УДК 517.55

 **Ю.С. Коломойцев**

# О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ХАРДИ $H_p(D^n)$

Получены точные двусторонние оценки приближения функций обобщенными $\ell_1$-средними Бохнера-Рисса и Абеля-Пуассона в пространствах Харди $H_p(D^n)$.

***Ключевые слова:*** *средние Бохнера-Рисса, средние Абеля-Пуассона, модуль гладкости, пространства Харди, поликруг.*

**1. Введение.** Пусть $\mathbb{R}^n$ – $n$-мерное вещественное евклидово пространство, $|x|_q = (x_1^q+\dots+x_n^q)^{\frac1q}$, $|x| = |x|_1$, $\mathbb{R}^n_+$ – подмножество точек из $\mathbb{R}^n$ с неотрицательными координатами, $\mathbb{Z}^n$ – с целыми координатами, $\mathbb{Z}^n_+ = \mathbb{Z}^n \cap \mathbb{R}^n_+$, $x_+ = \max\{x, 0\}$. Единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $D^n = \{\, z = (z_1 \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ :\ |z_j| < 1,\ j = 1,\dots,n\}$, $D = D^1$. Пусть $\beta > 0$, положим $\binom{\beta}{0} = 1$ и $\binom{\beta}{k} = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$. Через $C$ обозначим некоторые положительные константы, зависящие от указанных параметров. Запись $A(f,\varepsilon) \asymp B(f,\varepsilon)$ будет обозначать двустороннее неравенство с положительными константами, не зависящими от $f$ и $\varepsilon$.

Аналитическая в единичном поликруге $D^n$ функция $f$ принадлежит $H_p(D^n)$, если

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{0<\rho<1} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |f(\rho z)|^p d\sigma_n(z)\right)^{\frac1p} < \infty,$$

где $\sigma_n$ – нормированная мера Лебега на единичном торе $\mathbb{T}^n = \{\, z = (z_1 \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ :\ |z_j| = 1,\ j = 1,\dots,n\}$, инвариантная относительно поворота.

Для каждой функции $f \in H_p(D^n)$ на торе $\mathbb{T}^n$ существует почти всюду радиальная граничная функция, которую мы также обозначим через $f$, причем $f \in L_p(\mathbb{T}^n)$ и $\|f\|_{H_p} = \|f\|_p$, где $\|\cdot\|_p$ – (квази-)норма в пространстве $L_p(\mathbb{T}^n)$ (см., например, [1]).

Любая функция из $H_p(D^n)$, $p > 0$, раскладывается в поликруге $D^n$ в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n_+} c_k z^k,$$

где $z^k = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$, $c_k = c_{k_1,\dots,k_n}$ – коэффициенты ряда Тейлора функции $f$.

Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p < \infty$. Если $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p-1)_+,\infty)$ и $\bar h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$, то дробная разность

$$\Delta^\beta_{\bar h} f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^\nu f(e^{i\nu h_1} z_1, \dots, e^{i\nu h_n} z_n)$$

определена почти всюду и $\Delta_{\bar{h}}^{\beta} f \in H_p(D^n)$. В случае, когда $h_1 = \dots = h_n = h$, $h \in \mathbb{R}$, дробную разность функции $f$ обозначим через $\widetilde{\Delta}_h^{\beta} f$, т.е. $\Delta_{\widetilde{h}}^{\beta} f = \widetilde{\Delta}_h^{\beta} f$, где $\widetilde{h} = (h, \dots, h)$.

Модули гладкости, соответствующие разностям $\Delta_{\bar{h}}^{\beta} f$ и $\widetilde{\Delta}_h^{\beta} f$, определяют следующим образом:

$$\omega_\beta(f, \varepsilon)_p = \sup_{\substack{|h_j| \le \varepsilon \\ j=1,\dots,n}} \|\Delta_{\bar{h}}^{\beta} f\|_p,$$

$$\widetilde{\omega}_\beta(f, \varepsilon)_p = \sup_{|h| \le \varepsilon} \|\widetilde{\Delta}_h^{\beta} f\|_p. \tag{1}$$

В настоящей работе мы будем изучать вопросы приближения функции $f \in H_p(D^n)$ ее обобщенными средними Бохнера-Рисса

$$R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1 - (\varepsilon |k|)^\beta)_+^\delta c_k z^k \tag{2}$$

и обобщенными средними Абеля-Пуассона

$$P_\varepsilon^{\beta}(f, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{\beta}{\nu} (-1)^{\nu+1} f(e^{-\nu\varepsilon} z). \tag{3}$$

Отметим, что средние (2), называемые еще $\ell_1$-средними Бохнера-Рисса, по своим свойствам существенно отличаются от сферических средних Бохнера-Рисса, которые определяют по формуле

$$S_\varepsilon^{\beta,\delta}(f, z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^n} (1 - (\varepsilon |k|_2)^\beta)_+^\delta c_k z^k. \tag{4}$$

Известно (см. [2], [3]), что при четном $\beta > 0$ средние (4) сходятся в $H_p(D^n)$, $0 < p < 1$, тогда и только тогда $\delta > n(1/p - 1/2) - 1/2$. Мы покажем (см. ниже теорему 1), что сходимость, а также оценки приближения функций средними (2) и (3) от размерности $n$ не зависят.

Отметим, что аппроксимативные свойства средних (2), (3) и (4) изучались в работах [2]-[12]. В частности, в работах [4]-[7] были получены точные двусторонние оценки приближения функций средними (2) и (3) в пространствах $H_p(D)$. Точные оценки приближения средними (4) в $H_p(D^n)$, $n \ge 1$, можно найти в [2], [3], [9]-[12].

В работах [6] и [7] (см. также [13]) был получен следующий результат.

**Теорема A.** *Пусть $f \in H_p(D)$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p - 1)_+, \infty)$ и $\delta > (1/p - 1)_+$. Тогда*

$$\|f - P_\varepsilon^{\beta}(f)\|_p \asymp \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \omega_\beta(f, \varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0, 1).$$

В работе [13] изучались вопросы приближения средними (2) и (3) в случае функций нескольких переменных. В частности, в [13] была получена следующая теорема.

**Теорема B.** *Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p-1)_+, \infty)$ и $\delta > (n/\min(1,p)-1)_+$. Тогда*

*(i)*

$$C_1 \widetilde{\omega}_\beta(f,\varepsilon)_p \le \|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p \le C_2 \omega_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1);$$

*(ii)*

$$C_1 \widetilde{\omega}_\beta(f,\varepsilon)_p \le \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p \le C_2 \omega_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1),$$

*где $C_1$ и $C_2$ – некоторые положительные константы, не зависящие от $f$ и $\varepsilon$.*

Используя одно простое свойство мультипликаторов степенных рядов, мы получим точные оценки приближения функций средними (2) и (3) через модуль гладкости (1). Следующая теорема является основным результатом настоящей работы.

**Теорема 1.** *Пусть $f \in H_p(D^n)$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p-1)_+, \infty)$ и $\delta > (1/p-1)_+$. Тогда*

$$\|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p \asymp \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p \asymp \widetilde{\omega}_\beta(f,\varepsilon)_p, \quad \varepsilon \in (0,1). \tag{5}$$

**2. Вспомогательные утверждения.**

Далее с каждой функцией $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ и числом $\varepsilon \in \mathbb{R}$ мы будем связывать мультипликатор $\Lambda_\varepsilon^\varphi$, определяемый по правилу:

$$\Lambda_\varepsilon^\varphi f(z) = \sum_k \varphi(\varepsilon k) c_k z^k.$$

В следующей лемме установлена связь между специальными мультипликаторами в пространствах $H_p(D^n)$, $n \ge 2$, и $H_p(D)$.

**Лемма 1.** *Пусть $\varphi_0, \psi_0 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$, $\psi(x) = \psi_0(|x|)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, и $C$ – некоторая положительная константа, зависящая только от $\varphi_0$, $\psi_0$ и $p$. Неравенство*

$$\|\Lambda_h^{\varphi_0} f\|_p \le C \|\Lambda_\varepsilon^{\psi_0} f\|_p \tag{6}$$

*имеет место для любой функции $f \in H_p(D)$ и для всех $h, \varepsilon \in \mathbb{R}$, если и только если неравенство*

$$\|\Lambda_h^{\varphi} f\|_p \le C \|\Lambda_\varepsilon^{\psi} f\|_p \tag{7}$$

*имеет место для любой функции $f \in H_p(D^n)$ и для всех $h, \varepsilon \in \mathbb{R}$.*

*Доказательство.* Сформулированную выше лемму нетрудно получить повторяя доказательство теоремы 1 статьи [14]. Поскольку при доказательстве основного результата настоящей статьи нам понадобятся приведенные ниже рассуждения, мы даем краткое доказательство леммы 1.

Покажем, что из неравенства (6) следует неравенство (7). Для этой цели мы используем следующую срез-функцию для $f \in H_p(D^n)$:

$$f_z(\zeta) = f(\zeta z) = \sum_{m=0}^{\infty} \zeta^m \sum_{|k|=m} c_k z^k, \quad \zeta \in \mathbb{T}, \quad z \in D^n. \tag{8}$$

Замечая, что $\Lambda_h^{\varphi} f(\zeta z) = \Lambda_h^{\varphi_0} f_z(\zeta)$, находим:

$$\begin{aligned} \|\Lambda_h^{\varphi} f\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}^n} |\Lambda_h^{\varphi} f(z)|^p d\sigma_n(z) = \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}} |\Lambda_h^{\varphi} f(\zeta z)|^p d\sigma_1(\zeta)\sigma_n(z) = \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \|\Lambda_h^{\varphi_0} f_z(\cdot)\|_p^p d\sigma_n(z) \le C^p \int_{\mathbb{T}^n} \|\Lambda_\varepsilon^{\psi_0} f_z(\cdot)\|_p^p d\sigma_n(z) = \\ &= C^p \int_{\mathbb{T}} \int_{\mathbb{T}^n} |\Lambda_\varepsilon^{\psi_0} f(\zeta z)|^p d\sigma_1(\zeta)\sigma_n(z) = C^p \|\Lambda_\varepsilon^{\psi} f\|_p^p. \end{aligned}$$

Неравенство (7) сразу следует из неравенства (6). □

Из теоремы A и леммы 1 получаем следующее утверждение.

**Следствие 1.** *Пусть* $f \in H_p(D^n)$, $0 < p < \infty$, $\beta \in \mathbb{N} \cup ((1/p-1)_+, \infty)$ *и* $\delta > (1/p-1)_+$. *Тогда*

$$\|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p \asymp \|f - R_\varepsilon^{\beta,\delta}(f)\|_p, \quad \varepsilon \in (0,1).$$

Для доказательства основного результата настоящей статьи нам также понадобятся следующие леммы.

**Лемма 2.** *Пусть* $f \in H_p(D)$, $0 < p < \infty$, $s \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $\rho = e^{-\frac{\varepsilon}{2}}$. *Тогда*

$$\|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p \le C\varepsilon^{sp-1} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_\theta^\beta f(\cdot)\|_p^p \frac{d\theta}{|1-\rho e^{i\theta}|^{sp}}, \tag{9}$$

*где* $C$ *– константа, не зависящая от* $f$ *и* $\varepsilon$.

*Доказательство.* Неравенство (9) было получено при доказательстве теоремы 1 в работе [6] (см. также доказательство теоремы 1 в [13]). □

**Лемма 3.** *(См. [13]). Пусть* $f \in H_p(D^n)$, $0 < p < \infty$, $\lambda, h \in \mathbb{R}$. *Тогда*

$$\|\Delta_{\lambda h}^\beta f\|_p^p \le M(\beta,p)(|\lambda|+1)^{N(\beta,p)} \widetilde{\omega}_\beta(f,|h|)_p^p,$$

*где* $M(\beta,p)$ *и* $N(\beta,p)$ *– положительные константы, зависящие только от* $\beta$ *и* $p$.

**Лемма 4.** *(См. [15]). Пусть* $\lambda \ge 0$, $\gamma > 0$, $\gamma - \lambda > 1$ *и* $1/2 < R < 1$. *Тогда*

$$\int_0^\pi t^\lambda |1 - Re^{it}|^{-\gamma} dt \le C(1-R)^{1+\lambda-\gamma},$$

*где* $C$ *– константа, зависящая только от* $\beta$ *и* $\gamma$.

**3. Доказательство теоремы 1.** Рассмотрим только случай $0 < p \le 1$. При $p > 1$ доказательство теоремы аналогично приведенным ниже рассуждениям.

Оценки снизу приближения средними (2) и (3) содержатся в теореме B. Здесь мы покажем, что эти оценки сразу следуют из теоремы A и леммы 1.

Пусть $f \in H_p(D)$ и $|h| < \varepsilon$. Из теоремы A получаем, что

$$\|\Delta_h^\beta f\|_p \le C\|f - P_\varepsilon^\beta(f)\|_p. \tag{10}$$

Если обозначить $\varphi_0(t) = (1 - e^{it})^\beta$ и $\psi_0(t) = (1 - e^{-t})^\beta$, $t \in \mathbb{R}_+$, то неравенство (10) можно переписать в следующем виде:

$$\|\Lambda_h^{\varphi_0} f\|_p \le C\|\Lambda_\varepsilon^{\psi_0} f\|_p. \tag{11}$$

Пусть теперь $f \in H_p(D^n)$. Нетрудно заметить, что

$$\widetilde{\Delta}_h^\beta f(z) = \sum_k \varphi(hk)c_k z^k, \quad f(z) - P_\varepsilon^\beta(f, z) = \sum_k \psi(\varepsilon k)c_k z^k,$$

где $\varphi(x) = \varphi_0(|x|)$ и $\psi(x) = \psi_0(|x|)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$. Таким образом, из (11) и леммы 1 сразу получаем оценки снизу в теореме 1.

Перейдем к доказательству оценок сверху. Рассуждая по аналогии с доказательством леммы 1, используя при этом срез-функцию (8), леммы 2 и 3, последовательно находим:

$$\begin{aligned}
\|f - P_\varepsilon^\beta(f, \cdot)\|_p^p &= \int_{\mathbb{T}^n} \|f_z(\cdot) - P_\varepsilon^\beta(f_z, \cdot)\|_p^p d\sigma_n(z) \le \\
&\le \varepsilon^{sp-1} \int_{\mathbb{T}^n} \int_{-\pi}^{\pi} \|\Delta_\theta^\beta f_z(\cdot)\|_p^p \frac{d\theta\sigma_n(z)}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} = \\
&= C\varepsilon^{sp-1} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\mathbb{T}} \|\widetilde{\Delta}_\theta^\beta f(\zeta(\cdot))\|_p^p \frac{d\sigma_1(\zeta)d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} = \\
&= C\varepsilon^{sp-1} \int_{-\pi}^{\pi} \|\widetilde{\Delta}_\theta^\beta f\|_p^p \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} \le \\
&\le C\varepsilon^{sp-1} \widetilde{\omega}_\beta(f, \varepsilon)_p^p \int_0^\pi \left(\frac{\theta}{\varepsilon} + 1\right)^N \frac{d\theta}{|1 - \rho e^{i\theta}|^{sp}} = \\
&= C\varepsilon^{sp-1} \widetilde{\omega}_\beta(f, \varepsilon)_p^p \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \varepsilon^{-k} \int_0^\pi \theta^k |1 - \rho e^{i\theta}|^{-sp} d\theta,
\end{aligned}$$

где $\rho = e^{-\frac{\varepsilon}{2}}$, $N = N(\beta, p)$. Выбирая $s > (N+1)/p$ и применяя лемму 4 к интегралу в последнем равенстве мы получаем, что

$$\|f - P_\varepsilon^\beta(f, \cdot)\|_p \le C\widetilde{\omega}_\beta(f, \varepsilon)_p. \tag{12}$$

Таким образом, из (12) и следствия 1 вытекают оценки сверху в соотношениях (5).

Теорема 1 доказана.

1. *Рудин У.* Теория функций в поликруге. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
2. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространствах Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // ДАН. – 1994. – **335**, № 6. – С. 697-699.
3. *Тригуб Р.М.* Мультипликаторы в пространстве Харди $H_p(D^m)$ при $p \in (0,1]$ и аппроксимативные свойства методов суммирования степенных рядов // Матем. сб. – 1997. – **188**, № 4. – С. 145-160.
4. *Стороженко Э.А.* О теоремах типа Джексона в $H^p$, $0 < p < 1$ // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – **44**, № 4. – С. 946-692.
5. *Белинский Э. С.* Сильная суммируемость периодических функций и теоремы вложения // ДАН. – 1993. – **332**, № 2. – С. 133-134.
6. *Прибегин С.Г.* Об одном методе приближения в $H_p$, $0 < p < 1$ // Матем. сб. – 2001. – **192**, № 11. – С. 123-136.
7. *Прибегин С.Г.* Приближение функций из $H^p$, $0 < p \leq 1$, обобщенными средними Рисса с дробным показателем // Матем. сб. – 2006. – **197**, № 7. – С. 77-86.
8. *Валашек Я.* О приближениях в многомерных пространтвах Харди $H^p$, $0 < p \leq 1$ // Сообщ. АН Гр. ССР. – 1982. – **105**, № 1. – С. 21-24.
9. *Тригуб Р.М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1980. – **44**, № 6. – С. 1378-1409.
10. *Кузнецова О. И., Тригуб Р. М.* Двусторонние оценки приближения функций средними Рисса и Марцинкевича // ДАН СССР. – 1980. – **251**. – С. 34-36.
11. *Trigub R.M., Belinsky E.S.* Fourier Analysis and Approximation of Functions. – Kluwer-Springer, 2004. – 585 p.
12. *Коломойцев Ю.С.* О двусторонних оценках приближения функций обобщенными средними Бохнера-Рисса в $H_p$, $0 < p \leq 1$ // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. – **20**. – С. 116–123.
13. *Прибегин С.Г.* О некоторых методах суммирования степенных рядов для функций из $H^p(D^n)$, $0 < p < \infty$ // Матем. сб. – 2009. – **200**, № 2. – С. 89-106.
14. *Савчук В.В., Савчук М.В.* Норми мультиплікаторів і найкращі наближення голоморфних функцій багатьох змінних // Укр. Мат. Журн. – 2002. – **54**, № 12. – С. 1669-1679.
15. *Стороженко Э.А.* Приближение функций класса $H^p$, $0 < p < 1$ // Докл. АН Арм. ССР. – 1978. – **66**, № 3. – С. 145–149.

**Yu.S. Kolomoitsev**

**On some summability methods for power series in Hardy space $H_p(D^n)$.**

We obtain sharp two-sided estimates of approximation of functions by generalized $\ell_1$-Bochner-Riesz and Abel-Poisson means in Hardy spaces $H_p(D^n)$.

***Keywords:*** *Bochner-Riesz means, Abel-Poisson means, modulus of smoothness, Hardy spaces, polydisk.*

**Ю.С. Коломойцев**

**Про деякі методи підсумовування степеневих рядів у просторах Харді $H_p(D^n)$.**

Отримано точні двосторонні оцінки наближення функцій узагальненими $\ell_1$-середніми Бохнера-Рісса і Абеля-Пуассона у просторах Харді $H_p(D^n)$.

***Ключові слова:*** *середні Бохнера-Рісса, середні Абеля-Пуассона, модуль гладкості, простори Харді, полікруг.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
*Донецкий национальный ун-т*
kolomus1@mail.ru

*Получено 14.02.11*