УДК 517.5

©2011. **В.Е. Величко, О.А. Новиков, О.Г. Ровенская, $\boxed{\text{В.И. Рукасов}}$**

ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОВТОРНЫМИ СУММАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Получены асимптотические равенства для верхних граней уклонений тригонометрических полиномов, порождаемых повторным методом суммирования Валле Пуссена, взятых по классам аналитических периодических функций действительной переменной.

Ключевые слова: *ряд Фурье, линейные методы приближения.*

В работе Степанца А.И. [1] введены классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ следующим образом.

Пусть L – пространство суммируемых 2π-периодических функций, $f \in L$ и

$$S[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big)$$

– ряд Фурье функции f. Пусть, далее, $\psi(k)$ – произвольная функция натурального аргумента и β – произвольное действительное число. Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\big(a_k \cos(kx + \frac{\beta\pi}{2}) + b_k \sin(kx + \frac{\beta\pi}{2})\big)$$

является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f^{\psi}_{\beta}(\cdot)$, то ее называют (ψ,β)-производной функции $f(\cdot)$. Множество всех непрерывных функций, обладающих (ψ,β)-производными, обозначается через C^{ψ}_{β}. Если $f \in C^{\psi}_{\beta}$ и кроме того $f^{\psi}_{\beta}(x) \in S^0_M$, т.е. выполнены условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\beta}(x)dx = 0, \operatorname{esssup}|f^{\psi}_{\beta}(x)| \le 1,$$

то, следуя [1], будем говорить, что $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$.

В данной работе рассмотрим случай, когда $\psi(k) = \mathrm{e}^{-\alpha k}, k = 1, 2, ...,$ где $\alpha > 0$ – фиксированное действительное число. Обозначим символом $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ класс $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, определяемый указанной функцией $\psi(k)$. При этом также будем обозначать $f^{\psi}_{\beta}(x) = f^{\alpha}_{\beta}(x)$. Известно (см., например, [2]), что класс $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ состоит из функций f, которые являются сужениями на действительную ось функций $F(z)$, аналитических в полосе $|\mathrm{Im} z| \le \frac{\alpha}{2\ln 2}$.

Пусть $\Lambda = \big\{\lambda^{(n)}_k\big\}$ – бесконечная треугольная матрица чисел, с помощью которой каждой функции $f(x)$, поставим в соответствие последовательность тригонометрических полиномов

$$U_n(f;x;\Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{1}$$

Пусть

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 1 \le k \le n-p \\ 1 - \frac{k-n+p}{p}, & n-p \le k \le n. \end{cases} \tag{2}$$

Как известно (см., например, [3]), полиномы вида (1), задаваемые при помощи соотношения (2), называются суммами Валле Пуссена и обозначаются $V_{n,p}(f,x)$. Суммы Валле Пуссена можно также представить в виде средних арифметических сумм Фурье $S_k(f,x)$

$$V_{n,p}(f,x) = \frac{1}{p} \sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f,x).$$

Пусть p_1, p_2 – произвольные натуральные числа такие, что $p_1 + p_2 < n$. Повторными средними арифметическими сумм Фурье (см. [4]) будем называть тригонометрические полиномы, которые задаются соотношением

$$V_{n,p}^{(2)}(f,x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f,x) = \frac{1}{p_1} \sum_{k=n-p_1}^{n-1} \frac{1}{p_2} \sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f,x). \tag{3}$$

Никольский С.М. [5] показал, что для верхних граней уклонений частных сумм Фурье, взятых по классам $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$, имеет место асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; S_n\right) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{f \in C^{\alpha}_{\beta,\infty}} ||f(\cdot) - S_n(f;\cdot)||_C = \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n}, \;\; q = e^{-\alpha},$$

где

$$K(q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— полный эллиптический интеграл первого рода. Стечкиным С.Б. [6] этот результат был передоказан другим методом, который позволил уточнить остаточный член в этой формуле:

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; S_n\right) = \frac{8q^n}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}} + O(1)\frac{q^n}{n(1-q^2)}, \;\; q = e^{-\alpha}.$$

В работе [7] (см. также [8]) для верхних граней отклонений сумм Валле Пуссена на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ получено асимптотическое равенство

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; V_{n,p}\right) = \frac{4q^{n-p+1}}{\pi p(1-q^2)} + O(1)\left(\frac{q^{n-p+1}}{p(n-p)(1-q)^3} + \frac{q^n}{p(1-q^2)}\right), 1 < p < n.$$

В данной работе исследуется асимптотическое поведение при $n\to\infty$ величины

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,p}\right)=\sup_{f\in C^{\alpha}_{\beta,\infty}}||f(x)-V^{(2)}_{n,p}(f,x)||_C.$$

Нами доказано следующее утверждение

Теорема. *Пусть* $\alpha>0, q=e^{-\alpha}, \beta\in R, p_i\in\mathbb{N}, i=1;2$. *Тогда при* $n-p_1-p_2\to\infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty};V^{(2)}_{n,p}\right)=\frac{8q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1p_2(1+q)^3}\Pi\left(\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right)+$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2(n-p_1-p_2+1)(1-q)^4}+\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2(1-q)^3}+\frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2(1-q)^3}\right), \qquad (4)$$

где

$$\Pi\left(n;k\right)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(1-n\sin^2 u\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

– полный эллиптический интеграл третьего рода, $O(1)$ *– величина, равномерно ограниченная по* n, β, q.

Доказательство. В силу соотношения (3) имеем

$$\delta^{(2)}_{n,p}(f,x)\stackrel{\mathrm{df}}{=}f(x)-V^{(2)}_{n,p}(f,x)=\frac{1}{p_1p_2}\left(p_1p_2f(x)-\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}S_m(f,x)\right)=$$

$$=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}(f(x)-S_m(f,x))=\frac{1}{p_1p_2}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\sum_{m=k-p_2+1}^{k}\rho_m(f,x), \qquad (5)$$

где

$$\rho_m(f,x)=f(x)-S_m(f,x).$$

Введем обозначение

$$b^{q,\beta}_m(t)=\frac{1-3q\cos t+3q^2\cos 2t-q^3\cos 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}\cos(mt+\frac{\beta\pi}{2})+$$

$$+\frac{-3q\sin t+3q^2\sin 2t-q^3\sin 3t}{(1-2q\cos t+q^2)^3}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}).$$

Применяя рассуждения работы [2,с.123], на основании соотношения (5) находим

$$\delta^{(2)}_{n,p}(f,x)=\frac{1}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^{\alpha}_{\beta}(x+t)\left(q^{n-p_1-p_2+1}b^{q,\beta}_{n-p_1-p_2+1}(t)-\right.$$

$$-q^{n-p_1+1}b^{q,\beta}_{n-p_1+1}(t)-q^{n-p_2+1}b^{q,\beta}_{n-p_2+1}(t)+q^{n+1}b^{q,\beta}_{n+1}(t)\Big)\,dt. \qquad (6)$$

Изучим функцию $b_n^{q,\beta}(t)$. Воспользуемся известной формулой

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\theta),$$

где

$$\sin\theta=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}};\qquad \cos\theta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тогда

$$b_m^{q,\beta}(t)=\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{(1-2q\cos t+q^2)^3}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t)),$$

где

$$A=1-3q\cos t+3q^2\cos 2t-q^3\cos 3t;\qquad B=-3q\sin t+3q^2\sin 2t-q^3\sin 3t,$$

$$\Phi(t)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-3q\cos t+3q^2\cos 2t-q^3\cos 3t}{-3q\sin t+3q^2\sin 2t-q^3\sin 3t}\right)+\pi, & t\in(0;\pi),\\ \frac{\pi}{2}, & t=0,\\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1-3q\cos t+3q^2\cos 2t-q^3\cos 3t}{-3q\sin t+3q^2\sin 2t-q^3\sin 3t}\right), & t\in(-\pi;0).\end{cases}$$

Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$A^2+B^2=(1-2q\cos t+q^2)^3.$$

Поэтому,

$$b_m^{q,\beta}(t)=\frac{\sqrt{(1-2q\cos t+q^2)^3}}{(1-2q\cos t+q^2)^3}\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t))=\frac{\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t))}{(1-2q\cos t+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Изучим характер расположения нулей функции $\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t))$. Для этого изучим свойства функции $\Phi(t)$.

Легко видеть, что функция $\Phi(t)$ непрерывна на промежутке $(0;\pi)$ и выполнено условие

$$0\le\Phi(t)\le\frac{3\pi}{2}.$$

Выполняя элементарные преобразования, получаем, что для всякого $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$

$$\left|\Phi'(t)\right|\le\lim_{t\to 0}\left|\Phi'(t)\right|=\frac{3q}{1-q}.$$

Поскольку $1-2q\cos t+q^2>0$, то функция $b_m^{q,\beta}(t)$ обращается в нуль на промежутке $(0;\pi)$ с изменением знака в точках t_k, удовлетворяющих условию

$$mt_k+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t_k)=k\pi, k=1,2,\ldots,m-1.$$

Следовательно,

$$t_{k+1}-t_k=\frac{\pi}{m}-\frac{\Phi(t_{k+1})-\Phi(t_k)}{m};t_{k+2}-t_{k+1}=\frac{\pi}{m}-\frac{\Phi(t_{k+2})-\Phi(t_{k+1})}{m}.$$

Таким образом,

$$|(t_{k+2}-t_{k+1})-(t_{k+1}-t_k)|\leq\frac{|\Phi(t_{k+2})-\Phi(t_{k+1})|+|\Phi(t_{k+1})-\Phi(t_k)|}{m}.$$

Так как $|\Phi'(t)|\leq\frac{3q}{1-q}$, то

$$|\Phi(t_{k+1})-\Phi(t_k)|\leq\frac{3q}{1-q}(t_{k+1}-t_k).$$

Поскольку $0\leq\Phi(t)\leq\frac{3\pi}{2}$, то, учитывая, что $t_k=\frac{k\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2}-\frac{\Phi(t_k)}{m}$, получаем

$$\frac{k\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2m}-\frac{3\pi}{2m}\leq\frac{k\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2m}-\frac{\Phi(t_k)}{m}=t_k\leq\frac{k\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2m}, \tag{7}$$

$$\frac{(k+1)\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2m}-\frac{3\pi}{2m}\leq\frac{(k+1)\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2m}-\frac{\Phi(t_{k+1})}{m}=t_{k+1}\leq\frac{(k+1)\pi}{m}-\frac{\beta\pi}{2m}. \tag{8}$$

Следовательно, $t_{k+1}-t_k\leq\frac{5\pi}{2m}$. Поэтому разность длин промежутков $[t_k;t_{k+1}]$, $[t_{k+1};t_{k+2}]$ не превосходит величину

$$\frac{|\Phi(t_{k+2})-\Phi(t_{k+1})|+|\Phi(t_{k+1})-\Phi(t_k)|}{m}\leq\frac{6q}{m(1-q)}\frac{5\pi}{2m}=\frac{15q\pi}{m^2(1-q)}.$$

Функция $b_m^{q,\beta}(t)$ на промежутках $[t_k;t_{k+1}]$, $[t_{k+1};t_{k+2}]$ сохраняет знаки, причем, справа и слева от t_{k+1} эти знаки различные.

Таким образом, функцию $\mathrm{sign} b_m^{q,\beta}(t)$ в промежутке $[t_k;t_{k+2}]$ можно изменить на множестве, мера которого $\leq\frac{15q\pi}{(1-q)m^2}$, так, что полученная функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$ будет обладать свойством:

$$\int\limits_{t_k}^{t_{k+2}}b_{m,1}^{q,\beta}(t)dt=0.$$

В силу соотношений (7) и (8), для достаточно больших m справедливо неравенство $t_{k+1}-t_k\geq\frac{\pi}{m}-\frac{1}{m}|\Phi(t_{k+1})-\Phi(t_k)|\geq\frac{\pi}{m}-\frac{15q\pi}{2m^2(1-q)}\geq\frac{\pi}{2m}$. Поэтому количество промежутков, на которых функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$, $t\in(0;\pi)$, изменяет знак $\leq 2m$.

Понятно, что рассуждения, приведенные для промежутка $(0;\pi)$, по аналогии можно провести и для промежутка $(-\pi;0)$. Следовательно, функция $b_{m,1}^{q,\beta}(t)$, построенная на $(-\pi;0)\cup(0;\pi)$, обладает свойством

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}b_{m,1}^{q,\beta}(t)dt=0$$

и отличается от $\mathrm{sign} b_m^{q,\beta}(t)$ на множестве, мера которого не превосходит $\frac{60q\pi}{m(1-q)}$.

Таким образом,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|b_m^{q,\beta}(t)\right|dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}b_m^{q,\beta}(t)\mathrm{sign}\left(b_m^{q,\beta}(t)\right)dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}b_m^{q,\beta}(t)[b_{m,1}^{q,\beta}(t)+O(1)\frac{q}{m(1-q)}]dt.$$

Учитывая, что

$$|b_m^{q,\beta}(t)|=\frac{|\sin(mt+\frac{\beta\pi}{2}+\Phi(t))|}{(1-2q\cos t+q^2)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{1}{(1-q)^3},$$

находим

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left|b_m^{q,\beta}(t)\right|dt=\int\limits_{-\pi}^{\pi}b_m^{q,\beta}(t)b_{m,1}^{q,\beta}(t)+O(1)\frac{q}{m(1-q)^4}dt.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in C^\alpha_{\beta,\infty}}\left(\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\alpha(x+t)b_{n-p_1+1}^{q,\beta}(t)dt+\frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\alpha(x+t)b_{n-p_2+1}^{q,\beta}(t)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{q^{n+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\alpha(x+t)b_{n+1}^{q,\beta}(t)dt\right)=$$

$$=O(1)\left(\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p_1+1}^{q,\beta}(t)|dt+\frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p_2+1}^{q,\beta}(t)|dt+\frac{q^{n+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n+1}^{q,\beta}(t)|dt\right).$$

Поэтому, принимая во внимание, что $b_{n,1}^{q,\beta}(t)\in S_M^0$, заключаем

$$\sup_{f\in C^\alpha_{\beta,\infty}}\left(q^{n-p_1-p_2+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f_\beta^\alpha(x+t)b_{n-p_1-p_2+1}^{q,\beta}(t)dt\right)=$$

$$=q^{n-p_1-p_2+1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p_1-p_2+1}^{q,\beta}(t)|dt+O(1)\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{(n-p_1-p_2+1)(1-q)^4}.$$

Таким образом, при $p_1\in N, p_2\in N, p_1+p_2<n$, на основании соотношения (6) получаем

$$\mathcal{E}\left(C^\alpha_{\beta,\infty};V_{n,p}^{(2)}\right)=\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p_1-p_2+1}^{q,\beta}(t)|dt+O(1)\left(\frac{(1-q)^{-4}q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2(n-p_1-p_2+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p_1+1}^{q,\beta}(t)|dt+\frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n-p_2+1}^{q,\beta}(t)|dt+\frac{q^{n+1}}{p_1p_2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|b_{n+1}^{q,\beta}(t)|dt\right).\qquad(9)$$

Вычислим интеграл $J_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |b_m^{q,\beta}(t)|dt, m \in N$. Следуя [2], обозначим $\Gamma(t) = \left(1 - 2q\cos t + q^2\right)^{-1}$. Тогда имеем

$$J_m = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|b_m^{q,\beta}(t)\right| dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{2\pi}{m}\left|\cos(t + \frac{\beta\pi}{2}) - 3q\cos\left(t - \left(\frac{t+2k\pi}{m}\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 3q^2\cos\left(t - 2\left(\frac{t+2k\pi}{m}\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) - q^3\cos\left(t - 3\left(\frac{t+2k\pi}{m}\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\Gamma^3\left(\frac{t+2k\pi}{m}\right) dt. \tag{10}$$

При фиксированных t, β, q, m положим

$$F(x) = \left|\cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right) - 3q\cos\left(t - \left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 3q^2\cos\left(t - 2\left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) - 3q^3\cos\left(t - 3\left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\Gamma^3\left(\frac{t}{m} + x\right).$$

Легко заметить, что под знаком интеграла в соотношении (10) стоит интегральная сумма, составленная для функции $F(x)$ и отвечающая разбиению $x_k = \frac{2k\pi}{m}, \Delta x_k = \frac{2\pi}{m}, k = 0, 1, ..., m-1$, отрезка $[0; 2\pi]$, и

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} F(x)dx - \sum_{k=0}^{m-1} F(x_k)\frac{2\pi}{m}\right| \le \sum_{k=0}^{m-1}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |F(x) - F(x_k)|dx \le 2\pi\omega\left(F; \frac{2\pi}{m}\right),$$

где $\omega(F;t)$ - модуль непрерывности функции $F(x)$. Производная $F'(x)$ существует и ограничена всюду, за исключением точек, где $F(x) = 0$. Поэтому при каждом фиксированном q существует постоянная K, которая не зависит от t, β, m такая, что почти всюду на $[0; 2\pi]$ выполнено $|F'(t)| < K$. Поэтому при каждом фиксированном q

$$\left|\int\limits_0^{2\pi} F(x)dx - \sum_{k=0}^{m-1} F(x_k)\frac{2\pi}{m}\right| < (2\pi)^2\frac{K}{m}.$$

Таким образом,

$$J_m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|-3q^3\cos\left(t - 3\left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) - 3q\cos\left(t - \left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 3q^2\cos\left(t - 2\left(\frac{t}{m} + x\right) + \frac{\beta\pi}{2}\right) + \cos\left(t + \frac{\beta\pi}{2}\right)\right|\Gamma^3\left(\frac{t}{m} + x\right) dxdt + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Поэтому, переходя к новым переменным, получаем

$$J_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Gamma^3(x)\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos t - 3q\cos(t-x) + 3q^2\cos(t-2x) - q^3\cos(t-3x)\right| dtdx + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Поскольку, при фиксированном $x \in (0;\pi)$

$$\cos t - 3q\cos(t-x) + 3q^2\cos(t-2x) - q^3\cos(t-3x) =$$

$$= \Gamma^{-\frac{3}{2}}(x)\sin\left(t + \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - 3q\cos x + 3q^2\cos 2x - q^3\cos 3x}{-3q\sin x + 3q^2\sin 2x - q^3\sin 3x}\right) + \pi\right),$$

то функция $\cos t - 3q\cos(t-x) + 3q^2\cos(t-2x) - q^3\cos(t-3x)$, как функция переменной t, при фиксированном $x \in (0;\pi)$ обращается в нуль с переменой знака только в точках вида $t_0 + k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, где

$$t_0 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1 - 3q\cos x + 3q^2\cos 2x - q^3\cos 3x}{-3q\sin x + 3q^2\sin 2x - q^3\sin 3x}\right).$$

Поэтому, принимая во внимание, что

$$\sin t_0 = -\left(1 - 3q\cos x + 3q^2\cos 2x - q^3\cos 3x\right)\Gamma^{\frac{3}{2}}(x),$$

$$\cos t_0 = \left(-3q\sin x + 3q^2\sin 2x - q^3\sin 3x\right)\Gamma^{\frac{3}{2}}(x),$$

$\forall x \in (0;\pi)$ находим

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\cos t - 3q\cos(t-x) + 3q^2\cos(t-2x) - q^3\cos(t-3x)\right| dt = 4\Gamma^{-\frac{3}{2}}(x).$$

Следовательно,

$$J_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}[4\Gamma^{-\frac{3}{2}}(x)]\Gamma^3(x)dx + O\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\Gamma^{\frac{3}{2}}(x)dx + O\left(\frac{1}{m}\right).$$

Имея в виду соотношение (9), получаем

$$\mathcal{E}\left(C^{\alpha}_{\beta,\infty}; V^{(2)}_{n,p}\right) = \frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1 p_2} J_{n-p_1-p_2+1} +$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{(n-p_1-p_2+1)(1-q)^4} + \frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2}J_{n-p_1+1} + \frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2}J_{n-p_2+1} + \frac{q^{n+1}}{p_1p_2}J_{n+1}\right).$$

$$= \frac{4q^{n-p_1-p_2+1}}{\pi p_1 p_2}\int\limits_0^{\pi}\Gamma^{\frac{3}{2}}(x)dx +$$

$$+O(1)\left(\frac{q^{n-p_1-p_2+1}}{p_1p_2(n-p_1-p_2+1)(1-q)^4}+\frac{q^{n-p_1+1}}{p_1p_2(1-q)^3}+\frac{q^{n-p_2+1}}{p_1p_2(1-q)^3}\right). \qquad (11)$$

Выполняя элементарные преобразования, находим

$$\int_0^{\pi}\Gamma^{\frac{3}{2}}(x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(\sqrt{(1+q)^2-4q\cos^2 u)}\right)^3}=$$

$$=\frac{2}{(1+q)^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\left(1-\frac{4q}{(1+q)^2}\sin^2 u\right)\sqrt{1-\frac{4q}{(1+q)^2}\sin^2 u}}=\frac{2}{(1+q)^3}\Pi\left(\frac{\pi}{2};\frac{4q}{(1+q)^2};\frac{2\sqrt{q}}{1+q}\right),$$

где

$$\Pi\left(x;n;k\right)=\int_0^{x}\frac{du}{\left(1-n\sin^2 u\right)\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

– эллиптический интеграл третьего рода.

Поэтому на основании соотношения (11), получаем асимптотическую формулу (4). Теорема доказана. □

Заметим, что в случае, когда $\lim_{n\to\infty}p_i=\infty, i=1;2,$ полученное равенство (4) обеспечивает решение задачи Колмогорова–Никольского на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ для повторных сумм Валле Пуссена.

1. *Степанец А.И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50,** № 2. – С. 101-136.
2. *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. Думка, 1987. – 268 с.
3. *Ch la Vallee Pussin.* Sur la meilleure approximation des fonction d'une variable reelle par des expession d'ordre donne // Comptes rendus Acad. Sci. Paris. – 1918. – **166.** – P. 799-802.
4. *Рукасов В.И., Новиков О.А., Ровенская О.Г.* Интегральные представления уклонений средних сумм Фурье на классах $C^{\alpha}_{\beta,\infty}$ // Вісник Слов'янського державного педагогічного університету. Математика. – 2008. – Т. 1(3). – С. 33-41.
5. *Никольский С.М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. сер.мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207-256.
6. *Стечкин С.Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – **145.** – С. 126-151.
7. *Рукасов В.И.* Дослідження екстремальних задач теорії наближення функцій: дис. ... доктора фіз–мат. наук: 01.01.01 – К: Ін-т математики НАН України, 2003. – 345 с.
8. *Степанец А.И., Рукасов В.И., Чайченко С.О.* Приближения суммами Валле Пуссена // Праці Ін-ту математики НАН України. – 2007. – Т. 68. – 368 с.

V.E. Velichko, O.A. Novikov, O.G. Rovenskaja, $\boxed{\textbf{V.I. Rukasov}}$
Approximation of analytic functions repeated by Vallee Poussin sums.

We obtain asymptotic equalities for upper bounds for deviations trigonometric polynomials generated by the re- Vallee-Poussin summation taken over the class of analytic periodic functions of real variable.

Keywords: *Fourier series, linear approximation methods.*

В.Є. Величко, О.О. Новіков, О.Г. Ровенська, $\boxed{\textbf{В.І. Рукасов}}$
Наближення аналітичних функцій повторними сумами Валле Пуссена.

Отримано асимптотичні рівності для верхніх граней ухилень тригонометричних поліномів, що породжені повторним методом підсумовування Валле Пуссена, взятих за класами аналітичних періодичних функцій дійсної змінної.

Ключові слова: *ряд Фур'є, лінійні методи наближення.*

Славянский государственный педагогический ун-т
sgpi@slav.dn.ua

Получено 27.04.09