УДК 517.5

©2011. **Д.А Ковтонюк, В.И. Рязанов, Р.Р. Салимов, Е.А. Севостьянов**

КЛАССЫ ОРЛИЧА-СОБОЛЕВА И НИЖНИЕ Q-ГОМЕОМОРФИЗМЫ

При условии типа Кальдерона на функцию φ показано, что непрерывные отображения f класса Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладают (N)-свойством Лузина на почти всех гиперплоскостях. В частности, сказанное относится к отображениям класса Соболева $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$ при $p>n-1$. На этой основе показано, что гомеоморфизмы f с конечным искажением, принадлежащие указанным классам $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$, в частности, $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, $p>n-1$, являются так называемыми нижними Q-гомеоморфизмами при $Q(x)$, равной внешней дилатации $K_f(x)$. Последнее обстоятельство дает возможность применить ранее развитую теорию к изучению локального и граничного поведения гомеоморфизмов конечного искажения в классах Орлича-Соболева.

Ключевые слова: *модули и емкости, отображения с ограниченным и конечным искажением, нижние Q-гомеоморфизмы, свойства Лузина и Сарда, классы Соболева, классы Орлича-Соболева.*

1. Введение. Основная цель работы – установить связь между отображениями с конечным искажением в классах Орлича–Соболева с так называемыми нижними Q-гомеоморфизмами, теория граничного поведения которых была развита авторами ранее, см. монографию [15]. В дальнейшем D – область в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, m – мера Лебега $\mathbb{R}^n$. Следуя Орличу, для заданной выпуклой возрастающей функции $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $\varphi(0)=0$, обозначим символом L_φ пространство всех функций $f:D\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\,dm(x)<\infty \tag{1}$$

при некотором $\lambda>0$, см., напр., монографию [10]. Пространство L_φ называется *пространством Орлича.* Другими словами, L_φ есть конус над классом всех функций $g:D\to\mathbb{R}$ таких, что

$$\int\limits_D \varphi\left(|g(x)|\right)\,dm(x)<\infty, \tag{2}$$

который называется *классом Орлича.*

Классом Орлича-Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(D)$ называется класс всех локально интегрируемых функций f, заданных в D, с первыми обобщёнными производными, градиент ∇f которых локально принадлежит классу Орлича. Заметим, что по определению $W^{1,\varphi}_{\rm loc}\subset W^{1,1}_{\rm loc}$. Как обычно, мы пишем $f\in W^{1,p}_{\rm loc}$, если $\varphi(t)=t^p$, $p\geqslant 1$. Известно, что непрерывная функция f, после изменения на множестве нулевой меры, принадлежит классу $W^{1,p}_{\rm loc}$ тогда и только тогда, когда $f\in ACL^p$, т.е., если f локально абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, а первые частные производные f локально интегрируемы в степени p, см. [16]. Понятие обобщенной производной было введено Соболевым и теперь развивается при более широких предположениях.

Далее, если f – локально интегрируемая вектор-функция n вещественных переменных $x_1,\dots,x_n$, $f=(f_1,\dots,f_m)$, $f_i\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $i=1,\dots,m$, и

$$\int\limits_D \varphi\left(|\nabla f(x)|\right)\,dm(x)<\infty, \tag{3}$$

где $|\nabla f(x)|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2}$, то мы также пишем $f\in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$. Мы также используем обозначение $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ в случае более общих функций φ, чем в классах Орлича, всегда предполагавших выпуклость функции φ.

В дальнейшем $\|f'(x)\|$ обозначает матричную норму якобиевой матрицы f' отображения f в точке $x\in D$,

$$\|f'(x)\|=\sup\limits_{h\in\mathbb{R}^n,|h|=1}|f'(x)\cdot h|,$$

$J_f(x)={\rm det}f'(x)$ – якобиан отображения f в точке x. Напомним, что гомеоморфизм f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, называется *отображением с конечным искажением*, если $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$, $J_f\in L^1_{\rm loc}$, и

$$\|f'(x)\|^n\leqslant K(x)\cdot J_f(x) \tag{4}$$

для некоторой почти всюду конечной функции K. В дальнейшем $K_f(x)$ обозначает наименьшую функцию $K(x)\geqslant 1$ в (4), т.е., мы полагаем $K_f(x)=\|f'(x)\|^n/J_f(x)$ при $J_f(x)\ne 0$, $K_f(x)=1$ при $f'(x)=0$ и $K_f(x)=\infty$ в остальных точках. Впервые понятие отображения с конечным искажением введено в случае плоскости для $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ в работе [9]. В дальнейшем условие $f\in W^{1,2}_{\rm loc}$ было заменено требованием $f\in W^{1,1}_{\rm loc}$, предполагающим дополнительно, что $J_f\in L^1_{\rm loc}$, см. монографию [8].

Заметим, что упомянутое выше дополнительное условие $J_f\in L^1_{\rm loc}$ излишне в случае гомеоморфизмов. Действительно, для каждого гомеоморфизма f между областями D и D' в $\mathbb{R}^n$, имеющего п.в. частные производные в D, существует множество E лебеговой меры нуль, такое что f обладает (N)-свойством в $D\setminus E$ и

$$\int\limits_A J_f(x)\,dm(x)=|f(A)| \tag{5}$$

для каждого измеримого по Лебегу множества $A\subset D\setminus E$, см., напр., пункты 3.1.4, 3.1.8 и 3.2.5 в [3]. На этой основе, по неравенству Гёльдера легко проверить, в частности, что если $f\in W^{1,1}_{loc}$ – гомеоморфизм и $K_f\in L^q_{loc}$ для некоторого $q>n-1$, то также $f\in W^{1,p}_{loc}$ для некоторого $p>n-1$.

2. Предварительные замечания. В настоящей статье H^k, $k=1,\dots,n-1$ обозначает *k-мерную меру Хаусдорфа* в $\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$, см., напр., [7]. Если $H^{k_1}(A)<\infty$, то $H^{k_2}(A)=0$ для любого $k_2>k_1$, см. VII.1.B в [7]. Величина

$$\dim_H A=\sup\limits_{H^k(A)>0} k$$

называется *хаусдорфовой размерностью* множества A. В работе [5] было показано, что для любых p и $q \in (0,n)$ множество A такое, что $\dim_H A = p$, может быть отображено при помощи квазиконформного отображения f пространства $\mathbb{R}^n$ на множество B с $\dim_H B = q$.

Напомним, что k-*мерным направлением* Γ в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется класс эквивалентности всех k-мерных плоскостей в $\mathbb{R}^n$, которые могут быть получены одна из другой при помощи параллельного переноса. Каждая $(n-k)$-мерная плоскость $\mathcal{T}$, ортогональная k-мерной плоскости $\mathcal{P}$ пересекает $\mathcal{P}$ в единственной точке $X(\mathcal{P})$. Пусть E – подмножество Γ. Тогда $X(E)$ будет обозначать множество всех точек $X(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} \in E$. Ясно, что $(n-k)$-мерная мера множества $X(E)$ не зависит от выбора плоскости $\mathcal{T}$; обозначим её символом $\mu_{n-k}(E)$. В дальнейшем будем говорить, что некоторое свойство имеет место для почти каждой плоскости Γ, если множество E, состоящее из всех плоскостей $\mathcal{P}$, для которых это свойство нарушается, таково, что $\mu_{n-k}(E) = 0$.

Следующее замечательное свойство функций f класса Соболева $W^{1,p}_{\rm loc}$ доказано в монографии [6], см. теорему 5.5 разд. 5.5 гл. II, и может быть распространено на классы Орлича-Соболева. Нижеприведенное утверждение непосредственно следует из теоремы Фубини и известного критерия принадлежности функций классу Соболева $W^{1,1}_{\rm loc}$ в терминах пространства ACL (функций, абсолютно непрерывных на линиях), см., напр., разд. 1.1.3 в [16], а также комментарии во введении.

Предложение 1. *Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – отображение класса Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(U)$, где функция $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ возрастает. Тогда для любого k-мерного направления Γ, для почти каждой k-мерной плоскости $\mathcal{P} \in \Gamma$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, сужение отображения f на множество $\mathcal{P} \cap U$ является отображением класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\mathcal{P} \cap U)$.*

Заметим, что здесь класс $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ корректно определен для почти всех k-мерных плоскостей, поскольку частные производные являются борелевскими функциями; кроме того, классы Соболева являются инвариантными относительно преобразований квазиизометрии и, в частности, относительно вращений систем координат, см., напр., разд. 1.1.7 in [16].

Напомним также мало известную теорему Фаделя, см. [2], которая позволяет распространить хорошо известные теоремы Меньшова-Геринга-Лехто на плоскости, а также теорему Вяйсяля в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, см., напр., [4], [17] и [20], о дифференцируемости почти всюду открытых отображений класса Соболева на открытые отображения классов Орлича-Соболева в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$. Напомним, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *открытым*, если образ любого открытого множества в Ω является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$.

Предложение 2. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение. Если f имеет почти всюду полный дифференциал на Ω относительно $n-1$ переменной, то f имеет полный дифференциал почти всюду в Ω.*

Наконец, приведём следующий результат Кальдерона, см., напр., [1], с. 208.

Предложение 3. *Пусть $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция, такая что $\varphi(0) = 0$ и для некоторого натурального $k \geqslant 2$*

$$A \; : \; = \int\limits_0^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{6}$$

Предположим, что $f : G \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, заданная в области $G \subset \mathbb{R}^k$ класса $W^{1,\varphi}(G)$. Тогда для каждого куба $C \subset G$, рёбра которого ориентированы вдоль координатных осей, выполняется условие

$$\operatorname{diam}(f(C)) \leqslant \alpha_k A^{\frac{k-1}{k}} \left[\int\limits_C \varphi\left(|\nabla f|\right) \, dm(x)\right]^{\frac{1}{k}}, \tag{7}$$

где α_k – некоторая постоянная, зависящая только от k.

Замечание 1. Функция $(t/\varphi(t))^{1/(k-1)}$ может иметь в нуле неинтегрируемую особенность. Однако, ясно, что поведение функции φ вблизи нуля не существенно. Действительно, пусть

$$A_* \; : \; = \left[\frac{1}{\varphi(1)}\right]^{\frac{1}{k-1}} + \int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty \tag{8}$$

и пусть $\varphi_*(t) \equiv \varphi(1)$ при $t \in (0,1)$, $\varphi_*(0) = 0$ и $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geqslant 1$. Применяя предложение 3 к однопараметрическому семейству функций $\varphi_\lambda(t) = \varphi(t) + \lambda \cdot [\varphi_*(t) - \varphi(t)]$, $\lambda \in [0,1)$, мы получаем при $\lambda \to 1$ соотношение (7) с заменами $A \mapsto A_*$ и $\varphi \mapsto \varphi_*$.

На основе предложения 3 Кальдерон доказал следующую лемму, которую также можно вывести на основе теоремы Степанова.

Лемма 1. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция, удовлетворяющая условию*

$$A := \int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{9}$$

Тогда f имеет полный дифференциал почти всюду в Ω.

3. Дифференцируемость открытых отображений. Во-первых, комбинируя лемму 1 с предложением 1, получаем следующее заключение.

Теорема 1. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, где $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция, такая что*

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{n-2}} dt < \infty. \tag{10}$$

Тогда на почти каждой гиперплоскости, параллельной произвольной фиксированной гиперплоскости, отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ имеет почти всюду полный дифференциал.

Наконец, комбинируя теорему 1 с результатом Фаделя (предложение 2), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ – непрерывное открытое отображение класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}(\Omega)$, где $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция, удовлетворяющая условию (10). Тогда отображение f имеет почти всюду полный дифференциал в Ω.*

4. Условия Лузина и Сарда на поверхностях.

Теорема 3. *Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 2$, и пусть $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – непрерывное отображение класса $W^{1,\varphi}(\Omega)$, где $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция, такая что*

$$A := \int\limits_1^\infty \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{11}$$

Тогда для каждого измеримого множества $E \subset \Omega$ выполняется условие

$$H^k(f(E)) \leq \gamma_{k,m}\, A_*^{k-1} \int\limits_E \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x), \tag{12}$$

где $\gamma_{k,m} = (m\alpha_k)^k$, α_k – постоянная из (7), зависящая только от k, $A_* = A + 1/[\varphi(1)]^{1/(k-1)}$, $\varphi_*(0) = 0$, $\varphi_*(t) \equiv \varphi(1)$ при $t \in (0,1)$ и $\varphi_*(t) = \varphi(t)$ при $t \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 3 основано на следующей лемме.

Лемма 2. *При условиях теоремы 3 для каждого куба $C \subset \Omega$ с рёбрами, параллельными координатным осям, выполнено условие*

$$\operatorname{diam}(f(C)) \leqslant m\alpha_k\, A_*^{\frac{k-1}{k}} \left[\,\int\limits_C \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x)\right]^{\frac{1}{k}}, \tag{13}$$

где α_k – постоянная из (7), зависящая только от k, а величины A_* и φ_* определены в теореме 3.

Доказательство леммы 2. Докажем (13) индукцией по $m = 1, 2, \ldots$. Действительно, при $m = 1$ соотношение (13) имеет место ввиду предложения 3 и замечания 1. Предположим, что (13) справедливо при некотором $m = l$ и докажем это при $m = l+1$. Рассмотрим произвольный вектор $\vec{V} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, v_{l+1})$ в $\mathbb{R}^{l+1}$, а также векторы $\vec{V_1} = (v_1, v_2, \ldots, v_l, 0)$ и $\vec{V_2} = (0, 0, \ldots, 0, v_{l+1})$. По неравенству треугольника $|\vec{V}| = |\vec{V_1} + \vec{V_2}| \leq |\vec{V_1}| + |\vec{V_2}|$. Таким образом, обозначая через ${\rm Pr}_1\,\vec{V} = \vec{V_1}$ и ${\rm Pr}_2\,\vec{V} = \vec{V_2}$ проекции векторов из $\mathbb{R}^{l+1}$ на координатную гиперплоскость $y_{l+1} = 0$ и на $(l+1)$-ю координатную ось в $\mathbb{R}^{l+1}$, соответственно, мы получим, что $\operatorname{diam} f(C) \leqslant \operatorname{diam} \mathrm{Pr}_1 f(C) + \operatorname{diam} \mathrm{Pr}_2 f(C)$, и, применяя (13) при $m = l$ и $m = 1$, мы приходим к неравенству (13) при $m = l + 1$ в виду монотонности функции φ. $\Box$

Доказательство теоремы 3. Ввиду счетной аддитивности интеграла и меры, не ограничивая общности рассуждений, мы можем считать, что множество E ограничено и что $\overline{E} \subset \Omega$, т.е., что $\overline{E}$ – компакт в Ω. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $\omega \subset \Omega$ такое, что $E \subset \omega$ и $|\omega \setminus E| < \varepsilon$, см. теорему III (6.6) в [19]. Учитывая замечание, сделанное выше, мы можем считать, что $\overline{\omega}$ компакт и, следовательно, отображение f равномерно непрерывно в ω. Следовательно, ω может быть покрыто счётным набором замкнутых ориентированных кубов C_i, внутренности которых попарно не пересекаются, и таких, что $\operatorname{diam} f(C_i) < \delta$ для каждого предписанного заранее $\delta > 0$ и $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \partial C_i\right| = 0$.

Тогда в силу леммы 2 мы получим, что

$$H^k_\delta(f(E)) \leq H^k_\delta(f(\omega)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} [\operatorname{diam} f(C_i)]^k \leqslant$$

$$\leqslant \gamma_{k,m} A_*^{k-1} \int\limits_{\omega} \varphi_*\left(|\nabla f|\right)\, dm(x).$$

Наконец, ввиду абсолютной непрерывности неопределённого интеграла, произвольности ε и $\delta > 0$, получаем (12). $\Box$

Следствие 1. *При условиях теоремы 3, отображение f обладает (N)-свойством Лузина, более того, f является абсолютно непрерывным относительно k-мерной хаусдорфовой меры.*

По теореме 3, см. также теорему VII.3 в [7], мы получаем следующее заключение типа Сарда.

Следствие 3. *При условиях теоремы 3, $H^k(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на измеримом множестве $E \subset \Omega$, и потому $\dim_H f(E) \leqslant k$, а $\dim f(E) \leqslant k - 1$.*

Далее ∇_k обозначает k-мерный градиент сужения отображения f на k-мерную плоскость P. Комбинируя предложение 1 и следствие 2, получаем следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $k = 2, \ldots, n-1$, U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и пусть $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, – отображение класса $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}(U)$, где $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ – возрастающая функция, такая что*

$$\int\limits_1^{\infty} \left[\frac{t}{\varphi(t)}\right]^{\frac{1}{k-1}} dt < \infty. \tag{14}$$

Тогда для каждого k-мерного направления Γ и почти всех k-мерных плоскостей $\mathcal{P} \in \Gamma$, сужение отображения f на множество $\mathcal{P} \cap U$ обладает (N)-свойством, более того, является локально абсолютно непрерывным относительно k-мерной *хаусдорфовой меры. Кроме того, на почти всех $P \in \Gamma$, $H^k(f(E)) = 0$ как только $\nabla_k f = 0$ на множестве $E \subset P$.*

Наиболее важным для нас частным случаем предложения 4 является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция с условием (10). Тогда любое непрерывное отображение $f : U \to \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает (N)-свойством, более того, локально абсолютно непрерывно относительно $(n-1)$-мерной хаусдорфовой меры на почти всех гиперплоскостях $\mathcal{P}$, параллельных произвольной фиксированной гиперплоскости $\mathcal{P}_0$. Кроме того, на почти всех таких $\mathcal{P}$, $H^{n-1}(f(E)) = 0$, если $|\nabla f| = 0$ на $E \subset \mathcal{P}$.*

Заметим, что, если условие вида (10) имеет место для некоторой возрастающей функции φ, то функция $\varphi_* = \varphi(ct)$ при $c > 0$ также удовлетворяет соотношению (10). Кроме того, хаусдорфовы меры являются квазиинвариантными при квазиизометриях, см., напр., разд. 1.1.7 в [16].

По свойству Линделефа в $\mathbb{R}^n$, см., напр., теорему Линделефа в разд. I.5.XI в [14], множество $U \setminus \{x_0\}$ может быть покрыто счётным числом открытых сегментов сферических колец в $U \setminus \{x_0\}$ с центром в точке x_0, и каждый такой сегмент может быть отображён на прямоугольный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$ посредством квазиизометрии. Следовательно, применяя теорему 4 к каждому такому параллелепипеду по отдельности, мы получаем следующее заключение.

Следствие 4. *При условии (10) любое непрерывное отображение $f \in W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ обладает (N)-свойством относительно $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, более того, локально абсолютно непрерывно на почти всех сферах S с центром в заданной предписанной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, на почти всех таких сферах S выполнено условие $H^{n-1}(f(E)) = 0$ как только $|\nabla f| = 0$ на множестве $E \subset S$.*

5. Нижние Q-гомеоморфизмы и классы Орлича-Соболева. Напомним, что отображение $g : X \to Y$ между метрическими пространствами X и Y называется *липшицевым,* если $\operatorname{dist}(g(x_1), g(x_2)) \leqslant M \cdot \operatorname{dist}(x_1, x_2)$ для некоторой постоянной $M < \infty$ и всех $x_1, x_2 \in X$. Говорят, что отображение $g : X \to Y$ *билипшицево,* если, оно, во–первых, липшицево, во–вторых, $M^* \cdot \operatorname{dist}(x_1, x_2) \leqslant \operatorname{dist}(g(x_1), g(x_2))$ для некоторой постоянной $M^* > 0$ и всех $x_1, x_2 \in X$.

Следующее утверждение является ключевым для дальнейшего исследования.

Теорема 5. *Пусть D и D' – области в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ – возрастающая функция с условием (10). Тогда каждый гомеоморфизм $f : D \to D'$ конечного искажения класса $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ является нижним Q-гомеоморфизмом в произвольной точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_f(x)$.*

Определение нижнего Q-гомеоморфизма можно найти, напр., в [11] и [15].

Доказательство. Обозначим через B (борелево) множество всех точек $x \in D$, где отображение f имеет полный дифференциал $f'(x)$ и $J_f(x) \neq 0$. Применяя теорему Кирсбрауна и используя единственность аппроксимативного дифференциала, см., напр., разд. 2.10.43 и теорему 3.1.2 в [3], заключаем, что множество B представляет собой счётное объединение борелевских множеств B_l, $l = 1, 2, \ldots$, таких, что отображения $f_l = f|_{B_l}$ являются билипшицевыми гомеоморфизмами, см., напр., лемму 3.2.2 и теоремы 3.1.4 и 3.1.8 в [3]. Без ограничения общности, можно считать, что множества B_l попарно не пересекаются. Обозначим также через B_* оставшееся множество всех точек $x \in D$, где f имеет полный дифференциал, однако, $f'(x) = 0$.

По построению множество $B_0 := D \setminus (B \bigcup B_*)$ имеет Лебегову меру нуль, см. лемму 1 и предложения 1 и 2. Следовательно, $\mathcal{A}_S(B_0) = 0$ для почти всех гиперповерхностей S в $\mathbb{R}^n$ и, в частности, для почти всех сфер $S_r := S(x_0, r)$ с центром в точке $x_0 \in \overline{D}$, см. теорему 2.11 в [13] или лемму 8.1 в [15]. Таким образом, по следствию 3, получим $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_0)) = 0$, а также $\mathcal{A}_{S_r^*}(f(B_*)) = 0$ для почти всех S_r, где $S_r^* = f(S_r)$.

Пусть Γ обозначает семейство всех пересечений сфер S_r, $r \in (\varepsilon, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 < d_0 = \sup\limits_{x \in D} |x - x_0|$, с областью D. Для произвольной функции $\rho_* \in \operatorname{adm} f(\Gamma)$ такой, что $\rho_* \equiv 0$ вне $f(D)$, полагаем $\rho \equiv 0$ вне D и на B_0, и

$$\rho(x) \colon = \rho_*(f(x)) \|f'(x)\| \qquad \text{при } x \in D \setminus B_0.$$

На каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, согласно разд. 1.7.6 и лемме 3.2.2 в [3] получаем, что

$$\int\limits_{S_r} \rho^{n-1} \, d\mathcal{A} = \int\limits_{S_r} \rho_*^{n-1}(f(x)) \|f'(x)\|^{n-1} \, d\mathcal{A} \geqslant 1$$

для почти всех S_r, и, следовательно, $\rho \in \operatorname{ext} \operatorname{adm} \Gamma$.

Используя замену переменных на каждом B_l, $l = 1, 2, \ldots$, см., напр., теорему 3.2.5 в [3], ввиду счётной аддитивности интеграла, получаем оценку

$$\int\limits_D \frac{\rho^n(x)}{K_f(x)} \, dm(x) \leqslant \int\limits_{f(D)} \rho_*^n(x) \, dm(x),$$

что и завершает доказательство. $\Box$

Следствие 5. *Каждый гомеоморфизм с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, класса $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n - 1$ является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_f(x)$.*

На основе (5) по неравенству Гельдера также получаем следующее.

Следствие 6. *В частности, каждый гомеоморфизм f с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ такой, что $K_f \in L^q_{\mathrm{loc}}$ при $q > n - 1$, является нижним Q-гомеоморфизмом в каждой точке $x_0 \in \overline{D}$ с $Q(x) = K_f(x)$.*

6. Заключительные замечания. Таким образом, вся теория граничного поведения нижних Q-гомеоморфизмов в [12], см. также гл. 9 в [15], применима к классам Орлича–Соболева $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ с условием типа Кальдерона и, в частности, к классам Соболева $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n - 1$. Кроме того, во внутренних точках нижние Q-гомеоморфизмы являются так называемыми кольцевыми Q_*-гомеоморфизмами с

$Q_* = Q^{n-1}$ и, таким образом, теория локального поведения последних также применима в указанных классах, см. [18] и гл. 7 монографии [15].

1. *Calderon A.P.* On the differentiability of absolutely continuous functions // Riv. Math. Univ. Parma. – 1951. – V. 2. – P. 203-213.
2. *Fadell A.G.* A note on a theorem of Gehring and Lehto // Proc. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 49. – P. 195-198.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры, Наука, Москва, 1987. – 760 с.
4. *Gehring F.W., Lehto O.* On the total differentiability of functions of a complex variable // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1959. – V. 272. – P. 3-8.
5. *Gehring F.W. and Väisälä J.* Hausdorff dimension and quasiconformal mappings // J. London Math. Soc. – 1973. – V. 6. – P. 504-512.
6. *Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г.* Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения, Наука, Новосибирск, 1983.
7. *Hurewicz W. and Wallman H.* Dimension Theory, Princeton Univ. Press, Princeton, 1948.
8. *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis, Clarendon Press, Oxford, 2001.
9. *Iwaniec T., Sverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1993. – V. 118. – P. 181-188.
10. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича, Гос. издат. физ.-мат. лит., Москва, 1958.
11. *Ковтонюк Д.А., Рязанов В.И.* О нижних Q-гомеоморфизмах // Труды ИПММ НАН Украины. – 2005. – Т. 11. – С. 69-83.
12. *Ковтонюк Д., Рязанов В.* К теории нижних Q-гомеоморфизмов // Укр. матем. вестник. – 2008. – Т. 5, № 1. – С. 159-184.
13. *Kovtonyuk D., Ryazanov V.* On the theory of mappings with finite area distortion // J. d'Anal. Math. – 2008. – V. 104. – P. 291-306.
14. *Куратовский К.* Топология. 1, Мир, Москва, 1966.
15. *Martio O., Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2009.
16. *Maz'ya V.* Sobolev Spaces, Springer-Verlag, Berlin (1985).
17. *Menchoff D.* Sur les differencelles totales des fonctions univalentes // Math. Ann. – 1931. – V. 105. – P. 75-85.
18. *Рязанов В.И., Севостьянов Е.А.* Равностепенно непрерывные классы кольцевых Q-гомеоморфизмов // Сиб. матем. журн. – 2007. – Т. 48, № 6. – С. 1361-1376.
19. *Сакс С.* Теория интеграла, Издательство ИЛ, М., 1949. – 495 с.
20. *Väisälä J.* On quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. Math. – 1961. – V. 298. – P. 1-36.

D.A. Kovtonyuk, V.I. Ryazanov, R.R. Salimov, E.A. Sevostyanov

The classes of Orlichz-Sobolev and lower Q-homeomorphisms.

It is shown that continuous mappings f in $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ under the Calderon type conditions on φ, in particular, $f \in W^{1,p}_{\rm loc}$, for $p > n-1$ have (N)-property on a.e. hyperplane. It is proved on this basis that under these conditions on φ the mappings f with finite distortion in $W^{1,\varphi}_{\rm loc}$ are the so-called lower Q-homeomorphisms where $Q(x)$ is equal to the outer dilatation $K_f(x)$. This makes possible to apply our theory of the local and boundary behavior for the lower and ring Q-homeomorphisms to homeomorphisms with finite distortion in the Orlicz-Sobolev classes.

Keywords: *moduli and capacities, mappings with bounded and finite distortion, lower Q-homeomorphisms,* *Lusin and Sard properties, Sobolev classes, Orlicz-Sobolev classes.*

Д.О. Ковтонюк, В.І. Рязанов, Р.Р. Салімов, Є.О. Севостьянов

Класи Орлича-Соболєва та нижні Q-гомеоморфізми.

При умові типу Кальдерона на функцію φ показано, що неперервне відображення f класу $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$ має (N)-властивість Лузіна на майже всіх гіперплощинах; зокрема, сказане вище відноситься до відображень класу Соболєва $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$ при $p > n-1$. На цій засаді показано, що гомеоморфізми f зі скінченним спотворенням, які належать зазначеним класам $W^{1,\varphi}_{\mathrm{loc}}$, зокрема, $f \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}$, $p > n-1$, є так званими нижніми Q-гомеоморфізмами при $Q(x)$, яка дорівнює зовнішній дилатації $K_f(x)$. Остання обставина дає можливість застосувати раніше розвинуту теорію до вивчення локальної та граничної поведінки гомеоморфізмів скінченного спотворення в класах Орлича-Соболєва.

Ключові слова: *модулі й ємності, відображення з обмеженим і скінченним спотворенням, нижні Q-гомеоморфізми, властивості Лузіна і Сарда, класи Соболєва, класи Орлича-Соболєва.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк *Получено 12.04.11*
denis_ kovtonyuk@bk.ru, vlryazanov1@rambler.ru,
ruslan623@yandex.ru, brusin2006@rambler.ru