на бесконечности.

Ключевые слова: *мультипликатор, пространства Харди $H_p(D)$, $0<p\le 1$, неравенство Бернштейна.*

1. Введение. Пусть $D=\{\, z\in\mathbb{C} \,:\, |z|<1\}$ – единичный круг. Аналитическая в единичном круге D функция f принадлежит пространству $H_p(D)$, если

$$\|f\|_{H_p}=\sup_{0<\rho<1}\left(\int_0^{2\pi}|f(\rho e^{it})|^p dt\right)^{\frac1p}<\infty.$$

Хорошо известно, что каждая функция $f\in H_p(D)$, $p>0$, имеет некасательный предел $f(e^{it})$ для почти всех $t\in[0,2\pi)$, принадлежащий пространству $L_p(0,2\pi)$, т.е. пространству измеримых, 2π-периодических функций с конечной (квази-)нормой

$$\|f\|_p=\|f(e^{it})\|_p=\left(\int_0^{2\pi}|f(e^{it})|^p dt\right)^{\frac1p}.$$

Имеет место равенство: $\|f\|_{H_p}=\|f\|_p$ (см. [1]).

Любая функция из $H_p(D)$, $p>0$, раскладывается в круге D в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k,$$

где c_k – коэффициенты ряда Тейлора функции f.

Числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ называется мультипликатором в $H_p(D)$, если для любой функции $f\in H_p(D)$ с коэффициентами Тейлора $\{c_k\}$

$$(\Lambda f)(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k c_k z^k\in H_p(D)$$

и существует константа γ такая, что для любой функции $f\in H_p(D)$

$$\|\Lambda f\|_{H_p}\le\gamma\|f\|_{H_p},\quad \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}=\inf\gamma.$$

Если $\varphi:\ [0,\infty)\to\mathbb{C}$, то будем писать $\varphi\in M_p$, если

$$\|\varphi\|_{M_p}=\sup_{\varepsilon>0}\|\{\varphi(\varepsilon k)\}\|_{M_p}<\infty.$$

Приведем здесь несколько свойств мультипликаторов (см., например, [2], [3, гл. 7]): $M_p \subset M_q$ при $0 < p \le q \le 2$; $\|\{\lambda_k\mu_k\}\|_{M_p} \le \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}\|\{\mu_k\}\|_{M_p}$, $p > 0$; $\|\{\lambda_k + \mu_k\}\|_{M_p}^p \le \|\{\lambda_k\}\|_{M_p}^p + \|\{\mu_k\}\|_{M_p}^p$, $p \in (0,1]$.

В работе [2] Р.М. Тригубом была доказана следующая теорема, дающая достаточное условие для мультипликаторов степенных рядов в пространствах Харди $H_p(D)$, $0 < p \le 1$, в терминах совместного убывания функции-мультипликатора и ее производных на бесконечности.

Теорема A. *Пусть* $0 < p \le 1$, *а* $\varphi \in C^r[0,\infty)$ *при некотором натуральном* $r > 1/p - 1/2$. *Если*

$$|\varphi(x)| \le \frac{c}{1+x^{\gamma_0}}, \quad \gamma_0 > 0, \quad |\varphi^{(r)}(x)| \le \frac{c}{1+x^{\gamma_r}}, \quad \gamma_r > 0,$$

где

$$\min(\gamma_r - \gamma_0 - r, 0) + \frac{2\gamma_0 rp}{2-p} > 0, \tag{1}$$

то $\varphi \in M_p$.

Данная теорема имеет применения при доказательстве целого ряда теорем для аналитических функций из пространства Харди (см., например, [3, гл. 7] и [4]).

Вит.В. Волчковым в [5] была показана точность теоремы A для некоторых значений γ_0 и γ_r. В частности, был получен следующий результат:

Теорема B. *Для любого* $\gamma \in (0, 1/2)$ *и* $r \in \mathbb{N}$ *найдется функция* $\varphi \in C^r[0,\infty)$ *такая, что* $\varphi(x) = O(\frac{1}{x^\gamma})$, $\varphi^{(r)}(x) = O(\frac{1}{x^\gamma})$ *при* $x \to +\infty$, *но* $\varphi \notin M_p$ *ни при каком* $p \in (0,1]$.

Наша цель показать точность условия (1) теоремы A при каждом фиксированном $p \in (0,1]$. Имеет место:

Теорема 1. *Пусть* $0 < p \le 1$, *натуральное* $r > 1/p - 1/2$ *и положительные числа* γ_0 *и* γ_r *таковы, что*

$$\min(\gamma_r - \gamma_0 - r, 0) + \frac{2\gamma_0 rp}{2-p} < 0\,. \tag{2}$$

Тогда найдется функция $\varphi \in C^r[0,\infty)$ *такая, что*

$$|\varphi(x)| \le \frac{c}{1+x^{\gamma_0}}\,, \quad |\varphi^{(r)}(x)| \le \frac{c}{1+x^{\gamma_r}}\,,$$

но $\varphi \notin M_p$

Всюду в статье через c и C_j, $j = 1, 2, \ldots$, будем обозначать некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров.

2. Вспомогательные утверждения. Прежде чем перейти к формулировке вспомогательных утверждений введем необходимое обозначения.

Преобразование Фурье функции $f \in L(\mathbb{R})$ обозначим через

$$\mathcal{F}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-ixy} dy,$$

через $\mathcal{F}^{-1}$ обозначим обратное преобразование Фурье, т.е. $\mathcal{F}^{-1}f(x) = \mathcal{F}f(-x)$.

Контрпример в теореме 1 будем строить с помощью специальной функции-мультипликатора

$$m_{\alpha,\beta}(x) = \psi(x)\frac{e^{i|x|^\alpha}}{|x|^\beta},$$

где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\psi(x) = 0$ при $|x| < 1/2$ и $\psi(x) = 1$ при $|x| \geq 1$. Отметим, что функция $m_{\alpha,\,\beta}$ была предметом специального изучения в работах [6]-[8] и [9, гл. 4]. Доказательство следующей леммы см. в [7].

Лемма 1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$ *и*

$$F_{\alpha,\beta;\,\varepsilon}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{e^{-\varepsilon|x|}m_{\alpha,\beta}(x)\}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

1. $F_{\alpha,\beta}(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} F_{\alpha,\beta;\,\varepsilon}(x)$ *существует для каждого* $x \neq 0$ *и* $F_{\alpha,\beta} \in C(\mathbb{R}\setminus\{0\})$*;*
2. $|F_{\alpha,\beta}(x)| \asymp |x|^{\frac{\beta-1+\frac{\alpha}{2}}{1-\alpha}} + \gamma(x)$ *при* $|x| \to 0$*, где* γ *– некоторая непрерывная функция;*
3. *Для каждого* $r \in \mathbb{N}$, $|F_{\alpha,\beta;\,\varepsilon}(x)| = O(|x|^{-r})$ *равномерно по* ε *при* $|x| \to \infty$*;*

В частности, $F_{\alpha,\beta} \in L_p(\mathbb{R})$, $0 < p \leq 1$, *если и только если* $\alpha(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) < \beta + \frac{1}{p} - 1$.

При доказательстве теоремы 1 мы будем использовать неравенство типа Бернштейна для аналитических полиномов, которое было получено независимо Е.С. Белинским [10] и Вит.В. Волчковым [11]:

Лемма 2. *Пусть* $0 < p \leq 1$, $\lambda > 0$ *и* $N \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\Big\|\sum_{k=0}^{N} k^\lambda c_k e^{ikt}\Big\|_p \leq cN^\lambda \Big\|\sum_{k=0}^{N} c_k e^{ikt}\Big\|_p,$$

где c *– константа, зависящая только от* p.

Заметим, что для полиномов с полным спектром данное неравенство имеет место только при $\lambda \in \mathbb{N} \cup (\frac{1}{p} - 1, \infty)$ (см. [12]).

Доказательство следующей леммы см., например, в [3, гл. 4].

Лемма 3. *Пусть* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset (-1,1)$ *и* $\varphi(0) = 1$. *Тогда*

$$\Big\|\sum_{k=-N}^{N} \varphi\left(\frac{k}{N}\right)e^{ikt}\Big\|_p \asymp \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{p}-1},$$

где $\asymp$ *– двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от* N.

Нам также понадобится формула суммирования Пуассона (см., например, [13, гл. 2]).

Лемма 4. *Если $f \in L(\mathbb{R})$, то ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k)$ сходится абсолютно п.в. к 2π-периодической локально интегрируемой функции*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+2\pi k) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}f(k) e^{ikx}.$$

3. Доказательство теоремы 1. Заметим, что если $\gamma_r - \gamma_0 \geq r$, то $\gamma_0 < 0$, а это противоречит условиям теоремы. Поэтому далее полагаем $\gamma_r - \gamma_0 < r$.

Нетрудно видеть, что $|m^{(r)}(x)| \leq c/|x|^{\beta - r(\alpha-1)}$. Таким образом, если положить $\gamma_0 = \beta$, а $\gamma_r = \beta - r(\alpha - 1)$, то условие (2) будет эквивалентно неравенству $\beta < \alpha(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$.

Рассмотрим сначала случай $0 < p < 1$. Предположим, что функция $m \in M_p$ и выберем $\lambda \in (0, \frac{1}{p} - 1)$ так, чтобы $\beta + (\frac{1}{p} - 1) - \lambda < \alpha(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$. Поскольку функция e^{-x} является мультипликатором (см. теорему A), то

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|} \psi(|k|) \frac{e^{i|k|^\alpha}}{|k|^{\beta-\lambda}} e^{ikt} \right\|_p \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda e^{ikt} \right\|_p, \tag{3}$$

где C_1 – некоторая константа, не зависящая от ε.

Покажем, что в правой части неравенства (3), действительно, стоит конечная величина. Для этого нам понадобится следующее разбиение единицы. Пусть $h_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $h_0(x) = 0$ при $x \leq -\frac{1}{2}$, $h_0(x) + h_0(-x) \equiv 1$, а $h_0(x) - \frac{1}{2}$ – нечетная функция. Положим

$$h_\nu(x) = h_0\left(\frac{x+1}{2^{\nu-1}} - \frac{3}{2}\right) h_0\left(\frac{3}{2} - \frac{x+1}{2^\nu}\right).$$

Очевидно, что при $\nu \in \mathbb{N}$ $\operatorname{supp} h_\nu \subset [2^{\nu-1} - 1, 2^{\nu+1} - 1]$ и

$$h_0\left(\frac{1}{2} - x\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(x) = 1 \quad \text{для всех} \quad x \geq 0.$$

Используя леммы 2 и 3, находим:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda e^{ikt} \right\|_p^p &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} h_\nu(k) \right) e^{ikt} \right\|_p^p \leq \\
&\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} k^\lambda h_\nu(k) e^{ikt} \right\|_p^p \leq C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\lambda p} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_\nu(k) e^{ikt} \right\|_p^p \leq \\
&\leq C_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{\nu\lambda p} \cdot \frac{1}{2^{(1-p)\nu}} < \infty\,.
\end{aligned}$$

Таким образом, согласно лемме 4,

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{\alpha,\beta-\lambda;\,\varepsilon}(x + 2\pi k) \right\|_p \leq C_4$$

равномерно по ε. Следовательно, по лемме 1

$$\|F_{\alpha,\beta-\lambda;\,\varepsilon}(x)\|_p^p \le C_5 + \left\| \sum_{k\neq 0} F_{\alpha,\beta-\lambda;\,\varepsilon}(x+2\pi k)\right\|_p \le C_6,$$

также равномерно по ε.

Далее, используя лемму Фату, получаем, что $F_{\alpha,\beta-\lambda} \in L_p(\mathbb{R})$, но это противоречит нашим предположениям, поскольку при $\beta-\lambda+(\frac{1}{p}-1)<\alpha(\frac{1}{p}-1)$ функция $F_{\alpha,\beta-\lambda} \notin L_p(\mathbb{R})$.

Теперь рассмотрим случай $p=1$. Предположим, что $m\in M_1$ и возьмем $\delta>0$ так, чтобы $\beta+\delta<\frac{\alpha}{2}$. В силу сделанных выше предположений,

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|k|}\psi(|k|)\frac{e^{i|k|^\alpha}}{|k|^{\beta+\delta}}e^{ikt}\right\|_1 \le C_7 \left\| \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{ikt}}{k^\delta}\right\|_1 . \tag{4}$$

Таким образом, по аналогии с проделанными выше рассуждениями, мы получим противоречие, если покажем, что правая часть неравенства (4) конечна. Последнее сразу следует из теорем 1.5 и 1.14 в [13, гл.5].

Теорема полностью доказана.

1. *Riesz F.* Über die Randwerte einer analytischen Funktion // Math. Z. – 1932. – **18**. – P. 87-95.
2. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p\in(0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. – 1997. – **188**, №4. – С. 145-160.
3. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer-Springer, 2004.
4. *Коломойцев Ю.С.* О модулях гладкости и K-функционалах дробного порядка в пространствах Харди // Укр. мат. вісн. – 2011. – **8**, №3. – С. 421–446.
5. *Волчков Вит.В.* О мультипликаторах степенных рядов в пространствах Харди // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, №4. – С. 585–587.
6. *Hirschman I.I.* On multiplier transformations // Duke Math. J. – 1959. – **26**. – P. 221-242.
7. *Wainger S.* Special trigonometric series in k dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. – **59**. – 1965.
8. *Fefferman Ch.* Inequalities for Strongly Singular Convolution Operators // Acta Math. – 1970. – **124** – P. 9-36.
9. *Стейн И.М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: Мир, 1973.
10. *Belinsky E. S.* Strong summability for the Marcinkiewicz means in the integral metric and related questions // J. Austral. Math. Soc. (Series A). – 1998. – **65**. – P. 303-312.
11. *Волчков Вит.В.* Неравенсто Бернштейна в пространствах Харди H^p, $0<p<1$ // Ряди Фур'є: теорія і застосування (Каменец-Подольский, 1997), Пр. Інст. Мат. Нац. Акад. Наук Укр. Мат. Застос. – 1998. – **20**. – С. 77-84.
12. *Belinsky E., Liflyand E.* Approximation properties in L_p, $0<p<1$ // Functiones et Approximatio. – 1993. – **XXII**. – P. 189-199.
13. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Том 1. – М.: Мир, 1965.

Yu. S. Kolomoitsev

On one sufficient condition for multipliers in Hardy space.

We show the sharpness of the theorem, which gives sufficient conditions for multipliers of power series in the Hardy spaces $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$. These sufficient conditions are given in terms of the simultaneous behavior of a function and its derivatives at infinity.

Keywords: *multiplier, Hardy space* $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, *Bernstein's inequality.*

Ю. С. Коломойцев

Про одну достатню умову для мультиплікаторів у просторах Харді.

У роботі показано точність теореми, що дає достатню умову для мультиплікаторів степеневих рядів у просторах Харді $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, в термінах спільного спадання функції-мультиплікатора та її похідних на нескінченності.

Ключові слова: *мультиплікатор, протір Харді* $H_p(D)$, $0 < p \leq 1$, *нерівність Бернштейна.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
kolomus1@mail.ru

Получено 11.11.11