

УДК 681.5:51-74

©2011. А. А. Иванова

3-D МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА

Представлена трехмерная математическая модель нестационарного температурного поля непрерывнолитой заготовки и стенок кристаллизатора. Модель учитывает зависимости теплофизических параметров от температуры, наличие зазора между поверхностью слитка и стенкой кристаллизатора, характер водяного охлаждения кристаллизатора, зависимость граничных условий от конфигурации и режимов работы зоны вторичного охлаждения. Положение границы раздела фаз определяется из условий Стефана. Задача численно решена методом конечных разностей. Представлены и проанализированы результаты расчетов.

Ключевые слова: непрерывная разливка, кристаллизатор, вторичное охлаждение, температурное поле слитка, условия Стефана, конечно-разностная аппроксимация.

1. Введение. В настоящее время ведется интенсивная разработка систем автоматического управления (САУ) машинами непрерывного литья заготовок (МНЛЗ). Одним из наиболее перспективных направлений является создание САУ МНЛЗ на основе достаточно нового метода управления – прогнозного управления (в иностранных источниках МВРС – model based predictive control или МРС – model predictive control, существует российский вариант перевода МРС – управление с прогнозирующими моделями [1]).

Прогнозное управление – основанный на математическом моделировании метод управления, при котором решается задача выбора значений управляющих параметров, обеспечивающих прогноз состояния системы, максимально близкий к заданному.

Этот подход начал развиваться в начале 60-х годов для управления процессами и оборудованием в нефтехимическом и энергетическом производстве [1]. В настоящее время сфера применения МРС-методов стремительно расширяется, охватывая разнообразные технологические процессы в химической и строительной индустрии, легкой и пищевой промышленности, в аэрокосмических исследованиях, в современных системах энергетики и т. д. Разработка математических моделей для моделирования технологического процесса непрерывной разливки в режиме реального времени позволит внедрить прогрессивные технологии, использующие метод прогнозного управления в САУ металлургическими процессами, в том числе процессами непрерывной разливки.

Поскольку измерять температурное поле затруднительно, а данные измерений могут быть заменены расчетами по математической модели, математическое моделирование процесса кристаллизации непрерывного слитка является постоянным предметом внимания не только разработчиков САУ, но и многих других исследователей. Для определения температурного поля слитка разработано достаточно большое число различных по уровню сложности математических моделей [2]. Суще-

ствуют одномерные [3], двумерные [4, 5, 6], трехмерные [7, 8], стационарные [2] и нестационарные [5], с учетом [5] или без учета [3] конвективного переноса теплоты, с определением или без определения положения границы фазового перехода [2] и т.д. В [8] представлена трехмерная нестационарная модель для слитка квадратного сечения, где теплоперенос вместе с движущейся средой учтен с помощью наличия в уравнении дополнительного слагаемого – условного источника тепла. В [9] разработана нестационарная математическая модель процесса конвективно-кондуктивного переноса теплоты в непрерывном слитке, рассматривающая двумерное температурное поле и границу раздела фаз непрерывного слитка криволинейной МНЛЗ в продольном сечении широкого сляба, которое параллельно узким граням и проходит через середину широких граней.

Вычислительные возможности, появившиеся в последнее время, позволяют разрабатывать сложные математические модели, учитывающие всё большее число факторов, которые могут существенным образом влиять на процесс и создавать более универсальные модели.

В данной работе разработана математическая модель нестационарного теплового процесса в непрерывном слитке. Модель включает в себя уравнения теплопередачи внутри стенок кристаллизатора. Модель учитывает зависимость теплофизических параметров от температуры металла, характер теплоотдачи от слитка через стенки кристаллизатора к охлаждающей воде, расположение опорно-приводных роликов в зоне вторичного охлаждения (ЗВО), расположение форсунок, подающих водовоздушную смесь, а также зависимость теплоотдачи от режимов работы ЗВО.

2. Математическая модель температурного поля кристаллизатора. Процесс рассматривается в системе координат, привязанной к конструкции МНЛЗ (рис. 1). Конвективно-кондуктивный перенос теплоты в непрерывном слитке описывается нелинейным нестационарным уравнением в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial z} = \\ = \frac{1}{c(T)\rho(T)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$0 < x < l, \quad 0 < y < w, \quad 0 < z < Z,$$

где $T(\tau, x, y, z)$ – температура металла, $v(\tau)$ – скорость вытягивания слитка, $2l$ – толщина слитка, $2w$ – ширина слитка, Z – высота слитка в кристаллизаторе, $c(T)$ – удельная теплоёмкость металла, $\rho(T)$ – плотность металла, $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности.

Положение границы между жидкой и твердой фазами металла (границы раздела фаз) задаётся следующими условиями:

– условие равенства температур:

$$T|_{x=\xi-} = T|_{x=\xi+} = T_{kr}, \quad (2)$$

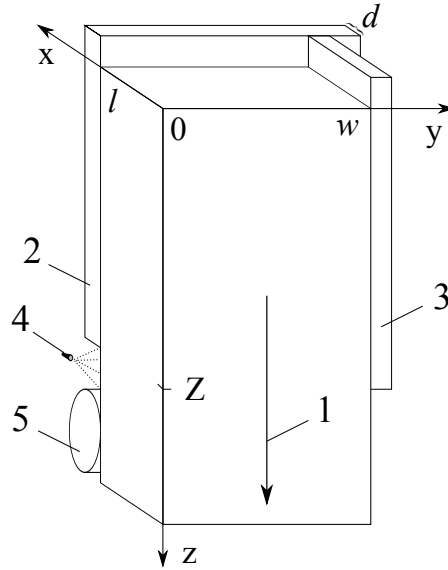


Рис. 1. Система координат относительно рассматриваемой области. 1 – направление движения слитка, 2 – широкая стенка кристаллизатора, 3 – узкая стенка кристаллизатора, 4 – форсунки, подающие водо-воздушную смесь, 5 – опорно-приводные ролики.

– условие Стефана:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi^-} - \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\xi^+} = \mu \rho_{kr} \left(v(\tau) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \xi}{\partial \tau} \right), \quad (3)$$

где ξ – граница раздела фаз, μ – скрытая теплота кристаллизации, T_{kr} – температура кристаллизации (средняя из интервала ликвидус – солидус), \bar{n} – нормаль к поверхности раздела фаз.

Задаются начальное положение границы раздела фаз:

$$\xi(0, y, z) = \xi_0(y, z) \quad (4)$$

и «граничное» условие для функции ξ :

$$\xi(\tau, y, z)|_{(z=0)} = \xi(y). \quad (5)$$

Предполагается, что охлаждение симметрично. Следовательно, можно записать для осевых продольных сечений слитка граничные условия, означающие равенство нулю тепловых потоков:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0. \quad (6)$$

При разливке под шлаком тепловой поток от зеркала расплава считается равным нулю:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия на поверхности слитка внутри кристаллизатора формулируются с учетом наличия зазора между слитком и стенками кристаллизатора. Зазор образуется за счет шероховатостей поверхности слитка и внутренней поверхности кристаллизатора. Частично он заполнен шлаковым гарнисажем, частично – газовыми включениями. Поскольку представить величину и содержимое зазора в виде распределенных параметров не представляется возможным, вводятся так называемые эффективные (осреднённые) величина зазора и коэффициент теплопроводности. Граничные условия на поверхности слитка вдоль широкой грани имеют вид:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{\lambda_g}{\delta} (T|_{x=l+\delta} - T|_{x=l}) + \sigma_n \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], \quad (8)$$

где δ – эффективная толщина зазора между поверхностью слитка и стенкой кристаллизатора, λ_g – коэффициент теплопроводности смеси шлакового гарнисажа и воздуха в зазоре, $T|_{x=l}$ – температура поверхности слитка, $T|_{x=l+\delta}$ – температура касающейся слитка поверхности стенки кристаллизатора, σ_n – приведённый коэффициент излучения. Аналогично формулируются условия для узкой грани слитка.

Уравнение теплопроводности в стенке кристаллизатора:

$$\frac{\partial T(\tau, x, z)}{\partial \tau} = \frac{1}{c_m(T)\rho_m(T)} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda_m(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_m(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right] \right\}, \quad (9)$$

$$z_0 < z < Z, \quad l + \delta < x < d.$$

Граничные условия для стенки кристаллизатора задаются следующим образом:

– на поверхности кристаллизатора, обращенной к воде:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=d} = \alpha_1 (T_v(\tau) - T|_{x=d}), \quad z_0 \leq z \leq Z, \quad (10)$$

– на верхней и нижней поверхностях:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=Z} = \alpha_2 (T_{os.2} - T|_{z=Z}), \quad l + \delta \leq x \leq d, \quad z = Z, \quad (11)$$

$$- \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = \alpha_3 (T_{os.3} - T|_{z=z_0}), \quad l + \delta \leq x \leq d, \quad z = z_0, \quad (12)$$

– теплопередача между поверхностью слитка и внутренней поверхностью стенки кристаллизатора:

$$\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta} = \frac{\lambda_{gz}}{\delta} (T|_{x=l+\delta} - T|_{x=l}) + \sigma_n \left[\left(\frac{T|_{x=l+\delta}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=l}}{100} \right)^4 \right], \quad (13)$$

$$0 \leq z \leq Z, \quad x = l + \delta,$$

– на внутренней поверхности стенки кристаллизатора над уровнем расплава:

$$-\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=l+\delta} = \alpha_4 (T_{os.1} - T|_{x=d}) + C_n \left[\left(\frac{T_{os.1}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T|_{x=d}}{100} \right)^4 \right], \quad (14)$$

$$z_0 \leq z \leq 0, \quad x = l + \delta,$$

где $d = (l + \delta)$ – толщина стенки кристаллизатора, z_0 – высота стенки кристаллизатора над уровнем расплава, α_1 – коэффициент теплоотдачи от стенки кристаллизатора к охлаждающей воде, $T_v(\tau, z)$ – температура охлаждающей воды в канале кристаллизатора, $\alpha_{2,3,4}$ – коэффициент теплоотдачи от стенки кристаллизатора в окружающую среду, $T_{os.2,3,4}$ – температура окружающей среды, C_n – приведенный коэффициент излучения.

Балансовое уравнение описывает распределение температуры охлаждающей воды в канале кристаллизатора:

$$c \cdot S \cdot v_v \frac{\partial T_v(\tau, z)}{\partial z} = P_I \alpha_1 (T_v(\tau, z) - T|_{x=d}) - P_E \alpha_E (T_v(\tau, z) - T_E), \quad (15)$$

где c – объемная теплоемкость воды, S – площадь сечения канала кристаллизатора, v_v – скорость движения воды в канале, P_I – периметр внутренней стенки канала, P_E – периметр внешней стенки канала, α_E – коэффициент теплопередачи между охлаждающей водой и внешней стенкой кристаллизатора, T_E – температура внешней стенки кристаллизатора.

Известно значение температуры на входе в канал кристаллизатора в любой момент времени:

$$T_v(0, Z) = T_{v1}(\tau) \quad (16)$$

и распределение температуры в канале кристаллизатора в начальный момент времени:

$$T_v(0, z) = T_{v0}(z). \quad (17)$$

Из кристаллизатора затвердевшая по периметру заготовка вытягивается в зону вторичного охлаждения (ЗВО), где продолжается интенсивный отбор тепла до окончательного затвердевания. В ЗВО слиток поддерживается опорно-приводными роликами, которые изнутри охлаждаются водой, и в местах контакта с поверхностью слитка отбирают на себя часть тепла:

$$\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha_r(z) (T|_r - T|_{x=l}) + C_r (T_r^4 - (T|_{x=l})^4), \quad (18)$$

где $\alpha_r(z)$ – коэффициент конвективной теплоотдачи от поверхности слитка к ролику, $T_{o.c.}$ – температура поверхности ролика, C_r – приведённый коэффициент лучистого теплообмена между поверхностью слитка и роликом.

В промежутках между роликами установлены форсунки, распыляющие на поверхность слитка водо-воздушную смесь. Форсуночное охлаждение является основным инструментом отбора тепла от непрерывного слитка, а его режимы существенным образом влияют на качество производимого металла.

Теплоотдача по широкой грани под воздействием принудительного охлаждения водо-воздушной смесью формулируется в виде граничных условий третьего рода:

$$\lambda(T) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = \alpha(\vec{t}, \vec{k}, \vec{G}, \vec{p}) \cdot (T_{o.c.} - T|_{x=l}) + C_n (T_{o.c.}^4 - (T|_{x=l})^4), \quad (19)$$

где α – коэффициент конвективной теплоотдачи, \vec{t} – вектор, определяющий типы форсунок, \vec{k} – координаты форсунок, \vec{G} – расходы охлаждающей воды, \vec{p} – давление воздуха, $T_{o.c.}$ – температура окружающей среды, l – полутолщина слитка, C_n – приведённый коэффициент излучения. Аналогично задаются граничные условия для узкой грани. Форсунки вдоль узкой грани (рис. 1) устанавливаются на уровнях, близких к кристаллизатору. На участках, не накрываемых факелом форсунки, коэффициент конвективной теплоотдачи считается равным константе. Аналогично записываются условия теплоотдачи по узкой грани слитка.

3. Конечно-разностная аппроксимация поставленной задачи. Конечно-разностная аппроксимация и алгоритм нахождения неизвестной границы аналогичны представленным в [9, 10] для двумерной модели. Отличие состоит в том, что уравнение (1) трехмерной модели содержит дополнительное слагаемое и в недивергентной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial \tau} + v(\tau) \frac{\partial T(\tau, x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{c(T)\rho(T)} \left\{ \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda(T) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Этому уравнению соответствует конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} & \frac{T_{k+1,i,j,p} - T_{k,i,j,p}}{\Delta\tau} + v_k \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i,j,p-1}}{\Delta z} = \frac{1}{c(T_{k,i,j,p})\rho(T_{k,i,j,p})} \times \\ & \times \left\{ \lambda(T_{k,i,j,p}) \frac{T_{k,i-1,j,p} - 2T_{k,i,j,p} + T_{k,i+1,j,p}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i-1,j,p}}{(\Delta x)^2} + \right. \\ & + \lambda(T_{k,i,j,p}) \frac{T_{k,i,j-1,p} - 2T_{k,i,j,p} + T_{k,i,j+1,p}}{(\Delta y)^2} + \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i,j-1,p}}{(\Delta y)^2} + \\ & \left. + \lambda(T_{k,i,j,p}) \frac{T_{k,i,j,p-1} - 2T_{k,i,j,p} + T_{k,i,j,p+1}}{(\Delta z)^2} + \frac{T_{k,i,j,p} - T_{k,i,j,p-1}}{(\Delta z)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где i, j, p – номера точек разностной сетки по пространственным координатам x, y, z (соответственно), k – номера точек разностной схемы по времени.

Отсюда следует условие устойчивости для выбранной явной схемы:

$$\Delta\tau \leq \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2(\Delta z)^2 \cdot c_{min} \cdot \rho_{min}}{v_{max} \cdot c_{max} \cdot \rho_{max} \cdot (\Delta x)^2(\Delta y)^2\Delta z + 2\lambda_{max} \cdot B},$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – шаги разностной сетки по пространственным координатам x, y, z (соответственно), $v_{max}, c_{max}(c_{min}), \rho_{max}(\rho_{min}), \lambda_{max}$ – максимальные (или минимальные) из заданных в условиях задачи значения скорости вытягивания непрерывнолитой заготовки, теплоёмкости, плотности и теплопроводности разливаемой марки стали, $B = (\Delta y)^2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2(\Delta z)^2 + (\Delta x)^2(\Delta y)^2$.

4. Результаты расчетов. Для расчетов было разработано программное обеспечение, которое позволяет производить оценку температурного состояния слитка. Результаты дают представление о распределении температур и толщине твердой корочки в различных сечениях заготовки. Температура и положение границы раздела фаз отображаются в виде цветовых диаграмм (рис. 2) и различных графиков.

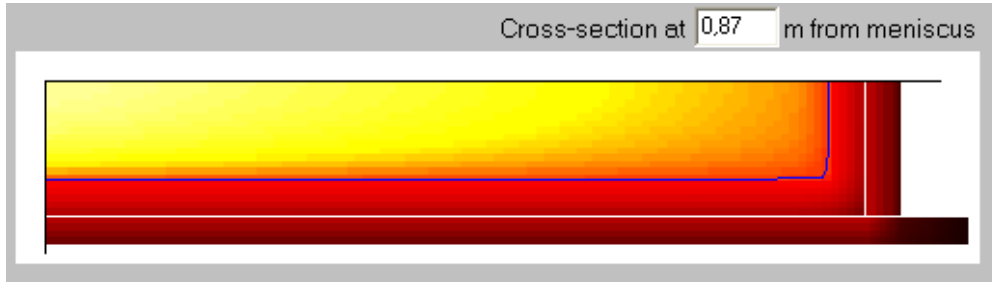


Рис. 2. Температура слитка и стенок кристаллизатора и положение границы раздела фаз в поперечном сечении.

На рис. 3 представлена температура поверхности слитка внутри кристаллизатора. Результаты моделирования показывают, что при заданной конструкции кристал-

лизатора температура в углах слитка снижается существенно быстрее, чем на всей остальной поверхности слитка, что полностью соответствует данным, полученным в промышленных условиях. Таким образом, данная математическая модель может быть использована для проектирования кристаллизаторов и ЗВО.

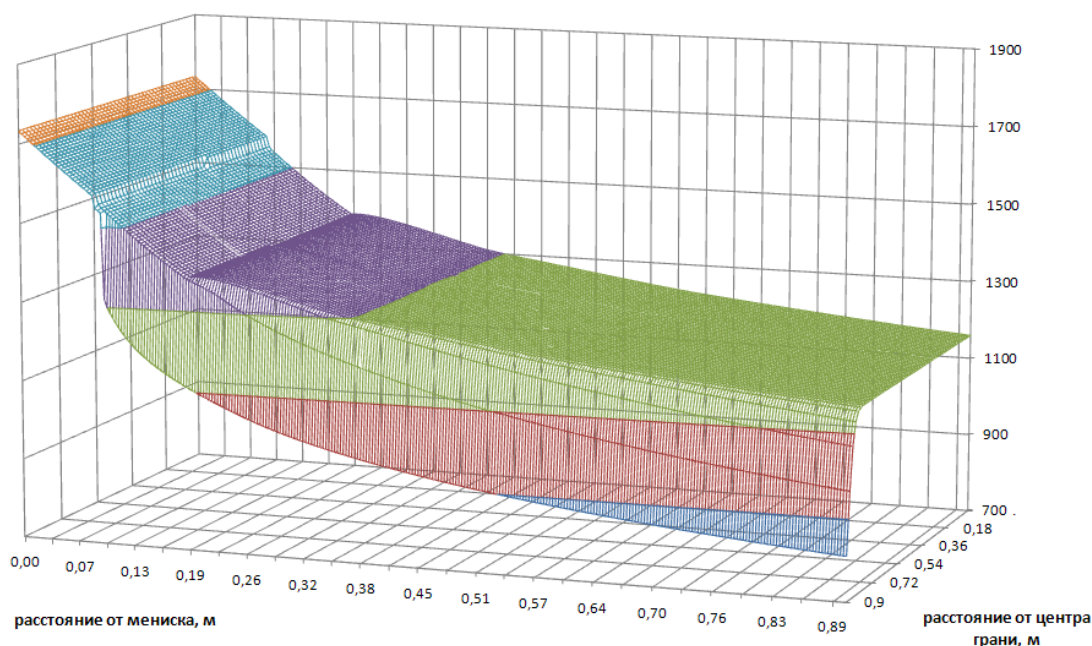


Рис. 3. Температура поверхности широкой грани слитка внутри кристаллизатора.

График распределения температуры поверхности слитка по широкой грани в зоне вторичного охлаждения (ЗВО) представлен на рис. 4. Температура в месте контакта слитка с опорно-приводными роликами снижается практически равномерно вдоль всей линии касания ролика. В зоне подбоя (первые два уровня форсунок) производится наиболее интенсивное охлаждение с целью недопущения разрыва твёрдой корочки слитка. Поэтому здесь можно видеть снижение температуры и в углах слитка, где, вообще говоря, это нежелательно. Третий уровень форсунок допускает возможность их оптимальной расстановки по ширине. Таким образом, в этой зоне возможно избежать дополнительно чрезмерного охлаждения углов слитка, что и показано на рис. 4.

5. Выводы. Представленная трехмерная математическая модель нестационарного температурного поля непрерывнолитой заготовки и стенок кристаллизатора позволяет производить оценку температурного состояния слитка в различные моменты времени для заданных конструкции кристаллизатора и ЗВО, марки разливаемой стали, скоростей вытягивания слитка и режимов охлаждения. Модель и соответствующее разработанное программное обеспечение могут быть использованы для проектирования конструкций машин непрерывного литья заготовок (МНЛЗ), для имитационного моделирования на этапе синтеза систем автоматического управления

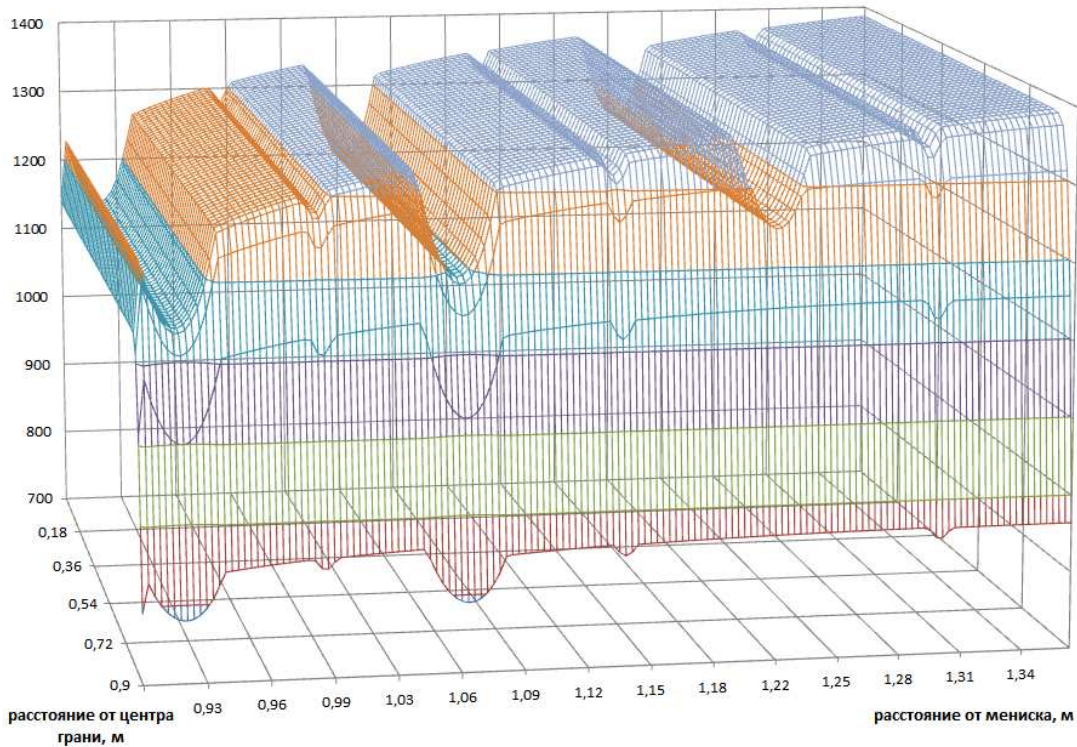


Рис. 4. Температура поверхности широкой грани слитка в ЗВО.

(САУ), а также в процессе функционирования САУ МНЛЗ.

1. *Веремей Е.И., Еремеев В.В.* Введение в задачи управления на основе предсказаний. – [Электронный ресурс] <http://matlab.exponenta.ru/modelpredict/book1/0.php>.
2. *Авдонин Н.А.* Математическое описание процессов кристаллизации. – Рига : Зинатне, 1980. – 224 с.
3. *Bakhanovich S.V., Borukhov V.T., Timoshpol'skii V.I. et al.* Computational analysis of the regimes of solidification and cooling of a continuous casting with a circular cross section // *J. of Engineering Physics and Thermalphysics*. – 2007. – Vol. 80, No. 2. – P. 213–219.
4. *Лисиенко В.Г., Лобанов В.И., Китаев Б.И.* Теплофизика металлургических процессов. – М. : Металлургия, 1982. – 239 с.
5. *Hardin R.A., Liu K., Kapoor A., Beckermann C.* A Transient Simulation and Dynamic Spray Cooling Control Model for Continuous Steel Casting // *Metallurgical and Materials Trans. B*, 2003. – Vol. 34, No 3. – P. 297–306.
6. *Hongming W., Li G., Lei Y. et al.* Mathematical Heat Transfer Model Research for the Improvement of Continuous Casting Slab Temperature // *ISIJ Int.* 2005. – Vol. 45, No. 9. – P. 1291–1296.
7. *Nowak I., Smolka J., Nowak A.J.* A reproduction of boundary conditions in three-dimensional continuous casting problem. *World Academy of Science, Engineering and Technology* 43 2008. – P. 243-248.
8. *Janik M., Dyja H.* Modelling of three-dimensional temperature field inside the mould during continuous casting of steel / *Journal of Materials Processing Technology* 157–158 (2004) 177–182.
9. *Ткаченко В.Н., Иванова А.А.* Моделирование и анализ теплового поля непрерывного слитка криволинейной машины непрерывного литья заготовок // *Электронное моделирование*. – 2008.

– Т. 30, № 3. – С. 87–103.

10. *Иванова А.А.* Математическая модель процесса затвердевания непрерывного слитка в зоне вторичного охлаждения // Труды ИПММ НАН Украины. – Вып. 12. – Донецк. – 2006. – С. 76-84.

Ganna Ivanova

3-D mathematical model of temperature field of continuous ingot.

The three-dimensional mathematical model of nonstationary temperature field of continuous ingot and mold walls is presented. Model takes into account dependence of thermophysical parameters on the temperature, the presence of the gap between the surface of the ingot and the mold wall, the mode of mold water-cooling, the dependence of the boundary conditions on the configuration and modes of the secondary cooling system. The position of the interface is determined from the Stefan condition. The numerical solution of the problem is performed by the finite-difference method. The results of numerical solution are presented and analysed.

Keywords: *continuous casting, mold, secondary cooling, temperature field of ingot, Stefan condition, finite-difference approximation.*

Г. О. Иванова

3-D математична модель температурного поля безперервного злитка.

Представлена тривимірна математична модель нестационарного температурного поля безперервно-ливої заготовки й стінок кристалізатора. Модель враховує залежність теплофізичних параметрів від температури, наявності зазору між поверхністю злитка й стінкою кристалізатора, характер водяного охолодження кристалізатора, залежність граничних умов від конфігурації й режимів роботи зони вторинного охолодження. Положення межі розподілу фаз визначається умовами Стефана. Задачу чисельно розв'язано методом кінцевих різниць. Представлено і проаналізовано результати розрахунків.

Ключові слова: *безперервне розливання, кристалізатор, вторинне охолодження, температурне поле злитка, умови Стефана, скінченно-різницева апроксимація.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
anna.ivanova@ukr.net

Получено 21.11.11