УДК 512.579

©2011. **А.В. Жучок**

ДІМОНОЇДИ З ІДЕМПОТЕНТНОЮ ОПЕРАЦІЄЮ

У роботі доведено кілька структурних теорем для дімоноїдів з ідемпотентною операцією.

Ключові слова: *дімоноїд з ідемпотентною операцією, напівгрупа ідемпотентів, конгруенція, дісполука піддімоноїдів.*

1. Вступ. Відомо, що універсальна обгортуюча алгебра алгебри Лі має структуру асоціативної алгебри. У 1993 році Ж.-Л. Лоде ввів поняття алгебри Лейбниця [1], яке узагальнює поняття алгебри Лі, та показав, що зв'язок між алгебрами Лі та асоціативними алгебрами є аналогічним зв'язку між алгебрами Лейбниця та так званими діалгебрами [2], які узагальнюють асоціативні алгебри. Зокрема, Ж.-Л. Лоде встановив, що будь-яка діалгебра стає алгеброю Лейбниця, якщо на ній ввести дужки Лейбниця за правилом $[x, y] = x \dashv y - y \vdash x$, та універсальна обгортуюча алгебра алгебри Лейбниця має структуру діалгебри.

З іншого боку, діалгебра є лінійним аналогом поняття дімоноїда [2], введеного Ж.-Л. Лоде для вивчення властивостей алгебр Лейбниця. Одним з перших результатів про дімоноїди є опис вільного дімоноїда на заданій множині [2]. За допомогою вільних дімоноїдів Ж.-Л. Лоде дав опис вільної діалгебри [2]. Структуру комутативних дімоноїдів та ідемпотентних дімоноїдів було описано в термінах дісполук піддімоноїдів у [3] та, відповідно, [4]. Вільні комутативні дімоноїди було побудовано в [5]. У [6] автор описав будову довільної дісполуки піддімоноїдів. У [7] доведено, що вільний дімоноїд є напівструктурою s-простих піддімоноїдів, кожен із яких є прямокутною сполукою піддімоноїдів.

У цій роботі продовжено вивчення структурних властивостей дімоноїдів за допомогою дісполук піддімоноїдів, розпочате в [3] (див. також [4], [6], [7]). Для дімоноїдів з ідемпотентною операцією отримано кілька структурних теорем. Основні результати цієї роботи узагальнюють деякі результати [8].

2. Основні поняття. Множина D з визначеними на ній бінарними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми:

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),$$

$$(x \vdash y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$$

для всіх $x, y, z \in D$, називається дімоноїдом. У випадку, коли операції дімоноїда збігаються, він перетворюється у напівгрупу. Приклади дімоноїдів можна знайти в [2]–[7].

Відображення f дімоноїда D_1 у дімоноїд D_2 називається гомоморфізмом, якщо

$$(x \prec y)f = xf \prec yf, \ (x \succ y)f = xf \succ yf$$

для всіх $x, y \in D_1$. Якщо $f : D_1 \to D_2$ – гомоморфізм дімоноїдів, то через Δ_f позначатимемо відповідну конгруенцію на дімоноїді D_1.

Дімоноїд $(D, \prec, \succ)$ називається дімоноїдом ідемпотентів або дісполукою, якщо $x \prec x = x = x \succ x$ для всіх $x \in D$.

Поняття дісполуки піддімоноїдів було введено в [3] та охарактеризовано в [6]. Нагадаємо його означення.

Нехай S – довільний дімоноїд, J – деякий дімоноїд ідемпотентів. Якщо існує гомоморфізм

$$\alpha : S \to J : x \mapsto x\alpha,$$

то кожний клас конгруенції Δ_α є піддімоноїдом дімоноїда S, а сам дімоноїд S є об'єднанням таких дімоноїдів S_ξ, $\xi \in J$, що

$$\begin{gathered} x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \{t \in S \,|(x;t) \in \Delta_\alpha\}, \\ S_\xi \prec S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \prec \varepsilon}, \quad S_\xi \succ S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \succ \varepsilon}, \\ \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \bigcap S_\varepsilon = \varnothing. \end{gathered}$$

У цьому випадку говоритимемо, що S розкладається в дісполуку піддімоноїдів (або S є дісполукою J піддімоноїдів S_ξ, $\xi \in J$). Якщо ж J є напівгрупою ідемпотентів (=сполукою), то говоритимемо, що S є сполукою J піддімоноїдів S_ξ, $\xi \in J$.

Нагадаємо (див. [8]), що напівгрупа ідемпотентів S називається

(a) правою регулярною, якщо $ab = bab$ для всіх $a, b \in S$;
(b) лівою регулярною, якщо $ab = aba$ для всіх $a, b \in S$;
(c) регулярною, якщо $abca = abaca$ для всіх $a, b, c \in S$;
(d) правою напіврегулярною, якщо $axy = axyayxy$ для всіх $a, x, y \in S$;
(e) лівою напіврегулярною, якщо $xya = xyxaxya$ для всіх $x, y, a \in S$;
(f) правою нормальною, якщо $yxa = xya$ для всіх $y, x, a \in S$;
(g) лівою нормальною, якщо $axy = ayx$ для всіх $a, x, y \in S$;
(h) нормальною, якщо $abca = acba$ для всіх $a, b, c \in S$;
(i) правою напівнормальною, якщо $axy = axyay$ для всіх $a, x, y \in S$;
(j) лівою напівнормальною, якщо $xya = xaxya$ для всіх $x, y, a \in S$;
(k) правою квазінормальною, якщо $axy = axay$ для всіх $a, x, y \in S$;
(l) лівою квазінормальною, якщо $xya = xaya$ для всіх $x, y, a \in S$.

3. Допоміжні леми. У цьому пункті доведено необхідні нам леми.

3.1. Напівгрупу S будемо називати прямокутною, якщо $xyz = xz$ для всіх $x, y, z \in S$. Прямокутними напівгрупами є, наприклад, прямокутні сполуки, напівгрупи з нульовим множенням.

Має місце така лема.

Лема. *Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Якщо напівгрупа $(D, \prec)$ є напівгрупою лівих нулів, то напівгрупа $(D, \succ)$ є прямокутною.*

Доведення. Для всіх $a,\ b, c \in D$ маємо

$$(a \prec b) \succ c = a \succ c = a \succ b \succ c = a \succ (b \succ c)$$

згідно з аксіомами дімоноїда.

Лему доведено.

Нехай $(X, \prec)$ – напівгрупа лівих нулів, $(X, \succ)$ – прямокутна напівгрупа. Дімоноїд $(X, \prec, \succ)$ назвемо $(lz; rs)$-дімоноїдом.

3.2. Якщо ρ – така конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$, що ${(D, \prec, \succ)}/_{\rho}$ є дімоноїдом ідемпотентів, то будемо говорити, що ρ – ідемпотентна конгруенція.

Визначимо відношення Σ на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ за правилом:

$$a\Sigma\, b \text{ тоді і тільки тоді, коли } a = a \prec b,\ \ b = b \prec a.$$

У термінах дісполуки піддімоноїдів (див. п.2) має місце лема.

Лема. *Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд з ідемпотентною операцією $\prec$. Якщо відношення Σ є конгруенцією на напівгрупі $(D, \prec)$, то Σ є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ та операції фактор-дімоноїда ${(D, \prec, \succ)}/_{\Sigma}$ збігаються. У цьому випадку $(D, \prec, \succ)$ є сполукою $(lz; rs)$-піддімоноїдів.*

Доведення. Нехай Σ є конгруенцією на напівгрупі $(D, \prec)$. Покажемо, що Σ є стабільним відносно операції $\succ$.

Нехай $a\Sigma\, b$, $a, b, c \in D$. Тоді $a \prec c\Sigma\, b \prec c$. Це означає, що

$$a \prec c = (a \prec c\,) \prec (b \prec c), \tag{1}$$

$$b \prec c = (b \prec c\,) \prec (a \prec c). \tag{2}$$

Домножимо обидві частини рівності (1) на $a \succ c$ та рівності (2) на $b \succ c$, тоді отримаємо:

$$\begin{gathered}(a \succ c) \prec (a \prec c) = (a \succ c) \prec (a \succ c) = \\ = a \succ c = (a \succ c) \prec ((a \prec c\,) \prec (b \prec c)) = \\ = ((a \succ c) \prec (a \prec c\,)) \prec (b \prec c) = \\ = (a \succ c) \prec (b \prec c) = (a \succ c) \prec (b \succ c),\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(b \succ c) \prec (b \prec c) = (b \succ c) \prec (b \succ c) = \\ = b \succ c = (b \succ c) \prec ((b \prec c\,) \prec (a \prec c)) = \\ = ((b \succ c) \prec (b \prec c\,)) \prec (a \prec c) = \\ = (b \succ c) \prec (a \prec c) = (b \succ c) \prec (a \succ c)\end{gathered}$$

згідно з аксіомами дімоноїда та ідемпотентністю операції $\prec$. Отже, $a \succ c\Sigma b \succ c$. Аналогічно можна показати, що $c \succ a\Sigma c \succ b$. Таким чином, Σ є конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$.

Оскільки
$$a \prec b = (a \prec b) \prec (a \prec b) = (a \prec b) \prec (a \succ b),$$
$$a \succ b = (a \succ b) \prec (a \succ b) = (a \succ b) \prec (a \prec b)$$

для всіх $a, b \in D$ згідно з ідемпотентністю операції $\prec$ та аксіомами дімоноїда, то $a \prec b \, \Sigma \; a \succ b$. Звідси випливає, що операції фактор-дімоноїда ${(D, \prec, \succ)}/_{\Sigma}$ збігаються. Тоді з ідемпотентності операції $\prec$ випливає ідемпотентність конгруенції Σ.

Доведемо останнє твердження леми.

Якщо Σ – конгруенція на напівгрупі $(D, \prec)$, то Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$. Тоді
$$(D, \prec, \succ) \to {(D, \prec, \succ)}/_{\Sigma} : x \mapsto [x]$$
є гомоморфізмом ($[x]$ – клас конгруенції Σ, який містить x). З означення Σ випливає, що кожний клас A конгруенції Σ є напівгрупою лівих нулів відносно операції $\prec$. Звідси згідно з лемою п.3.1 A є прямокутною напівгрупою відносно операції $\succ$. Таким чином, A – $(lz; rs)$-піддімоноїд дімоноїда $(D, \prec, \succ)$.

Лему доведено.

3.3. Має місце така лема.

Лема. *Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Якщо напівгрупа $(D, \succ)$ є напівгрупою правих нулів, то напівгрупа $(D, \prec)$ є прямокутною.*

Доведення. Для всіх a, $b, c \in D$ маємо
$$a \prec (b \succ c) = a \prec c = a \prec b \prec c = (a \prec b) \prec c$$
згідно з аксіомами дімоноїда.

Лему доведено.

Нехай $(X, \prec)$ – прямокутна напівгрупа, $(X, \succ)$ – напівгрупа правих нулів. Дімоноїд $(X, \prec, \succ)$ назвемо $(rs; rz)$-дімоноїдом.

3.4. Визначимо відношення Ω на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\succ$ за правилом:
$$a\Omega b \text{ тоді і тільки тоді, коли } a = b \succ a, \;\; b = a \succ b.$$

У термінах дісполуки піддімоноїдів (див. п.2) має місце лема.

Лема. *Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд з ідемпотентною операцією $\succ$. Якщо відношення Ω є конгруенцією на напівгрупі $(D, \succ)$, то Ω є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ та операції фактор-дімоноїда ${(D, \prec, \succ)}/_{\Omega}$ збігаються. У цьому випадку $(D, \prec, \succ)$ є сполукою $(rs; rz)$-піддімоноїдів.*

Доведення. Нехай Ω є конгруенцією на напівгрупі $(D, \succ)$. Покажемо, що Ω є стабільним відносно операції $\prec$.

Нехай $a\Omega b$, $a, b, c \in D$. Тоді $a \succ c \Omega \, b \succ c$. Це означає, що
$$a \succ c = (b \succ c) \succ (a \succ c), \tag{3}$$
$$b \succ c = (a \succ c) \succ (b \succ c). \tag{4}$$

Домножимо обидві частини рівності (3) на $a \prec c$ та рівності (4) на $b \prec c$, тоді отримаємо:

$$(a \succ c) \succ (a \prec c) = (a \prec c) \succ (a \prec c) =$$
$$= a \prec c = ((b \succ c) \succ (a \succ c)) \succ (a \prec c) =$$

$$= (b \succ c) \succ ((a \succ c) \succ (a \prec c)) =$$
$$= (b \succ c) \succ (a \prec c) = (b \prec c) \succ (a \prec c),$$

$$(b \succ c) \succ (b \prec c) = (b \prec c) \succ (b \prec c) =$$
$$= b \prec c = ((a \succ c) \succ (b \succ c)) \succ (b \prec c) =$$

$$= (a \succ c) \succ ((b \succ c) \succ (b \prec c)) =$$
$$= (a \succ c) \succ (b \prec c) = (a \prec c) \succ (b \prec c)$$

згідно з аксіомами дімоноїда та ідемпотентністю операції $\succ$. Отже, $a \prec c\Omega b \prec c$. Аналогічно можна показати, що $c \prec a\Omega c \prec b$. Таким чином, Ω є конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$.

Оскільки

$$a \succ b = (a \succ b) \succ (a \succ b) = (a \prec b) \succ (a \succ b),$$

$$a \prec b = (a \prec b) \succ (a \prec b) = (a \succ b) \succ (a \prec b)$$

для всіх $a, b \in D$ згідно з ідемпотентністю операції $\succ$ та аксіомами дімоноїда, то $a \succ b\, \Omega a \prec b$. Звідси випливає, що операції фактор-дімоноїда ${}^{(D,\prec,\succ)}/_{\Omega}$ збігаються. Тоді з ідемпотентності операції $\succ$ випливає ідемпотентність конгруенції Ω.

Доведемо останнє твердження леми.

Якщо Ω – конгруенція на напівгрупі $(D, \succ)$, то Ω – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$. Тоді

$$(D, \prec, \succ) \to {}^{(D,\prec,\succ)}/_{\Omega} : x \mapsto [x)$$

є гомоморфізмом ($[x)$ – клас конгруенції Ω, який містить x). З означення Ω випливає, що кожний клас A конгруенції Ω є напівгрупою правих нулів відносно операції $\succ$. Звідси згідно з лемою п.3.3 A є прямокутною напівгрупою відносно операції $\prec$. Таким чином, A – $(rs; rz)$-піддімоноїд дімоноїда $(D, \prec, \succ)$.

Лему доведено.

3.5. Має місце така лема.

Лема. *Нехай* $(D, \prec, \succ)$ *– довільний дімоноїд,* $x,\ a_i \in D,\ \ 1 \le i \le n,\ n \in N,\ n > 1$. *Тоді*

(i) $(a_n \prec ... \prec a_i \prec ... \prec a_1) \succ x = a_n \succ ... \succ a_i \succ ... \succ a_1 \succ x$;

(ii) $x \prec (a_1 \succ ... \succ a_i \succ ... \succ a_n) = x \prec a_1 \prec ... \prec a_i \prec ... \prec a_n$.

Доведення. Доведемо (i), використовуючи індукцію за n. Для $n = 2$ маємо $(a_2 \prec a_1) \succ x = a_2 \succ a_1 \succ x$ згідно з аксіомами дімоноїда. Нехай

$$(a_k \prec ... \prec a_i \prec ... \prec a_1) \succ x = a_k \succ ... \succ a_i \succ ... \succ a_1 \succ x$$

для $n = k$. Тоді для $n = k + 1$ одержуємо

$$\begin{gathered}(a_{k+1} \prec a_k \prec \ldots \prec a_i \prec \ldots \prec a_1) \succ x = \\ = (a_{k+1} \prec (a_k \prec \ldots \prec a_i \prec \ldots \prec a_1)) \succ x = \\ = a_{k+1} \succ ((a_k \prec \ldots \prec a_i \prec \ldots \prec a_1) \succ x) = \\ = a_{k+1} \succ a_k \succ \ldots \succ a_i \succ \ldots \succ a_1 \succ x\end{gathered}$$

згідно з аксіомами дімоноїда та із урахуванням зробленого припущення. Таким чином, $(a_n \prec \ldots \prec a_i \prec \ldots \prec a_1) \succ x = a_n \succ \ldots \succ a_i \succ \ldots \succ a_1 \succ x$ для всіх $n > 1$.

Аналогічно можна довести рівність (ii).

Лему доведено.

3.6. Відомо (див. [8]), що напівгрупа ідемпотентів є регулярною тоді і тільки тоді, коли вона є напіврегулярною і зліва, і справа, та напівгрупа ідемпотентів є нормальною тоді і тільки тоді, коли вона є квазінормальною і зліва, і справа.

Дімоноїд ідемпотентів $(D, \prec, \succ)$ назвемо регулярним, якщо напівгрупи $(D, \prec)$ та $(D, \succ)$ є регулярними напівгрупами ідемпотентів.

Критерій регулярності дімоноїда ідемпотентів дає така лема.

Лема. *Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд ідемпотентів. Тоді $(D, \prec, \succ)$ є регулярним тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec)$ є правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів та $(D, \succ)$ є лівою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів.*

Доведення. Нехай $(D, \prec, \succ)$ – регулярний дімоноїд ідемпотентів. Тоді з означення регулярного дімоноїда та з критерію регулярності напівгрупи ідемпотентів випливає, що $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів.

Навпаки, нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд з правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ та з лівою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \succ)$. Оскільки $(D, \prec)$ – права напіврегулярна напівгрупа ідемпотентів, то

$$a \prec x \prec y = a \prec x \prec y \prec a \prec y \prec x \prec y$$

для всіх $a, x, y \in D$. Домножимо обидві частини останньої рівності на y відносно операції $\succ$, тоді отримаємо:

$$(a \prec x \prec y) \succ y = a \succ x \succ y \succ y = a \succ x \succ y,$$

$$\begin{gathered}(a \prec x \prec y \prec a \prec y \prec x \prec y) \succ y = \\ = a \succ x \succ y \succ a \succ y \succ x \succ y \succ y = \\ = a \succ x \succ y \succ a \succ y \succ x \succ y\end{gathered}$$

згідно з лемою п.3.5 та ідемпотентністю операції $\succ$. Отже, $(D, \succ)$ – права напіврегулярна напівгрупа ідемпотентів. Таким чином, напівгрупа ідемпотентів $(D, \succ)$ є напіврегулярною і зліва, і справа. Звідси за критерієм регулярності напівгрупи ідемпотентів $(D, \succ)$ є регулярною напівгрупою ідемпотентів.

Оскільки $(D, \succ)$ – ліва напіврегулярна напівгрупа ідемпотентів, то

$$x \succ y \succ a = x \succ y \succ x \succ a \succ x \succ y \succ a$$

для всіх $x, y, a \in D$. Домножимо обидві частини останньої рівності на x відносно операції $\prec$, тоді отримаємо:

$$x \prec (x \succ y \succ a) = x \prec x \prec y \prec a = x \prec y \prec a,$$

$$\begin{gathered} x \prec (x \succ y \succ x \succ a \succ x \succ y \succ a) = \\ = x \prec x \prec y \prec x \prec a \prec x \prec y \prec a = \\ = x \prec y \prec x \prec a \prec x \prec y \prec a \end{gathered}$$

згідно з лемою п.3.5 та ідемпотентністю операції $\prec$. Отже, $(D, \prec)$ є лівою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. Таким чином, напівгрупа ідемпотентів $(D, \prec)$ є напіврегулярною і справа, і зліва. Звідси за критерієм регулярності напівгрупи ідемпотентів $(D, \prec)$ є регулярною напівгрупою ідемпотентів.

Таким чином, за означенням $(D, \prec, \succ)$ – регулярний дімоноїд ідемпотентів.

Лему доведено.

4. Основні результати. У цьому пункті наведено основні результати роботи.

4.1. В умовах та позначеннях пунктів 3.1–3.4 має місце теорема.

Теорема. *Нехай $(D, \prec, \succ)$ – дімоноїд. Відношення Σ (відповідно Ω) є ідемпотентною конгруенцією на $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ (відповідно $\succ$) тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. У цьому випадку $(D, \prec, \succ)$ з правою (відповідно лівою) напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$ (відповідно $(D, \succ)$) є правою (відповідно лівою) регулярною сполукою $(lz; rs)$-піддімоноїдів (відповідно $(rs; rz)$-піддімоноїдів).*

Доведення. Нехай Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$. Тоді за теоремою 1 роботи [8] $(D, \prec)$ є правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. Навпаки, нехай $(D, \prec)$ є правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів. Тоді за теоремою 1 роботи [8] Σ є конгруенцією на напівгрупі ідемпотентів $(D, \prec)$. Звідси згідно з лемою п.3.2 Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$.

Нехай тепер Σ – ідемпотентна конгруенція на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з правою напіврегулярною напівгрупою ідемпотентів $(D, \prec)$. Згідно з лемою п.3.2 операції фактордімоноїда ${}^{(D, \prec, \succ)}/_{\Sigma}$ збігаються та $(D, \prec, \succ)$ є сполукою ${}^{(D, \prec)}/_{\Sigma}$ $(lz; rs)$-піддімоноїдів. Але в цьому випадку за теоремою 1 роботи [8] ${}^{(D, \prec)}/_{\Sigma}$ – права регулярна напівгрупа ідемпотентів. Отже, $(D, \prec, \succ)$ є правою регулярною сполукою $(lz; rs)$-піддімоноїдів.

Аналогічно, використовуючи теорему 1 роботи [8] та лему п.3.4, можна довести двоїстий випадок.

Теорему доведено.

Ця теорема узагальнює теорему 1 роботи [8].

4.2. З теореми п.4.1, з леми п.3.6 та з критерію регулярності напівгрупи ідемпотентів (п.3.6) отримуємо наслідок.

Наслідок. *Відношення Σ та Ω є конгруенціями на дімоноїді ідемпотентів $(D, \prec, \succ)$ тоді і тільки тоді, коли $(D, \prec, \succ)$ – регулярний дімоноїд ідемпотентів.*

Цей наслідок узагальнює першу частину наслідку теореми 1 роботи [8].

4.3. З теореми п.4.1 та з критерію регулярності напівгрупи ідемпотентів отримуємо наслідок.

Наслідок. *Нехай* $(D, \prec, \succ)$ *– дімоноїд. Тоді* $(D, \prec, \succ)$ *з регулярною напівгрупою ідемпотентів* $(D, \prec)$ $($*відповідно* $(D, \succ))$ *є правою (відповідно лівою) регулярною сполукою* $(lz; rs)$*-піддімоноїдів (відповідно* $(rs; rz)$*-піддімоноїдів).*

4.4. В умовах та позначеннях пунктів 3.1–3.4 має місце теорема.

Теорема. $(D, \prec, \succ)$ *– дімоноїд. Відношення* Σ *(відповідно* Ω*) є ідемпотентною конгруенцією на* $(D, \prec, \succ)$ *з ідемпотентною операцією* $\prec$ *(відповідно* $\succ$*) і* $(D, \prec, \succ)$ *з ідемпотентною операцією* $\prec$ *(відповідно* $\succ$*) є правою (відповідно лівою) нормальною сполукою* ${}^{(D,\prec)}/_{\Sigma}$ *(відповідно* ${}^{(D,\succ)}/_{\Omega}$*)* $(lz; rs)$*-піддімоноїдів (відповідно* $(rs; rz)$*-піддімоноїдів) тоді і тільки тоді, коли* $(D, \prec)$ $($*відповідно* $(D, \succ))$ *є правою (відповідно лівою) напівнормальною напівгрупою ідемпотентів.*

Доведення. Нехай Σ є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ і $(D, \prec, \succ)$ є правою нормальною сполукою ${}^{(D,\prec)}/_{\Sigma}$ $(lz; rs)$-піддімоноїдів. Тоді за теоремою 2 роботи [8] $(D, \prec)$ є правою напівнормальною напівгрупою ідемпотентів. Навпаки, нехай $(D, \prec)$ є правою напівнормальною напівгрупою ідемпотентів. Тоді за теоремою 2 роботи [8] Σ є конгруенцією на напівгрупі ідемпотентів $(D, \prec)$ і $(D, \prec)$ є правою нормальною сполукою ${}^{(D,\prec)}/_{\Sigma}$ напівгруп лівих нулів. Звідси згідно з лемою п.3.2 Σ є ідемпотентною конгруенцією на дімоноїді $(D, \prec, \succ)$ з ідемпотентною операцією $\prec$ і $(D, \prec, \succ)$ є правою нормальною сполукою ${}^{(D,\prec)}/_{\Sigma}$ $(lz; rs)$-піддімоноїдів.

Аналогічно, використовуючи теорему 2 роботи [8] та лему п.3.4, можна довести двоїстий випадок.

Теорему доведено.

Ця теорема узагальнює теорему 2 роботи [8].

4.5. Має місце така теорема.

Теорема. *Нехай* $(D, \prec, \succ)$ *– дімоноїд. Тоді* $(D, \prec, \succ)$ *з правою (відповідно лівою) квазінормальною напівгрупою ідемпотентів* $(D, \prec)$ $($*відповідно* $(D, \succ))$ *є правою (відповідно лівою) нормальною сполукою* $(lz; rs)$*-піддімоноїдів (відповідно* $(rs; rz)$*-піддімоноїдів).*

Доведення. Згідно з теоремою 3 роботи [8] Σ – конгруенція на правій квазінормальній напівгрупі ідемпотентів $(D, \prec)$ та ${}^{(D,\prec)}/_{\Sigma}$ – права нормальна напівгрупа ідемпотентів (див. п.3.2). Тоді згідно з лемою п.3.2 $(D, \prec, \succ)$ є правою нормальною сполукою ${}^{(D,\prec)}/_{\Sigma}$ $(lz; rs)$-піддімоноїдів.

Аналогічно, використовуючи теорему 3 роботи [8] та лему п.3.4, можна довести двоїстий випадок.

Теорему доведено.

4.6. З теореми п.4.5 та з критерію нормальності напівгрупи ідемпотентів (п.3.6) отримуємо наслідок.

Наслідок. *Нехай* $(D, \prec, \succ)$ *– дімоноїд. Тоді* $(D, \prec, \succ)$ *з нормальною напівгрупою ідемпотентів* $(D, \prec)$ $($*відповідно* $(D, \succ))$ *є правою (відповідно лівою) нормальною сполукою* $(lz; rs)$*-піддімоноїдів (відповідно* $(rs; rz)$*-піддімоноїдів).*

1. *Loday J.-L.* Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz // Enseign. Math. – 1993. – 39. – P. 269-293.
2. *Loday J.-L.* Dialgebras // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer, Berlin. – 2001. – 1763. – P. 7-66.
3. *Zhuchok A.V.* Commutative dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2009. – N 2. – P. 116-127.
4. *Zhuchok A.V.* Semilattices of subdimonoids // Asian-European Journal of Math. – 2011. – To appear.
5. *Zhuchok A.V.* Free commutative dimonoids // Algebra and Discrete Math. – 2010. – 9, N 1. – P. 109-119.
6. *Zhuchok A.V.* Dibands of subdimonoids // Mat. Stud. – 2010. – 33. – P. 120-124.
7. *Жучок А.В.* Вільні дімоноїди // Укр. мат. журн. – 2011. – 63, № 2. – С. 165-175.
8. *Kimura N.* Note on Idempotent Semigroups. III // Proc. Japan Academy. – 1958. – 34, N 2. – P. 113-114.

A.V. Zhuchok

Dimonoids with an idempotent operation.

We prove the structure theorems for dimonoids with an idempotent operation.

Keywords: *dimonoid with an idempotent operation, idempotent semigroup, congruence, diband of subdimonoids.*

А.В. Жучок

Димоноиды с идемпотентной операцией.

В работе доказано несколько структурных теорем для димоноидов с идемпотентной операцией.

Ключові слова: *димоноид с идемпотентной операцией, полугруппа идемпотентов, конгруэнция, дисвязка поддимоноидов.*

Київський національний ун-т імені Тараса Шевченка
`zhuchok_a@mail.ru`

Получено 30.03.11