УДК 531.36, 517.977

©2011. **В.В. Грушковская, А.Л. Зуев**

УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С МОНОТОННОЙ МЕРОЙ НА ФАЗОВОМ ПОТОКЕ

В работе рассмотрена задача о притяжении траекторий динамической системы к положению равновесия для почти всех начальных условий. Для исследования притягивающего множества динамической системы использована мера в фазовом пространстве, обладающая свойством монотонности на потоке. Найдены достаточные условия притяжения решений без предположения о строгой положительности дивергенции функции плотности. Этот результат распространяет подход А. Рантцера на случай абстрактных динамических систем в метрическом пространстве. С помощью построения функции плотности в явном виде исследована модельная система нелинейных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *динамические системы, устойчивость, функция плотности.*

1. Введение. Основным подходом к исследованию устойчивости движений нелинейных механических систем является прямой метод Ляпунова. В недавнее время возникло новое направление, использующее более слабое понятие [1, 2] устойчивости почти всюду. Согласно этой концепции, положение равновесия называется устойчивым почти всюду, если оно является притягивающим при почти всех начальных условиях. Шведский математик A. Rantzer предложил подход к исследованию притягивающих точек в терминах функции плотности меры. В работе [2] доказано, что существование функции плотности является достаточным условием для притяжения решений исследуемой системы при почти всех по мере Лебега начальных условиях. Также показана двойственность функции плотности по отношению к функции Ляпунова.

Развивая подход работы [2], некоторые авторы доказали различные результаты, применимые к исследованию асимптотической устойчивости. В частности, A. Rantzer [3] и P. Monzon [4] получили обратную теорему для устойчивости почти всюду, подобную аналогичной теореме, обеспечивающей существование функции Ляпунова для асимптотически устойчивых систем. Кроме того, в работе [5] P.A. Parrilo и A. Rantzer получили критерий, позволяющий синтезировать функции управления методами выпуклой оптимизации. В работе [6] продемонстрированы возможности этого критерия, а также его модификация для притягивающего множества в отличие от притягивающей точки.

S. Prajna и A. Rantzer [7] доказали существование однородных функций плотности для однородных систем, положение равновесия которых асимптотически устойчиво. Также показано, что однородная функция плотности существует в том случае, если найдется достаточно быстро убывающая неоднородная функция плотности с положительной дивергенцией.

В работе [8] P. Monzon представил результат для двумерных систем, демонстрирующий взаимосвязь теоремы Пуанкаре-Бендиксона с условиями на функцию плотности для задач устойчивости почти всюду. Некоторые замечания по структуре функций плотности были приведены в [9], где подчеркивалось, что требование принадлежности к класу C^1 для функций плотности накладывает жёсткие ограничения в случае систем с отрицательной дивергенцией в окрестности седловой точки. D. Angeli [1] рассмотрел понятия слабой устойчивости от входа к состоянию и устойчивость от входа к состоянию почти всюду для систем на многообразиях. Представленные понятия также применимы к системам, которые не являются глобально асимптотически стабилизируемыми.

В работе [10] для исследования устойчивости вращательного движения используется методика, объединяющая прямой метод Ляпунова с функциями плотности. Результатом работы является подход к анализу устойчивости от входа к состоянию почти всюду, показывающий, как функции Ляпунова и функции плотности могут применяться к исследованию локальной и слабой устойчивости от входа к состоянию почти всюду, и как сочетание этих двух методов позволяет доказать свойство устойчивости от входа к состоянию почти всюду. Ещё одним важным результатом работы [10] является новый инструмент исследования локальной устойчивости изолированных точек с помощью функций плотности.

I. Masubuchi [11] ввёл понятие “слабой производной от меры”, допускающее более широкий класс функций плотности. Основным результатом статьи [11] являются достаточные условия для функций плотности, обеспечивающие положительную инвариантность и притягиваемость траекторий почти всюду. Также получены обратные теоремы, доказывающие существование функций плотности, которые определяются на положительно инвариантных множествах. S. G. Loizou, A. Jadbabaie в работе [12] представили схему построения функций плотности для систем, которые глобально асимптотически устойчивы почти всюду, при помощи так называемых “навигацонных функций”.

Основной результат работы [13] показывает, что устойчивость почти всюду притягивающего множества для непрерывных по времени динамических систем эквивалентна существованию некоторого положительного решения, рассматриваемого как плотность “меры Ляпунова”. Приложения меры Ляпунова к задаче построения стабилизирующего управления и для решения задачи планирования движения изучены также в работах [14-18].

В данной статье получены условия притяжения особой точки для почти всех начальных условий при ослабленных ограничениях на меру и соответствующую функцию плотности.

2. Основной результат. Рассмотрим метрическое пространство D с метрикой $\rho : D \times D \to \mathbb{R}_+$. Будем предполагать, что задано семейство отображений

$$\varphi_t(p) \in D : \ t \in \mathbb{R}, \ p \in D, \tag{1}$$

и что $\varphi_t(x)$ обладает свойствами динамической системы:

1. $\varphi_0(p) = p$ при всех $p \in D$;
2. отображение $(t, p) \mapsto \varphi_t(p)$ непрерывно в $\mathbb{R} \times D$;

3. $\varphi_{t_1}(\varphi_{t_2}(p)) = \varphi_{t_1+t_2}(p)$ для всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $p \in D$.

Прежде чем перейти к изложению основного результата докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 1. [2] *Пусть (D, A, μ) – пространство с мерой, A – σ-алгебра измеримых множеств по мере μ, $P \in A$, $\mu(P) < \infty$, $T : D \to D$ – измеримое отображение. Предположим, что $\mu\left(T^{-1}(Y)\right) \le \mu(Y)$ для любого множества $Y \in A$. Определим множество Z следующим образом:*

$$Z = \{x \in P : T^n(x) \in P \text{ для бесконечного множества индексов } n \ge 0\}.$$

Тогда $\mu\left(T^{-1}Z\right) = \mu(Z)$.

Доказательство. Заметим, что $Z = P \bigcap \left(\bigcap\limits_{j=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=j}^{\infty} T^{-k}(P) \right)$, следовательно Z измеримо.

Определим для $n = 1, 2, \ldots$,

$$Z_n = \bigcup_{k=1}^{n} T^{-k}(Z),\ Z_0 = \varnothing.$$

Множество Z_n для $n \ge 1$ состоит из тех элементов множества D, которые отображаются в Z_n через n или менее шагов. Докажем индукцией по n, что

$$\mu\left(T^{-1}(Z)\right) \ge \mu\left(Z_n \bigcap Z\right) + \mu\left(T^{-n-1}(Z) \bigcap \overline{Z_n}\right). \tag{2}$$

Неравенство очевидно выполняется для $n = 0$. Предположим, что оно верно для некоторого $n \ge 0$. Тогда

$$\mu\left(T^{-1}(Z)\right) \ge \mu\left(Z_n \bigcap Z\right) + \mu\left(T^{-n-1}(Z) \bigcap \overline{Z_n}\right) =$$

$$= \mu\left(Z_n \bigcap Z\right) + \mu\left(T^{-n-1}(Z) \bigcap \overline{Z_n} \bigcap Z\right) + \mu\left(T^{-n-1}(Z) \bigcap \overline{Z_n} \bigcap \overline{Z}\right) \ge$$

$$\ge \mu\left(\left(Z_n \bigcup \left(T^{-n-1}(Z) \bigcap \overline{Z_n}\right) \bigcap Z\right)\right) + \mu\left(T^{-1}\left(T^{-n-1}(Z) \bigcap \overline{Z_n} \bigcap \overline{Z}\right)\right) =$$

$$= \mu\left(Z_{n+1} \bigcap Z\right) + \mu\left(T^{-n-2}(Z) \bigcap \overline{Z}_{n+1}\right).$$

Таким образом, индукция по n доказывает (2) для всех целых $n \ge 0$. Отсюда следует, что

$$\mu(Z) \ge \mu\left(T^{-1}(Z)\right) \ge \sup_n \mu\left(Z_n \bigcap Z\right) = \mu(Z),$$

где последнее равенство следует из того, что $Z = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T^{-n}(Z) \right) \bigcap P$. $\square$

Для формулировки основного результата введем обозначения

$$B_\varepsilon(x^*) = \{x \in D : \rho(x^*, x) < \varepsilon\}, \quad \varphi_t(Z) = \{\varphi_t(p) : p \in Z\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* (D, ρ) *– метрическое пространство,* $\varphi_t(x)$ *– динамическая система в* D*,* $x^* \in D$*. Предположим, что существует* μ *– мера в* D *такая, что:*

1) $D \backslash B_\varepsilon(x^*)$ *–* μ*-измеримо,* $\mu(D \backslash B_\varepsilon(x^*)) < \infty$*,* $\mu(B_\varepsilon(x^*)) = \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$*;*
2) $\mu(\varphi_t(Z)) \geq \mu(Z)$ *для всех* $t \geq 0$ *и для любого* μ*-измеримого множества ненулевой меры* $Z \subset D$*;*
3) *если* $\mu(\varphi_t(Z)) = \mu(Z)$ *и* $t > 0$*, то* $\mu(Z) = 0$*;*
4) *существует непрерывная в нуле функция* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, для которой* $\alpha(0) = 0$*,*

$$\rho(x^*, \varphi_\tau(p)) \leq \alpha(\rho(x^*, p)) \tag{3}$$

для всех $\tau \in [0, 1)$*,* $p \in D$*.*

Тогда $\varphi_t(x_0) \to x^*$ *при* $t \to +\infty$ *для почти всех* $x_0 \in D$ *по мере* μ *.*

Доказательство. Для произвольных $x_0 \in D$ и $\varepsilon > 0$ положим

$$P = B_\varepsilon(x^*), \quad T(x_0) = \varphi_1(x_0).$$

Согласно условию 1) теоремы, множество P – μ-измеримо. Из условия 2) теоремы, для любого μ-измеримого множества $Y \subset P$ имеем:

$$\mu(T(Y)) \geq \mu(Y).$$

Отсюда следует, что:

$$\mu\left(T^{-1}\widetilde{Y}\right) \leq \mu\left(\widetilde{Y}\right),$$

где $\widetilde{Y} = T(Y), Y = T^{-1}\left(\widetilde{Y}\right)$.

В качестве Z возьмём следующее множество:

$$Z = \{x_0 : \rho(x_0, x^*) > \varepsilon, \ \rho(x(n, x_0), x^*) > \varepsilon \text{ для бесконечного множества } n \geq 0\}.$$

Тогда $\mu\left(T^{-1}Z\right) = \mu(Z)$ по лемме 1. Отсюда следует, что $\mu(Z) = 0$ по условию 2) теоремы.

Это означает, что для $x_0 \in D \backslash Z$, то есть для почти всех по мере μ начальных значений x_0, условие

$$\rho(x(n, x_0), x^*) > \varepsilon$$

выполнено лишь на конечном множестве индексов $n \geq 0$. Отсюда

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x(n, x_0), x^*) \leq \varepsilon$$

для почти всех $x_0 \in D$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x(n, x_0), x^*) = 0$$

для почти всех $x_0 \in D$.

Для неотрицательного вещественного числа t обозначим через $[t], \{t\}$ его целую и дробную части, соответственно. Тогда

$$\rho\left(\varphi_t\left(x_0\right), x^*\right) = \rho\left(\varphi_{[t]+\{t\}}\left(x_0\right), x^*\right) = \rho\left(\varphi_{\{t\}}\left(\varphi_{[t]}\left(x_0\right)\right), x^*\right) \leq \alpha\left(\rho\left(\varphi_{[t]}\left(x_0\right), x^*\right)\right)$$

для почти всех по мере μ начальных значений $x_0 \in D$. $\square$

3. Построение функции плотности меры. В качестве примера рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0\left(x_1^3 - 3x_1x_2^2 + \left(b^2 - a^2\right)x_1 + 2abx_2\right), \\ \dot{x}_2 = a_0\left(-x_2^3 + 3x_1^2x_2 + \left(b^2 - a^2\right)x_2 - 2abx_1\right), \end{cases} \tag{4}$$

где a_0, a, b – вещественные константы.

В этом случае $D = \mathbb{R}^2$ с метрикой $\rho\left(x, x^*\right) = \|x - x^*\|$, $\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $x^* = 0$, а $x = \varphi_t\left(x_0\right)$ – фазовый поток системы (4). В качестве искомой меры рассмотрим

$$\mu\left(Z\right) = \int\limits_Z \frac{dx}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}. \tag{5}$$

Первое условие теоремы 1, очевидно, выполняется. Проверим, что $\mu\left(\varphi_t\left(Z\right)\right) \geq \mu\left(Z\right)$ для всех $t \geq 0$ и для любого μ-измеримого множества $Z \subset D$ такого, что $\mu\left(Z\right) > 0$. Это условие эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\left(\varphi_t\left(Z\right)\right)\right) \geq 0, \quad \forall t \geq 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\left(\varphi_t\left(Z\right)\right)\right) = \frac{d}{dt}\int\limits_{\varphi_t(Z)} \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}dx + \int\limits_Z div\left(\frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}f\left(x\right)\right)dx. \tag{6}$$

В правой части полученного равенства первое слагаемой равно нулю. Вычислим дивергенцию в выражении (6):

$$div\left(\frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}f\left(x\right)\right) =$$

$$= \left(\nabla\left(\frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}\right), f\left(x\right)\right) + \frac{1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}divf\left(x\right) = \frac{4a_0\left(a^2 - b^2\right)}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\left(\varphi_t\left(Z\right)\right)\right) = 4a_0\left(a^2 - b^2\right)\int\limits_Z \frac{dx}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^3}$$

и, следовательно, условия 2) и 3) теоремы 1 выполняются при $a_0\left(a^2 - b^2\right) > 0$.

Осталось проверить выполнение четвёртого условия теоремы.

Введём замену переменных

$$y_j = x_j - x_j^*. \tag{7}$$

Тогда система (4) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = P_1\left(y_1, y_2\right), \\ \dot{y}_2 = P_2\left(y_1, y_2\right), \end{cases} \tag{8}$$

где $P_1(y_1, y_2), P_2(y_1, y_2)$ – многочлены третьей степени.

Пусть $P(y_1, y_2) = (P_1(y_1, y_2), P_2(y_1, y_2))$, тогда

$$\left\| P\left(y_1, y_2\right) \right\| \leq M \left(\left\| y \right\|^3 + 1 \right)$$

с некоторой константой $M > 0$ для всех $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим $v\left(y_1, y_2\right) = \left\| y \right\|^2$, тогда

$$\dot{v} = 2\left(y_1 P_1\left(y_1, y_2\right) + y_2 P_2\left(y_1, y_2\right)\right) \leq 2M \left\| y \right\| \left(\left\| y \right\|^3 + 1 \right) = 2M v^{\frac{1}{2}} \left(v^{\frac{3}{2}} + 1 \right)$$

в силу системы (8). Для полученного дифференциального неравенства запишем уравнение сравнения:

$$\dot{v} = 2M v^{\frac{1}{2}} \left(v^{\frac{3}{2}} + 1 \right). \tag{9}$$

Пусть $\tilde{v}\left(v_0, t\right)$ – решение уравнения сравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $\tilde{v} = v_0 \geq 0$ при $t = 0$. Тогда для решения $y\left(t, y_0\right)$ системы (8), удовлетворяющего начальному условию $y = y_0$ при $t = 0$, выполняется оценка

$$v\left(y\left(t, y_0\right)\right) \leq \tilde{v}\left(\left\| y_0 \right\|^2, t \right), \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Возвращаясь к замене переменных (7), получим

$$v\left(y\left(t, y_0\right)\right) = \rho^2\left(x^*, \varphi_t\left(x_0\right)\right), \ \left\| y_0 \right\| = \rho\left(x^*, x_0\right).$$

Тогда неравенство (10) примет вид:

$$\rho\left(x^*, \varphi_t\left(x_0\right)\right) \leq \sqrt{\tilde{v}\left(\rho^2\left(x^*, x_0\right), t\right)}. \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$\alpha\left(s\right) = \sup_{\tau \in [0,1]} \sqrt{\tilde{v}\left(s^2, \tau\right)}.$$

По теореме о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начальных условий [19], $\alpha\left(s\right) \to 0$ при $s \to 0$. Кроме того, из неравенства (11) следует выполнение неравенства (3). Таким образом, функция $\alpha\left(s\right)$ удовлетворяет условию 4) теоремы 1. Следовательно, решения уравнения (4) стремятся к $x^* = 0$ при $t \to +\infty$ для почти всех $x_0 \in D$ по мере μ, заданной формулой (5).

На рис. 1 приведен фазовый портрет системы (4) для следующих значений параметров: $a_0 = 1$, $a = 2$, $b = 1$.

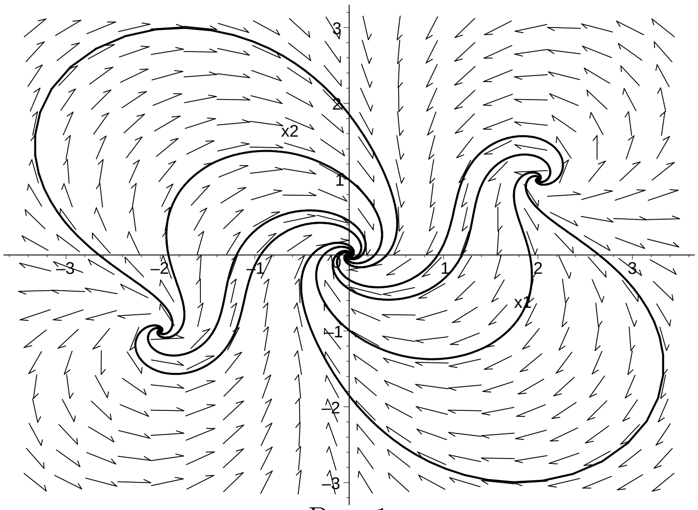

Рис. 1

Приведенная иллюстрация показывает, что особая точка $x_1 = x_2 = 0$ системы (4) является устойчивым фокусом, а фокусы $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ и $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ неустойчивы. Следует отметить, что в отличие от условий устойчивости по линейному приближению, теорема 1 дает глобальную характеристику траекторий системы.

4. Заключение. Доказанная в работе теорема описывает достаточные условия притяжения особой точки динамической системы для почти всех начальных условий. Основная трудность в применении этого подхода состоит в построении меры μ, удовлетворяющей условиям 1)-3) теоремы 1. Для случая динамической системы в ограниченно компактном пространстве D условие 4) теоремы 1 выполнено, если в качестве $\alpha(s)$ взять следующую функцию:

$$\alpha(s) = \sup_{\substack{0\le\tau\le 1 \\ x_0:\rho(x^*,x_0)\le s}} \rho\left(x^*, \varphi_\tau(x_0)\right).$$

При этом точная верхняя граница достигается по теореме Вейерштрасса. В случае произвольного фазового пространства D вопрос о существовании такой функции $\alpha(s)$ остаётся открытым и представляет интерес для дальнейшего исследования.

Работа выполнена при частичной поддержке за счет гранта Президента Украины для молодых ученых (GP/F32/141).

1. *Angeli D.* An almost global notion of input to state stability // IEEE Trans. Automat. Control. – 2004. – Vol. 49 – P. 866–874.
2. *Rantzer A.* A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems and Control Letters. – 2001. – Vol. 42. – P. 161–168.
3. *Rantzer A.* A converse theorem for density functions // Proc. IEEE Conference on Decision and Control. – Las Vegas (USA), 2002. – P. 1890–1891.
4. *Monzon P.* On necessary conditions for almost everywhere stability // IEEE Trans. Automat. Control. – 2003. – Vol. 48 – P. 631–634.
5. *Parrilo P.A., Rantzer A.* On convexity in stabilization of nonlinear systems // Proc. IEEE Conference on Decision and Control. – Sidney (Australia), 2000. – Vol. 3 – P. 2942-2945.

6. *Rantzer A., Ceragioli F.* Smooth blending of nonlinear controllers using density functions // Proc. European Control Conference. – Porto (Portugal), 2001. – P. 2851-2853.
7. *Prajna S., Rantzer A.* On homogeneous density functions // In: Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization (A. Rantzer, C.I. Byrnes, Eds.) – Berlin: Springer, 2003. – P. 261-274.
8. *Monzon P.* Almost global attraction in planar systems // Systems and Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 753-758.
9. *Angeli D.* Some remarks on density function dual Lyapunov methods // Proc. IEEE Conference on Decision and Control. – Maui (USA), 2003. – P. 5080–5082.
10. *Vasconcelos J.F., Rantzer A., Silvestre C., Oliveira P.* Combination of Lyapunov and Density Functions for Stability of Rotational Motion // Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. – Shanghai (P.R. China), 2009. – P. 5941-5946.
11. *Masubuchi I.* Density Functions Characterizing Positive Invariance and Regional Almost Attraction with Converse Results // Proc. IEEE Conference on Decision and Control. – San Diego (USA), 2006. – P. 5126–5131.
12. *Loizou S.G., Jadbabaie A.* Density Functions for Navigation Function Based Systems // IEEE Trans. Automat. Control. – 2008. – Vol. 53 – P. 612–617.
13. *Rajaram R., Vaidya U., Fardad M., Ganapathysubramanian B.* Stability in the almost everywhere sense: A linear transfer operator approach // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2010. – Vol. 368 – P. 144-156.
14. *Vaidya U.* Converse theorem for almost everywhere stability using Lyapunov measure // Proc. American Control Conference. – New York (USA), 2007. – P. 4835–4840.
15. *Vaidya U., Mehta P.G.* Computation of Lyapunov measure for almost everywhere stability // Proc. IEEE Conference on Decision and Control. – San Diego (USA), 2006. – P. 5228–5233.
16. *Vaidya U., Mehta P.G.* Lyapunov measure for almost everywhere stability // IEEE Trans. Automat. Control. – 2009. – Vol. 53.– P. 307–323.
17. *Raghunathan A., Vaidya U.* Optimal stabilization using Lyapunov measure // Proc. American Control Conference. – Seattle (USA), 2008.– P. 1746–1751.
18. *Vaidya U., Bhattacharya R.* Motion planning using navigation measure // Proceedings of American Control Conference. – Seattle (USA), 2008. – P. 850–855.
19. *Петровский И. Г.* Лекции по теории дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

V. Grushkovskaya, A. Zuyev

Stability conditions for nonlinear dynamical systems with a monotonic measure on the phase flow.

In this paper, the problem of attraction of the trajectories to an equilibrium of a dynamical system is considered for almost all initial conditions. A measure with the monotonicity property on the phase flow is used for the investigation of the attractive set. Sufficient conditions for the attraction of the solutions are obtained without assuming that the divergence of the density function is strictly positive. This result extends A. Ranter's approach for the case of abstract dynamical systems in a metric space. A model system of nonlinear differential equations is studied by means of an explicit construction of the density function.

Keywords: *dynamical systems, stability, density function.*

В.В. Грушковська, О.Л.Зуєв

Умови стійкості нелінійних динамічних систем з монотонною мірою на фазовому потоці.

У роботі розглянуто задачу про притягання траєкторій динамічних систем до стану рівноваги для майже всіх початкових умов. Для дослідження притягальної множини динамічної системи використано міру в фазовому просторі, що має властивість монотонності на потоці. Знайдено достатні умови притягання розв'язків без припущення щодо строгої позитивності дивергенції функції щільності. Цей результат поширює підхід А. Рантцера на випадок абстрактних динамічних систем у метричному просторі. За допомогою побудови функції щільності в явному вигляді досліджено модельну систему нелінійних диференціальних рівнянь.

Ключові слова: *динамічні системи, стійкість, функція щільності.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк,
Донецкий национальный ун-т
v_grushkovskaya@mail.ru, al_zv@mail.ru

Получено 16.05.11