УДК 531.38

©2011. **Ю.Ю. Пилпани**

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ АСИМПТОТИЧЕСКИ-ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ СФЕРИЧЕСКОГО ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ

С помощью первого метода Ляпунова получены достаточные условия существования движений сферического гиростата, которые при бесконечном возрастании времени стремятся к регулярной прецессии относительно вертикали. В качестве механической модели рассмотрена модель, описываемая уравнениями класса Кирхгофа-Пуассона.

Ключевые слова: *гиростат, гиростатический момент, инвариантное соотношение, регулярная прецессия, характеристичное число.*

1. Введение. В работах [1-5] показана эффективность применения первого метода Ляпунова [6] в исследовании асимптотически-периодических движений гиростата в различных задачах динамики твердого тела. Обзор результатов, полученных в этих задачах, указан в [2, 7]. Методика изучения асимптотически-прецессионных движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил разработана в статье [4]. Особенность этой методики состоит в том, что она основана не только на первом методе Ляпунова, но учитывает свойства предельных движений – прецессии гиростата относительно вертикали. Прецессионными движениями называют движения [8], для которых постоянен угол между двумя осями l_1 и l_2 (l_1 – фиксирована в гиростате, l_2 – неподвижна в пространстве). Вектор угловой скорости гиростата $\boldsymbol{\omega}$ для таких движений может быть представлен в виде $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{a} + \dot{\psi}\boldsymbol{\nu}$, где $\boldsymbol{a} \in l_1$, $\boldsymbol{\nu} \in l_2$ и $|\boldsymbol{a}| = 1$, $|\boldsymbol{\nu}| = 1$. Основные результаты в исследовании прецессионных движений представлены в работе [8]. Данная статья посвящена исследованию асимптотически-прецессионных движений в случаях, когда скорости собственного вращения и прецессии постоянны: $\dot{\varphi} = n$, $\dot{\psi} = m$. Предполагается, что эллипсоид инерции гиростата в неподвижной точке тоже является сферой. Движение гиростата происходит под действием потенциальных и гироскопических сил и описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. В статье получены условия на параметры, характеризующие правые части этих уравнений, при выполнении которых движение гиростата будет обладать свойством асимптотичности к регулярной прецессии.

2. Постановка задачи. Рассмотрим обобщенную задачу динамики, описывающуюся уравнениями [7]:

$$\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{C}\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{0}, \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор вертикали; $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиростатический момент; $\boldsymbol{s} =$

$(s_1,\, s_2,\, s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $\boldsymbol{A} = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $\boldsymbol{B} = (B_{ij})$ и $\boldsymbol{C} = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над векторами обозначает относительную производную по времени.

Уравнения (1) и (2) допускают интегралы:

$$(\boldsymbol{A\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) - 2\,(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{C\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \tag{3}$$

$$2\,(\boldsymbol{A\omega}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - (\boldsymbol{B\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2k. \tag{4}$$

Положим в уравнениях (1), (2) и интегралах (3), (4), что $\boldsymbol{A} = diag\,(\mu_0,\mu_0,\mu_0)$, то есть, предположим, что эллипсоид инерции гиростата является сферой. Тогда

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{\mu_0}\left[\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{B\nu}-\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\nu}\times(\boldsymbol{C\nu}-\boldsymbol{s})\right], \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{5}$$

$$\mu_0\boldsymbol{\omega}^2 + \boldsymbol{\nu}\cdot(\boldsymbol{C\nu}-2\boldsymbol{s}) = 2E, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu} = 1, \quad \mu_0\,(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}) + \boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{B\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k. \tag{6}$$

Будем считать, что предельное движение гиростата является регулярной прецессией, то есть, используя звездочки для обозначения этого движения, имеем [8]

$$\boldsymbol{\nu}^* = \left(a_0'\sin t,\, a_0'\cos t,\, a_0\right), \quad \boldsymbol{\omega}^* = n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}^*, \tag{7}$$

где $a_0 = \cos\theta_0$, $a_0' = \sin\theta_0$, θ_0 – угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{\nu}^*$. Условия существования решения (7) для уравнений (5) найдем, используя результат статьи [9]. Запишем их в виде:

$$\begin{gathered} A_{23} = A_{12} = A_{13} = 0,\; B_{12} = 0,\; C_{12} = 0,\; B_{22} = B_{11}, \\ C_{22} = C_{11},\; C_{13} = -mB_{13},\; C_{23} = -mB_{23},\; s_1 = -a_0 m B_{13}, \\ s_2 = -a_0 m B_{23},\; \lambda_1 = a_0 B_{13},\; \lambda_2 = a_0 B_{23}, \\ s_3 = a_0\,(C_{33}-C_{11}) + a_0 m\,(B_{33}-B_{11}) - nB_{11} - m\,(\lambda_3 + m\mu_0)\,. \end{gathered} \tag{8}$$

Третью ось подвижной системы координат направим по вектору $\boldsymbol{a}$, то есть полагаем $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$. Тогда из второго векторного равенства системы (7) найдем

$$\omega_1 = a_0' m\sin nt, \quad \omega_2 = a_0' m\cos nt, \quad \omega_3 = n + ma_0. \tag{9}$$

Очевидно, что решение (9) периодично с периодом $2\pi/n$. Функции

$$\nu_1 = a_0'\sin nt, \quad \nu_2 = a_0'\cos nt, \quad \nu_3 = a_0 \tag{10}$$

также имеют период $2\pi/n$.

Поставим задачу об исследовании асимптотических движений сферического гиростата в случае, когда предельное движение гиростата описывается решением (9), (10). Используя вторую запись в уравнениях (5), положим

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^* + \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}^* + \gamma, \tag{11}$$

где возмущения $\boldsymbol{\Omega}$ и$\boldsymbol{\gamma}$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \mu_0^{-1} [&\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{B\nu}^* - \boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{B\gamma} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{C\gamma} + \\ &+ \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{C\nu}^* + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{C\gamma}],\end{aligned} \tag{12}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\nu}^* \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}^* \times \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\Omega}. \tag{13}$$

Основная теорема о существовании у системы (12), (13) решения $\boldsymbol{\Omega}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ обладает свойством $\boldsymbol{\Omega}(t) \to 0$, $\boldsymbol{\gamma}(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и основана на свойствах линейной системы, вытекающей из системы (12), (13). Для ее получения необходимо отбросить в уравнении (12) последние два слагаемые, а в уравнении (13) – последнее слагаемое. В силу простоты ее нахождения, выпишем только первые интегралы линейной системы, порожденные интегралами (6):

$$\begin{aligned}&\mu_0 (\boldsymbol{\omega}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\gamma} (\boldsymbol{C\nu}^* - \boldsymbol{s}) = c_1, \ \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_2, \\ &\mu_0 (\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mu_0 \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{B\nu}^* + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\gamma} = c_3.\end{aligned} \tag{14}$$

Таким образом, в силу периодичности решения (7), система первого приближения, вытекающая из (12), (13), является правильной. Поскольку она имеет три первых интеграла (14), то четыре характеристичных числа этой системы равны нулю. Для нахождения остальных характеристичных чисел необходимо провести редукцию линейной системы из (12), (13) с помощью интегралов к системе третьего порядка.

3. Редукция системы уравнений в вариациях к уравнению Хилла. Следуя методу, предложенному в работе [4], введем векторы

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{a} - a_0 \boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{\nu}^* - a_0 \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_4 = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{C\nu}^*, \quad \boldsymbol{\tau}_5 = \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{B\nu}^* \tag{15}$$

и новые переменные

$$\begin{aligned}&u_1 = \mu_0 (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad u_2 = \mu_0 (\boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\Omega}), \quad u_3 = \mu_0 (\boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\Omega}), \\ &u_4 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad u_5 = \boldsymbol{\nu}^* \cdot \boldsymbol{\gamma}, \quad u_6 = \boldsymbol{\tau}_3 \cdot \boldsymbol{\gamma}.\end{aligned} \tag{16}$$

В силу обозначений (15) и (16) первые интегралы (14) приведем к виду

$$\begin{aligned}&nu_1 + mu_2 - (a_0')^{-2} [(\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1) u_4 + (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) u_5 + (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3) u_6] = c_1, \\ &u_5 = c_2, \quad u_2 + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1) u_4 + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2) u_5 + (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3) u_6 = c_3,\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\boldsymbol{b} = [\mu_0 (n\boldsymbol{a} + m\boldsymbol{\nu}^*) + \boldsymbol{\tau}_5] \cdot (a_0')^{-2}. \tag{18}$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{\nu}^*$ и $\boldsymbol{\tau}_3 = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\nu}^*$ независимые, то после нахождения зависимостей $u_i = u_i(t)$, переменные векторы $\boldsymbol{\Omega}(t)$, $\boldsymbol{\gamma}(t)$ найдем на основании соотношений (16)

$$\boldsymbol{\Omega}(t) = \mu_0^{-1} (a_0')^{-2} (u_1 \boldsymbol{\tau}_1 + u_2 \boldsymbol{\tau}_2 + u_3 \boldsymbol{\tau}_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = (a_0')^{-2} (u_4 \boldsymbol{\tau}_1 + u_5 \boldsymbol{\tau}_2 + u_6 \boldsymbol{\tau}_3). \tag{19}$$

Очевидно, что векторы $\boldsymbol{\tau}_1$, $\boldsymbol{\tau}_2$ и $\boldsymbol{\tau}_3$ также независимы. Вид соотношений (19) поясняет геометрический смысл введения векторов $\boldsymbol{\tau}_i$ $(i = \overline{1,3})$.

Структура интегралов (17) позволяет ввести преобразование Ляпунова: $\boldsymbol{u} = (u_1, ..., u_6)^T \to \boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_6)^T$ согласно формуле

$$\boldsymbol{x} = m(t)\boldsymbol{u}. \tag{20}$$

Здесь $m\,(t) = (m_{ij})$ – матрица шестого порядка с элементами:

$$\begin{gathered}
m_{11} = m_{12} = 0, \quad m_{13} = 1, \quad m_{14} = m_{15} = m_{16} = 0,\\
m_{21} = m_{22} = m_{23} = 0, \quad m_{24} = 1, \quad m_{25} = m_{26} = 0,\\
m_{31} = m_{32} = m_{33} = m_{34} = m_{35} = 0, \quad m_{36} = 1,\\
m_{41} = \dot{\varphi}, \quad m_{42} = \dot{\psi}, \quad m_{43} = 0, \quad m_{44} = -(a_0')^{-2} \cdot (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_1)\,,\\
m_{45} = -(a_0')^{-2} \cdot (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_2)\,, \quad m_{46} = -(a_0')^{-2} \cdot (\boldsymbol{\tau}_4 \cdot \boldsymbol{\tau}_3)\,,\\
m_{51} = m_{51} = m_{53} = 0, \quad m_{54} = 0, m_{55} = 1, \quad m_{56} = 0, \quad m_{61} = 0,\\
m_{62} = 1, \quad m_{63} = 0, \quad m_{64} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_1)\,, \quad m_{65} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_2)\,, \quad m_{66} = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\tau}_3)\,.
\end{gathered} \tag{21}$$

Линейную систему, вытекающую из (12), (13), в силу (17), (19) и с помощью преобразования (20) запишем так:

$$\begin{gathered}
\dot{x}_1 = h_{11}(t)x_1 + h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3 + h_{14}(t)x_4 + h_{15}(t)x_5 + h_{16}(t)x_6,\\
\dot{x}_2 = h_{21}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2 + h_{23}(t)x_3 + h_{24}(t)x_4 + h_{25}(t)x_5 + h_{26}(t)x_6,\\
\dot{x}_3 = h_{31}(t)x_1 + h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3 + h_{34}(t)x_4 + h_{35}(t)x_5 + h_{36}(t)x_6,\\
\dot{x}_4 = 0, \quad \dot{x}_5 = 0, \quad \dot{x}_6 = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

Два нулевых характеристичных числа системы будут содержаться среди характеристичных чисел системы:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= h_{11}(t)x_1 + h_{12}(t)x_2 + h_{13}(t)x_3,\\
\dot{x}_2 &= h_{21}(t)x_1 + h_{22}(t)x_2 + h_{23}(t)x_3,\\
\dot{x}_3 &= h_{31}(t)x_1 + h_{32}(t)x_2 + h_{33}(t)x_3.
\end{aligned} \tag{23}$$

Учтем в системах (22), (23) условия существования регулярных прецессий сферического гиростата (9). Тогда имеем

$$\begin{aligned}
&h_{11}(t) = 0, \quad h_{12}(t) = \varepsilon_0\,(B_{13}\sin nt + B_{23}\cos nt) + \varepsilon_0', \quad h_{13}(t) = 0,\\
&h_{21}(t) = \mu_0^{-1}, \quad h_{22}(t) = 0, \quad h_{23}(t) = -m,\\
&h_{31}(t) = 0, \quad h_{32}(t) = \varepsilon_1\,(B_{13}\sin nt + B_{23}\cos nt) + \varepsilon_1', \quad h_{33}(t) = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_0 = \left(n\mu_0(a_0')^4 - a_0 m\mu_0 - B_{11}a_0(a_0')^4\right) \cdot \mu_0^{-1}(a_0')^{-3},\\
\varepsilon_0' = \left[m\mu_0\left(B_{11}a_0^4(a_0')^2 - B_{33}\left(a_0^2 + (a_0')^6\right)\right) + B_{11}a_0\mu_0 n + \right.\\
+ a_0\mu_0^2 mn + \lambda_3 a_0\left(B_{11}(a_0')^4 + m\mu_0\right) + C_{11}\mu_0\left(1 - a_0^2(a_0')^4\right) -\\
\left. - B_{11}^2(a_0')^6 - B_{11}B_{33}a_0^2(a_0')^4\mu_0 - C_{33}(a_0')^6\mu_0\right] \cdot \mu_0^{-1}(a_0')^{-4},\\
\varepsilon_1 = a_0\left(2 - 3a_0^2\right) \cdot \left(\mu_0 a_0'\right)^{-1},\\
\varepsilon_1' = \left[-a_0\mu_0 n^2 + a_0\,(B_{11} - B_{33})\,m - \left(2a_0^2\,(B_{33} - B_{11}) + B_{11}\right) + \right.\\
\left. + \mu_0 mn + a_0\,(C_{11} - C_{33}) - \lambda_3 a_0 n\right] \cdot (\mu_0 n)^{-1}.
\end{gathered} \tag{25}$$

Следовательно, структура $h_{ij}(t)$ из (24) с обозначениями из (25) позволяет упростить систему (23)

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \left[\varepsilon_0 \left(B_{13}\sin nt + B_{23}\cos nt\right) + \varepsilon_0'\right] x_2, \\ &\dot{x}_2 = \mu_0^{-1} x_1 - m x_3, \\ &\dot{x}_2 = \left[\varepsilon_1 \left(B_{13}\sin nt + B_{23}\cos nt\right) + \varepsilon_1'\right] x_2. \end{aligned} \tag{26}$$

Для получения одного уравнения на функцию x_2 выразим x_1 из второго уравнения системы (26) и подставим полученное выражение в первое уравнение системы (26). Учитывая в найденном уравнении третье уравнение из системы (26), запишем результат проведенных преобразований

$$\ddot{x}_2 + \left[\sigma_0 \left(B_{13}\sin nt + B_{23}\cos nt\right) + \sigma_1\right] x_2 = 0, \tag{27}$$

где

$$\begin{gathered} \sigma_0 = \Big[a_0 m\mu_0 \left(3a_0^4 - 5a_0^2 + 3\right) + \left(a_0'\right)^4 \left(a_0 B_{11} - n\mu_0\right)\Big] \cdot \mu_0^{-1} \left(a_0'\right)^{-3}, \\ \sigma_1 = \big[m^2\, a_0 \left(a_0'\right)^4 \mu_0 \left(B_{11} - B_{33}\right) - n^2 B_{11} a_0 \mu_0 - m n^2 a_0 \mu_0^2 \Big(\left(a_0'\right)^4 + 1\Big) + \\ + m^2 n \mu_0^2 \left(a_0'\right)^4 + m n \mu_0 \Big(B_{11}\Big(\left(a_0'\right)^6 - a_0^2\Big) + B_{33}\Big(2a_0^2\left(a_0'\right)^4 + \left(a_0'\right)^6 + a_0^2\Big)\Big) + \\ + m a_0 \left(a_0'\right)^4 \mu_0 \left(C_{11} - C_{33}\right) + \\ + n\Big(C_{11}\mu_0\Big(a_0^2\left(a_0'\right)^4 - 1\Big) + \left(a_0'\right)^4\Big(B_{11}^2\left(a_0'\right)^2 + B_{11}B_{33}a_0^2 + C_{33}\left(a_0'\right)^4\mu_0\Big)\Big) - \\ - \lambda_3 n a_0 \Big(m\mu_0\Big(1 + \left(a_0'\right)^4\Big) + B_{11}\left(a_0'\right)^4\Big)\Big] \cdot \left(a_0'\right)^{-4}\left(n\mu_0\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{28}$$

Запишем выражения при x_2 из уравнения (27) в виде

$$p\left(t\right) = \left[\sigma_0 \Delta \sin\left(nt + \varphi_0\right) + \left(C - \lambda_3 D\right)\right], \tag{29}$$

где $\Delta = \sqrt{B_{13}^2 + B_{23}^2}$, $\sin\varphi_0 = B_{23}\Delta^{-1}$, $\cos\varphi_0 = B_{13}\Delta^{-1}$, а выражения C и D определим на основании формулы для σ_1 из системы (25)

$$\begin{gathered} C = \Big\{m^2 a_0 \left(a_0'\right)^4 \mu_0 \left(B_{11} - B_{33}\right) - n^2 B_{11} a_0 \mu_0 - m n^2 a_0 \mu_0^2 \Big[\left(a_0'\right)^4 + 1\Big] + \\ + m^2 n \mu_0^2 \left(a_0'\right)^4 + m n \mu_0 \Big[B_{11}\Big(\left(a_0'\right)^6 - a_0^2\Big) + B_{33}\Big(2a_0^2\left(a_0'\right)^4 + \left(a_0'\right)^6 + a_0^2\Big)\Big] + \\ + n\Big[C_{11}\mu_0\Big(a_0^2\left(a_0'\right)^4 - 1\Big) + \left(a_0'\right)^4\Big(B_{11}^2\left(a_0'\right)^2 + B_{11}B_{33}a_0^2 + C_{33}\left(a_0'\right)^4\mu_0\Big)\Big] + \\ + m a_0 \left(a_0'\right)^4 \mu_0 \left(C_{11} - C_{33}\right)\Big\} \cdot \left(a_0'\right)^{-4}\left(n\mu_0\right)^{-1}, \\ D = \Big[m\mu_0\Big(1 + \left(a_0'\right)^4\Big) + B_{11}\left(a_0'\right)^4\Big] \cdot a_0 \left(a_0'\right)^{-4} \mu_0^{-1}. \end{gathered} \tag{30}$$

При исследовании условий существования положительных характеристичных чисел уравнения (27) применим достаточное условие Ляпунова [6]

$$p(t) \leq 0, \tag{31}$$

где $p(t)$ выражается по формуле (29). Представление (29) объясняется тем, что в силу (28) параметр λ_3 не содержится в выражении для C и D. Это позволяет добиться условия (31) следующим образом. Выберем параметры m и n таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$a_0\left[m\mu_0\left(1+(a_0')^4\right)-B_{11}(a_0')^4\right]>0. \tag{32}$$

Тогда выбирая значения λ_3 положительными и достаточно большими можно добиться условия (31).

Другими достаточно простыми примерами условий на параметры, когда выполняется условие (31) могут служить примеры, для которых параметры задачи удовлетворяют одному из условий

$$\sigma_0>0,\quad \frac{C-\lambda_3 D}{\sigma_0}\le -1$$

или

$$\sigma_0<0,\quad \frac{C-\lambda_3 D}{\sigma_0}\ge 1. \tag{33}$$

Следовательно, если выполняется условие (32), а параметр λ_3 имеет достаточно большие положительные значения, или если выполняется одно из условий (33), то уравнение (27) имеет общее решение

$$x_2=c_1\psi_1(t)e^{-\beta_0 t}+c_2\psi_2(t)e^{\beta_0 t}, \tag{34}$$

где β_0 – положительное число, ψ_1 и ψ_2 – периодические функции t (периода $2\pi/n$), c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Для применения первого метода Ляпунова необходимо в формуле (34) положить $c_2=0$, так как только в этом случае характеристичное число решения (34) положительно. После нахождения $x_2(t)$ функции $x_1(t)$ и $x_3(t)$ найдем из системы (26). В силу методики применения первого метода Ляпунова, решения уравнений $\dot{x}_1=0$, $\dot{x}_2=0$, $\dot{x}_3=0$ необходимо взять равными нулю. Таким образом строится первое приближение рядов Ляпунова для переменных x_i. Для нахождения первого приближения переменных $u_i(t)$ необходимо обратиться к формуле (20): $n=m^{-1}(t)\cdot\boldsymbol{x}$. Формулы (19) позволяют определить первое приближение для вектор-функций $\boldsymbol{\Omega}(t)$ и $\boldsymbol{\gamma}(t)$ из (19). Поскольку преобразования (19), (20) не изменяют характеристичных чисел линейной системы, вытекающей из общей системы (12), (13), то при указанных выше условиях эта система имеет одно положительное характеристичное число β_0.

Запишем ряды Ляпунова для переменных u_i

$$u_i=\sum_{n=1}^{\infty}L_i^{(n)}(t)c^n e^{-\beta n t}\qquad\left(i=\overline{1,6}\right), \tag{35}$$

где c – малая произвольная постоянная. Ряды (35) абсолютно сходятся и при $t\to\infty$, $u_i\to 0$. Из соотношений (19) вытекает, что при $t\to\infty$ $\boldsymbol{\Omega}\to 0$, $\boldsymbol{\gamma}\to 0$. Следовательно, для указанных выше условий существования положительного характеристичного числа решения уравнения (27) можно найти такое начальное положение гиростата и такую начальную угловую скорость, что при бесконечном возрастании времени движение сферического гиростата стремится к регулярной прецессии (7). Алгоритм построения рядов класса (35) основан на методе последовательных приближений [6].

1. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Асимптотически маятниковые движения гиростата Гесса-Аппельрота // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, вып. 3. – С. 490-495.
2. *Вархалев Ю.П., Горр Г.В.* Первый метод Ляпунова в исследовании движений твердого тела // Механика твердого тела. – 1992. – Вып. 24. – С. 25-41.
3. *Вархалев Ю.П., Ковалев В.М.* Об асимптотически – равномерных движениях гиростата относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 1990. – Вып. 22. – С. 43-48.
4. *Горр Г.В., Думбай Д.И.* Об асимптотически-прецессионных движениях гиростата в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1994. – Вып. 26 (**I**). – С. 20-28.
5. *Горр Г.В., Миронова Е.М.* Об асимптотически-прецессионных движениях сферического гиростата // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 56-62.
6. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч.: В 5 т. – М., Л.: Изд – во АН СССР, 1956. – Т. 2. – С. 7-263.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 364 с.
8. *Горр Г.В.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и динамике систем связанных тел // Прикл. математика и механика. – 2003. – Т. 67, вып. 4. – С. 573-587.
9. *Горр Г.В., Курганский Н.В.* О регулярной прецессии относительно вертикали в одной задаче динамики твердого тела // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 16-20.

J.Yu. Pilpani

About one class asymptotically-precession motions of spherical gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces.

In this work sufficient living conditions of spherical gyrostat movements, which aspire to regular precession concerning a vertical at infinite increase of time are received by means of Lyapunov's first method. As mechanical model the model described by Kirchhoff-Poisson equations is considered.

Keywords: *gyrostat, gyrostatic moment, invariant correlation, regular precession, discriminating number.*

Ю.Ю. Пілпані

Про один клас асимптотично-прецесійних рухів сферичного гіростата під дією потенційних та гіроскопічних сил.

У роботі за допомогою першого методу Ляпунова отримано достатні умови існування рухів сферичного гіростата, які при нескінченному зростанні часу прагнуть до регулярної прецесії відносно вертикалі. В якості механічної моделі розглянуто модель, що описується рівняннями класу Кірхгофа-Пуассона.

Ключові слова: *гіростат, гіростатичний момент, інваріантне співвідношення, регулярна прецесія, характеристичне число.*

Донецкий национальный ун-т
`juliet_don@rambler.ru`
Получено 05.05.11