УДК 517.9

©2010. **Н.В. Краснощек**

ОБ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ДИНАМИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦЕ

Рассматривается смешанная граничная задача для стационарной системы теории упругости в двусвязной области с дополнительным динамическим условием на части границы. Неизвестными являются смещения u и некоторая дополнительная функция ρ. Методом построения регуляризатора доказано существование гладкого решения в пространствах Гельдера.

Ключевые слова: *упругость, задача Коши, регуляризатор, оценки Шаудера.*

1. Введение. Пусть Ω область типа кольца с внешней границей Σ и внутренней - Γ. Предполагаем, что кривые Σ и Γ принадлежат классу $C^{6+\alpha}$. Пусть b и q - положительные постоянные, $n=(n_1,n_2)$, $s=(s_1,s_2)$- соответственно нормаль и касательная к кривой Γ, а Δ_Γ- оператор Лапласа-Бельтрами на Γ. Введем некоторые обозначения линейной теории упругости (в рамках плоской деформации)

$$\sigma_{ij}(u)=\tfrac{E}{1+\nu}\left(\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\tfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\tfrac{\nu}{1-2\nu}\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\tfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\delta_{ij}\right),$$
$$\mathbb{T}\mathrm{r}\,\sigma(u)=\sigma_{11}(u)+\sigma_{22}(u)+\sigma_{33}(u)=\tfrac{E}{1-2\nu}\left(\tfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\tfrac{\partial u_2}{\partial x_2}\right).$$

Кроме того, введем следующие операторы

$$\mathbb{L}_i u=\tfrac{1}{1-2\nu}\tfrac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\,u+\Delta u_i,\ \mathbb{Q}\left(x,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u=-q\sum_{i=1}^{2}n_i(x)\Delta_\Gamma\left(\partial_{x_i}\mathbb{T}\mathrm{r}\,\sigma(u)\right),$$
$$\mathbb{B}_1\left(x,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u=s_i(x)\sigma_{ij}(u)\ n_j(x),\ \mathbb{B}_2\left(x,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u=n_i(x)\sigma_{ij}(u)\ n_j(x).$$

Здесь и ниже по всем повторяющимся индексам (кроме k) производится суммирование от 1 до 2.

Задача состоит в том, чтобы найти функции $u(x,t)=(u_1(x,t),\,u_2(x,t))$ и $\rho(x,t)$, удовлетворяющие системе

$$\mathbb{L}_i u=0,\ x\in\Omega,\ t>0,\ i=1,2, \tag{1}$$

граничным условиям

$$\begin{gathered} u=0\ \ x\in\Sigma,\ t>0,\\ \mathbb{B}_1\left(x,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u=0,\ \mathbb{B}_2\left(x,\tfrac{\partial}{\partial x}\right)u=b\Delta_\Gamma\rho,\ x\in\Gamma,\ t>0, \end{gathered} \tag{2}$$

динамическому условию

$$\rho_t=\mathbb{Q}\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u+h(x,t),\ x\in\Gamma,\ t>0, \tag{3}$$

и нулевому начальному условию

$$\rho|_{t=0} = 0 \ x \in \Gamma. \tag{4}$$

Задачу данного вида можно получить из постановки задачи, предложенной в работе [1], которая моделирует распространение полости в упругом теле. Для этого сначала нужно свести задачу со свободной границей к задаче в фиксированной области, а затем линеаризовать полученную нелинейную задачу на начальных данных (по этому поводу см., например, работу [2]), тогда вектор-функцию u можно интерпретировать как смещения, а - ρ как отклонение свободной границы от ее начального положения в направлении нормали. Заметим, что начальные данные для u не задаются, а находятся из решения задачи (1)-(4) при $\rho|_{t=0} = 0$. Отсюда, в силу известных результатов (см., например, [3]), $u(x,0) = 0$. Для классической разрешимости исходной задачи естественно потребовать выполнение условия согласования: $h(x,0) = 0$ при $x \in \Gamma$.

Задачу (1)-(4) можно записать в виде задачи Коши для функции ρ на кривой Γ

$$\mathcal{A}\rho \equiv \rho_t - \mathcal{Q}\rho = h(x,t), \quad x \in \Gamma, \ t > 0, \quad \rho|_{t=0} = 0, \ x \in \Gamma, \tag{5}$$

где и $\mathcal{A}$, $\mathcal{Q}$ -линейные, нелокальные операторы. В данной работе доказана классическая разрешимость задачи (1)-(4) методом построения регуляризатора (см. [4], гл. IV) для оператора $\mathcal{A}$. При помощи данного подхода доказательство существования решения начально-краевой задачи для эллиптического уравнения с динамическим условием на границе области проводилось в работе [5] в весовых классах Гельдера и в работе [6] в пространствах Бесова-Никольского. По поводу других подходов см. работы [2], [7]-[10].

План работы состоит в следующем. В первом разделе введены необходимые обозначения, пространства, сформулированы некоторые вспомогательные утверждения и основной результат. Во втором разделе рассмотрена модельная задача в полупространстве, в третьем доказана основная теорема.

2. Предварительные сведения. Основной результат. Пусть Q некоторое множество на плоскости. Следуя [4], введем следующие обозначения (m - целое неотрицательное число, $0 < \alpha < 1$):

$$|v|_Q^{(0)} = \sup_{x \in Q} |v(x)|, \quad |v|_Q^{(m)} = \sum_{0 \le |j| \le m} \left| D^j v \right|_Q^{(0)},$$
$$\langle v \rangle_{x,Q}^{(\alpha)} = \sup_{x,y \in Q;\, x \neq y} \tfrac{|v(x)-v(y)|}{|x-y|^\alpha}, \ \langle v \rangle_{x,Q}^{(m+\alpha)} = \sum_{|j|=m} \left\langle D^j v \right\rangle_{x,Q}^{(\alpha)}.$$

Кроме того, введем следующие полунормы:

$$\langle v \rangle_{x,Q\times[0,T]}^{(\alpha)} = \sup_{t \in [0,T]} \sup_{x,y \in Q;\, x \neq y} \frac{|v(x,t) - v(y,t)|}{|x-y|^\alpha},$$

$$\langle v \rangle_{t,Q\times[0,T]}^{(\beta)} = \sup_{t,s \in [0,T];\, t \neq s} \sup_{x \in Q} \frac{|v(x,t) - v(x,s)|}{|t-s|^{(\beta)}}, \ 0 < \beta < 1,$$

$$\langle v\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}=\langle v\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}+\langle v\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]},\ \langle v\rangle^{\left(\frac{5+\alpha}{5}\right)}_{t,Q\times[0,T]}=\sum_{0<5+\alpha-|l|<5}\langle D^l_x v\rangle^{\left(\frac{5+\alpha-|l|}{5}\right)}_{t,Q\times[0,T]}$$

$$[v]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}=\sup_{t,s\in[0,T];\,t\neq s}\frac{\langle v(\cdot,t)-v(\cdot,s)\rangle^{(\alpha)}_{x,Q}}{|t-s|^{\frac{\alpha}{5}}}=\sup_{t,s\in[0,T];\,t\neq s}\ \sup_{x,y\in Q;\,x\neq y}\frac{|v(x,t)-v(y,t)-v(x,s)+v(y,s)|}{|t-s|^{\frac{\alpha}{5}}|x-y|^{\alpha}},$$

$$\langle v\rangle^{\left(\frac{5+\alpha}{5}\right)}_{t,Q\times[0,T]}=\sum_{0<5+\alpha-|l|<5}\langle D^l_x v\rangle^{\left(\frac{5+\alpha-|l|}{5}\right)}_{t,Q\times[0,T]}.$$

Всюду ниже будем использовать очевидные неравенства:

$$\begin{gathered}\langle uv\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}\le\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}|v|^{(0)}_{Q\times[0,T]}+|u|^{(0)}_{Q\times[0,T]}\langle v\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}\\ \langle uv\rangle^{(\beta)}_{t,Q\times[0,T]}\le\langle u\rangle^{(\beta)}_{t,Q\times[0,T]}|v|^{(0)}_{Q\times[0,T]}+|u|^{(0)}_{Q\times[0,T]}\langle v\rangle^{(\beta)}_{t,Q\times[0,T]},\\ [uv]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}\le[u]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}|v|^{(0)}_{Q\times[0,T]}+\langle u\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]}\langle v\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}+\\ +\langle u\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}\langle v\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]}+|u|^{(0)}_{Q\times[0,T]}[uv]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}.\end{gathered}\tag{6}$$

Далее введем функциональные пространства $C^{m+\alpha}(Q)$ и $C^{\frac{\alpha}{5}}([0,T];C^{m+\alpha}(Q))$ с нормами:

$$|v|^{(m+\alpha)}_Q\equiv|v|^{(m)}_Q+\langle v\rangle^{(m+\alpha)}_{x,Q}$$

и

$$|v|^{(m+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}\equiv\sup_{t\in[0,T]}|v(\cdot,t)|^{(m+\alpha)}_Q+\sup_{t,s\in[0,T];\,t\neq s}\frac{|v(\cdot,t)-v(\cdot,s)|^{(m+\alpha)}_Q}{|t-s|^{\frac{\alpha}{5}}}.$$

Старшая полунорма в $C^{\frac{\alpha}{5}}([0,T];C^{\alpha}(Q))$ имеет вид

$$\langle\langle v\rangle\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}=\langle v\rangle^{(\alpha)}_{x,Q\times[0,T]}+\langle v\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]}+[v]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]},$$

а в $C^{\frac{\alpha}{5}}([0,T];C^{m+\alpha}(Q))$ соответственно -

$$\langle\langle v\rangle\rangle^{(m+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}=\sum_{|j|=m}\left(\langle D^j_x v\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}+\left[D^j_x v\right]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}\right),$$

Пространства вида $C^{\frac{\alpha}{5}}([0,T];C^{m+\alpha}(Q))$ будут полезны при определении гладкости функции u. Для функции ρ понадобятся пространства $P^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5}}(Q\times[0,T])$ с конечной нормой

$$|v|^{(5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}\equiv|v|^{(5+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}+|v_t|^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}+\sum_{1\le|l|\le5}\langle D^l_x v\rangle^{\left(\frac{5+\alpha-|l|}{5}\right)}_{t,Q\times[0,T]}$$

и старшей полунормой

$$\langle\langle v\rangle\rangle^{(5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}=\langle\langle v\rangle\rangle^{(5+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}+\langle\langle v_t\rangle\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]}+\sum_{1\le|l|\le5}\langle D^l_x v\rangle^{\left(\frac{5+\alpha-|l|}{5}\right)}_{t,Q\times[0,T]}.$$

Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in (0,1)$, S, $\Gamma \in C^{6+\alpha}$, $h(x,0) = 0$ и τ достаточно мало, тогда для любого $h \in C^{\frac{\alpha}{5}}([0,\tau];C^{\alpha}(\Gamma))$ существует $\rho \in P^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5}}(Q\times[0,T])$ единственное решение задачи (5), которое удовлетворяет оценке*

$$|\rho|^{\left(5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5}\right)}_{\Gamma\times[0,\tau]} \le C\,|\rho|^{\left(\alpha,\frac{\alpha}{5}\right)}_{\Gamma\times[0,\tau]}. \tag{7}$$

Метод построения регуляризатора, предложенный В.А.Солонниковым в (см. Главу IV монографии [4]), в нашем случае нуждается в некоторой модификации. Проблема в том, что в отличие от начально-краевой задачи для параболического уравнения, например, второго порядка, где производные первого порядка по пространственным переменным принадлежат классу Гёльдера по переменной t с показателем, большим, чем правая часть уравнения (и, соответственно, производные второго порядка); в задаче (1)–(4) относительно неизвестной функции u переменная t выступает как параметр, поэтому, вообще говоря, и сама функция, и все ее производные обладают одинаковой гладкостью по времени: той, что задаётся "правой частью" $b(x,t)\Delta_\Gamma\rho$. Поэтому, так же как в работе [5], нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1.*А) Пусть $v \in C^{\frac{\alpha}{5}}([0,T];C^{m+\alpha}(Q))\bigcap C^{\frac{4+\alpha}{5}}([0,T];C(Q))$, тогда $v \in C^{\frac{\alpha}{5}+\frac{4(4-m+\alpha)}{5(4+\alpha)}}([0,T];C^m(Q))$ при $m=1,..,4$ и, кроме того,*

$$|v|^{(m+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]} \le C\;T^{\frac{4(4-m)}{5(4+\alpha)}}\;|v|^{(4+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]},\; m=1,..3.$$

Б) Пусть $v \in P^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5}}(Q\times[0,T])$, тогда $v \in C^{\frac{\alpha}{5}+\frac{(5-\alpha)(5-m+\alpha)}{25}}([0,T];C^m(Q))$ и

$$|v|^{(m+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{Q\times[0,T]} \le C\;T^{\frac{(5-\alpha)(5-m)}{5(5+\alpha)}}\;|v|^{(5+\alpha,\frac{(5+\alpha)}{5})}_{Q\times[0,T]},\; m=1,..4.$$

Утверждения леммы непосредственно вытекают из следующих неравенств

$$|v|^{(m)}_Q \le C\left(|v|^{(s+\alpha)}_Q\right)^{\frac{m}{s+\alpha}}\left(|v|^{(0)}_Q\right)^{\frac{s+\alpha-m}{s+\alpha}},\; m\le s,$$
$$|v|^{(m+\alpha)}_Q \le C\left(|v|^{(s+\alpha)}_Q\right)^{\frac{m}{s}}\left(|v|^{(\alpha)}_Q\right)^{\frac{s-m}{s}},\; m< s,$$

являющихся частным случаем интерполяционных неравенств Главы 3 монографии [11] (см. также [12]).

3. Модельная задача. Обозначим $D=\{x\in R^2: x_2>0\}$, $S=\{x\in R^2: x_2=0\}$. Рассмотрим задачу найти функции w, p такие, что

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla\mathrm{div}\,w + \Delta w = 0,\; x\in D,\; t>0, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} w\to 0,\ \text{при } x_2\to\infty,\\ \sigma_{12}(w)=0,\ \sigma_{22}(w)=b\,\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2},\ x\in S,\ t>0, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} p_t = q\frac{\partial^3 \operatorname{\mathbb{T}r}\sigma(w)}{\partial x_1^2 \partial x_2} + \psi(x,t),\ x \in S,\ t > 0, \\ \rho|_{t=0} = 0,\ x \in S. \end{gathered} \quad . \tag{10}$$

Всюду ниже полагаем, что $\psi(x_1, t) = 0$ для всех $x_1 \in R^1$ при $t \leq 0$. Обозначим через $\widetilde{w}$, $\widetilde{p}$, $\widetilde{\psi}$ образы Фурье функций w, p и ψ при преобразовании Фурье по переменной x_1. Система (8) для w и граничные условия (9) перейдут в соотношения

$$\begin{gathered} \tfrac{i\xi}{1-2\nu}(i\xi\widetilde{w}_1 + \tfrac{d\widetilde{w}_2}{dx_2}) + \tfrac{d^2\widetilde{w}_1}{dx_2^2} - \xi^2\widetilde{w}_1 = 0, \\ \tfrac{1}{1-2\nu}\tfrac{d}{dx_2}(i\xi\widetilde{w}_1 + \tfrac{d\widetilde{w}_2}{dx_2}) + \tfrac{d^2\widetilde{w}_2}{dx_2^2} - \xi^2\widetilde{w}_2 = 0, \\ \widetilde{w} \to 0,\ \text{при}\ x_2 \to \infty, \\ \tfrac{iE\xi}{2(1+\nu)}\left[i\xi\widetilde{w}_2 + \tfrac{d\widetilde{w}_1}{dx_2}\right] = 0, \quad \tfrac{E}{(1+\nu)}\left[\tfrac{d\widetilde{w}_2}{dx_2} + \tfrac{\nu}{1-2\nu}(i\xi\widetilde{w}_1 + \tfrac{d\widetilde{w}_2}{dx_2})\right] = -b\,\xi^2\widetilde{p}, \quad x_2 = 0, \end{gathered} \tag{11}$$

Решение задачи (11) имеет вид

$$\begin{gathered} \widetilde{w}_1 = \tfrac{b(1+\nu)}{E}\,i\xi\left((1-2\nu) - |\xi|x_2\right)\widetilde{p}\,e^{-|\xi|x_2}, \\ \widetilde{w}_2 = \tfrac{b(1+\nu)}{E}\,|\xi|\left(2(1-\nu) + |\xi|x_2\right)\widetilde{p}\,e^{-|\xi|x_2}, \end{gathered} \tag{12}$$

кроме того,

$$i\xi\widetilde{w}_1 + \frac{d\widetilde{w}_2}{dx_2} = -\frac{2b}{E}(1+\nu)(1-2\nu)|\xi|^2\widetilde{p}\,e^{-|\xi|x_2}. \tag{13}$$

Теперь для $\widetilde{p}$ из (10), (13) получим

$$\widetilde{p}_t = -2\,bq\,|\xi|^5\widetilde{p} + \widetilde{\psi}(x,t),\ x \in \omega,\ t > 0, \quad \widetilde{p}(\xi, 0) = 0.$$

Т.о. функцию p можно записать в виде:

$$p(x_1,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x_1 - \xi_1, t - \tau)\psi(\xi_1,\tau)d\xi_1, \qquad \text{где } (a = 2bq)$$

$$G(x_1,t) = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-a|\xi|^5 t + i\xi x_1\right)d\xi \ \text{при}\ t > 0; \qquad G(x_1,t) = 0 \ \text{при}\ t < 0.$$

Сделаем в представлении для функции G замену $\lambda = \xi t^{1/5}$, приходим к выражению

$$G(x_1,t) = t^{-\frac{1}{5}}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty} \exp\left(-a\lambda^5\right)\cos(y)d\lambda,\ \text{где}\ y = x_1/t^{1/5}.$$

Используя метод интегрирования по частям (ср. [2]), можно доказать следующую лемму.

Лемма 2. *Имеют место оценки*

$$\left|D_t^k D_{x_1}^l G(x_1,t)\right| \leq C\,t^{-\frac{5k+l+1}{5}}\frac{1}{1 + (|x|^5/t)^{\frac{5(k+j)+l+1}{5}}}, \tag{14}$$

где $j = 0$ при нечётных значениях k и $j = 1$ при чётных k и $k = 0$.

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$\left\langle D_{x_1}^5 p \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} \leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)}, \tag{15}$$

$$\left\langle D_{x_1}^l p \right\rangle_{t,R^1\times[0,T]}^{\left(\frac{5+\alpha-l}{5}\right)} \leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)}, \tag{16}$$

$$\left\langle p_t \right\rangle_{R^1\times[0,T]}^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})} \leq C\left\langle \psi \right\rangle_{t,R^1\times[0,T]}^{(\frac{\alpha}{5})}, \tag{17}$$

$$\left[D_{x_1}^5 p \right]_{R^1\times[0,T]}^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})} \leq C\left[\psi \right]_{R^1\times[0,T]}^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}. \tag{18}$$

Доказательство. Прежде всего следует отметить, что используемые здесь методы изложены в монографии [4]. Ввиду ограниченности объёма статьи оценим только величину $\left\langle D_{x_1}^l p \right\rangle_{t,R^1\times[0,T]}^{\left(\frac{5+\alpha-l}{5}\right)}$.

Для получения оценки (16) рассмотрим выражение $(0 < h < t,\ l = 1,..,5)$

$$D_{x_1}^l p(x_1,t) - D_{x_1}^l p(x_1,t-h) = \int\limits_{t-2h}^{t} ds \int\limits_{R^1} D_{x_1}^l G(x_1-y,t-s)(\psi(y,s)-\psi(x_1,s))dy -$$

$$- \int\limits_{t-2h}^{t} ds \int\limits_{R^1} D_{x_1}^l G(x_1-y,t-h-s)(\psi(y,s)-\psi(x_1,s))dy + \tag{19}$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{t-2h} ds \int\limits_{R^1} (D_{x_1}^l G(x_1-y,t-s) - D_{x_1}^l G(x_1-y,t--s))(\psi(y,s)-\psi(x_1,s))dy = \sum_{i=1}^{3} I_i.$$

Слагаемые I_1 и I_2 оцениваются одинаковым образом. Например,

$$|I_1| \leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} \int\limits_{t-2h}^{t} ds \int\limits_{R^1} (t-s)^{-\frac{l+1}{5}} \frac{|x_1-y|^\alpha dy}{1+\left(\frac{|x_1-y|^5}{t-s}\right)^{\frac{l+6}{5}}} \leq$$

$$\leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} \int\limits_{t-2h}^{t} (t-s)^{\frac{\alpha-l}{5}} ds \leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} h^{\frac{5+\alpha-l}{5}}.$$

К последнему слагаемому применяем оценку (14)

$$|I_3| = |\int\limits_{-\infty}^{t-2h} ds \int\limits_{t-h}^{t} d\tau \int\limits_{R^1} D_t D_{x_1}^l G(x_1-y,\tau-s)(\psi(y,s)-\psi(z,s))dy| \leq$$

$$\leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{t-2h} ds \int\limits_{t-h}^{t} d\tau \int\limits_{R^1} \frac{|x_1-y|^\alpha}{(\tau-s)^{\frac{l+6}{5}}+|x_1-y|^{l+6}} d\tau \leq$$

$$\leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} \int\limits_{t-h}^{t} d\tau \int\limits_{-\infty}^{t-2h} (\tau-s)^{\frac{\alpha-l}{5}-1} ds \leq$$

$$\leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} \int\limits_{t-h}^{t} (\tau-(t-2h)^{\frac{\alpha-l}{5}}) d\tau \leq C\left\langle \psi \right\rangle_{x,R^1\times[0,T]}^{(\alpha)} h^{\frac{5+\alpha-l}{5}},$$

что влечет за собой оценку (16).

Ход рассуждений при доказательстве оценки (18), аналогично работе [2], состоит в том, чтобы, исходя из представления

$$D^5_{x_1}p(x_1,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ds\int\limits_{-\infty}^{+\infty}D^5_{x_1}G(x_1-y,s)(\psi(y,t-s)-\psi(x_1,t-s))dy,$$

оценить для разности $|D^5_{x_1}p(x_1,t)-D^5_{x_1}p(x_1,t-h)|/h^{\frac{\alpha}{5}}$ константу Гельдера по переменной x_1, что фактически сводится к оценке (15). □

Сформулируем без доказательства следующее утверждение:

Лемма 4. *Пусть* $\psi(x_1,t)=0$ *при* $|x_1|>M$, $t\geq 0$ *для некоторого* $M>0$, *тогда*

$$|D^l_{x_1}p(x_1,t)|\leq Ct^{\frac{5+\alpha-l}{5}}\left<\psi\right>^{(\alpha)}_{x,R^1\times[0,T]}\frac{1}{|x_1|^{5+l-\alpha}}\quad \text{при } |x_1|>2M\ (l=1,..,5). \tag{20}$$

Лемма 5. *Справедливы неравенства*

$$\left<w_1\right>^{(\frac{4+\alpha}{5})}_{t,D\times[0,T]}+\left<w_2\right>^{(\frac{4+\alpha}{5})}_{t,D\times[0,T]}\leq C\left<\psi\right>^{(\frac{\alpha}{5})}_{t,R^1\times[0,T]}, \tag{21}$$

$$\sum_{|l|=4}(\langle D^l_xw_1\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{x,D\times[0,T]}+\langle D^l_xw_2\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{x,D\times[0,T]})\leq C\langle\psi\rangle^{(\alpha)}_{x,R^1\times[0,T]}, \tag{22}$$

$$\sum_{|l|=4}(\langle D^l_xw_1\rangle^{(\alpha)}_{t,D\times[0,T]}+\langle D^l_xw_2\rangle^{(\alpha)}_{t,D\times[0,T]})\leq C\langle\psi\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{R^1\times[0,T]}, \tag{23}$$

$$\sum_{|l|=4}([D^l_xw_1]^{(\alpha)}_{t,D\times[0,T]}+[D^l_xw_2]^{(\alpha)}_{t,D\times[0,T]})\leq C[\psi]^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{R^1\times[0,T]}. \tag{24}$$

Доказательство. Определим $K(x_1,x_2)=\frac{1}{\pi}\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{R^1}\exp(-|\xi|x_2+i\xi x_1)d\xi$. Вернёмся к формулам (12), (13). Из (12) получим

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1}+\frac{\partial w_2}{\partial x_2}=-\frac{b(1-2\nu)}{E}\left(K*p_{x_1x_1}\right), \tag{25}$$

здесь и всюду ниже $(K*f)=\int\limits_{R^1}K(x_1-y_1,x_2)f(y_1)dy_1$.

Из (13) следует $w_1=w_1^{(1)}+w_1^{(2)}$, $w_2=w_2^{(1)}+w_2^{(2)}$, где

$$w_1^{(1)}(x,t)=\tfrac{b(1+\nu)(1-2\nu)}{2E}\left(K*p_{x_1}\right),\ w_1^{(2)}(x,t)=\tfrac{b(1+\nu)}{2E}\left(x_2K_{x_2}*p_{x_1}\right),$$
$$w_2^{(1)}(x,t)=-\tfrac{b(1+\nu)}{E}\left(x_2K_{x_1}*p_{x_1x_1}\right),\quad H(x_1,t)=\int\limits_{R^1}|\xi|exp(-a|\xi|^5t+i\xi x_1),$$
$$w_2^{(2)}(x,t)=\tfrac{b(1+\nu)}{2E}\int\limits_{R^1}K(x_1-y_1,x_2)dy_1\int\limits_0^t ds\int\limits_{R^1}H(y_1-z_1,t-s)\psi(z_1,s)dz_1.$$

Непосредственно из данных представлений следует оценка

$$\langle w_1\rangle^{(\frac{4+\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]} + \langle w_2^{(1)}\rangle^{(\frac{4+\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]} \le C\langle p_{x_1}\rangle^{(\frac{4+\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]}. \tag{26}$$

Также как в Лемме 2, используя метод интегрирования по частям, приходим к оценке

$$\left|D_t^k D_{x_1}^l H(x_1,t)\right| \le C\,t^{-\frac{5k+l+2}{5}} \frac{1}{1+(|x|^5/t)^{\frac{5k+l+2}{5}}}.$$

Отмечая, что $\int\limits_{R^1} K(x_1,x_2)dx_1 = \pi$ при $x_2>0$ и повторяя рассуждения Леммы 3 (см. оценку (16), приходим к оценке

$$\langle w_2^{(2)}\rangle^{(\frac{4+\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]} \le C\langle \psi\rangle^{(\frac{\alpha}{5})}_{t,Q\times[0,T]}. \tag{27}$$

Из оценок (26), (27) следует (21).

Из представления (25) видим, что $w_{1,x_1}+w_{2,x_2}$ является гармонической функцией в полуплоскости D для всех $t\ge 0$, принимающей при $x_2=0$ граничное значение $\frac{b(1-2\nu)(1+\nu)}{E}p_{x_1x_1}(x_1,t)$. Оценка (20) позволяет использовать результаты гл. III монографии [13]:

$$\sum_{|l|=3}\langle D_x^l(w_{1,x_1}+w_{2,x_2})\rangle^{(\alpha)}_{x,D\times[0,T]} \le C\langle D_{x_1}^5 p\rangle^{(\alpha)}_{x,D\times[0,T]}.$$

Располагая данной оценкой, оценкой

$$\langle D_{x_1}^4 w_1\rangle^{(\alpha)}_{x,D\times[0,T]} + \langle D_{x_1}^4 w_2\rangle^{(\alpha)}_{x,D\times[0,T]} \le C\langle \psi\rangle^{(\alpha)}_{x,D\times[0,T]}, \tag{28}$$

и дифференцируя систему (8), можно получить оценку (22) для всех производных.

При доказательстве (28) ограничимся оценкой производной $\frac{\partial^4 w_1^{(2)}}{\partial x_1^4}$. Введём обозначение $K_*(x_1,x_2)=\frac{b(1+\nu)}{E}x_2K_{x_2}(x_1,x_2)$. Следуя рассуждениям §2 главы III монографии [13], получим

$$|D_{x_1}^4 w_1^{(2)}(x_1,x_2,t) - D_{x_1}^4 w_1^{(2)}(\overline{x}_1,x_2,t)| \le C\langle D_{x_1}^5 p\rangle^{(\alpha)}_{x,R^1\times[0,T]}|x_1-\overline{x}_1|^\alpha. \tag{29}$$

Далее, снова также как в монографии [13], выводим формулу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^4 w_1^{(2)}}{\partial x_1^4}(x_1,x_2,t) - \frac{\partial^4 w_1^{(2)}}{\partial \overline{x}_1^4}(x_1,\overline{x}_2,t) = \\
&= \int\limits_{|x_1-y_1|\le|x_2-\overline{x}_2|} K_*(y_1,x_2)\left(\frac{\partial^5 p}{\partial y_1^5}(y_1,t) - \frac{\partial^5 p}{\partial x_1^5}(x_1-y_1,t)\right)dy_1 - \\
&- \int\limits_{|x_1-y_1|\le|x_2-\overline{x}_2|} K_*(y_1,\overline{x}_2)\left(\frac{\partial^5 p}{\partial y_1^5}(y_1,t) - \frac{\partial^5 p}{\partial x_1^5}(x_1-y_1,t)\right)dy_1 + \\
&+ \int\limits_{|x_1-y_1|>|x_2-\overline{x}_2|} (K_*(y_1,x_2)-K_*(y_1,\overline{x}_2))\left(\frac{\partial^5 p}{\partial y_1^5}(y_1,t) - \frac{\partial^5 p}{\partial x_1^5}(x_1-y_1,t)\right)dy_1.
\end{aligned}$$

При оценке первого и второго слагаемых воспользуемся тем, что $|K_*(x_1,x_2)| \le C/|x_1|$, а при оценке последнего- $|K_*(x_1,x_2)-K_*(x_1,\overline{x}_2)| \le C|x_2-\overline{x}_2|/|x_1|^2$, в итоге

$$|D^4_{x_1}w^{(2)}_1(x_1,x_2,t)-D^4_{x_1}w^{(2)}_1(x_1,\overline{x}_2,t)| \le C\langle D^5_{x_1}p\rangle^{(\alpha)}_{x,R^1\times[0,T]}|x_2-\overline{x}_2|^\alpha.$$

Из последнего неравенства и оценки (29) вытекает оценка (28). К оценкам (23)-(24) приходим, комбинируя рассуждения, приведенные выше при доказательстве Леммы 3 и оценок (21)-(22). □

4. Построение регуляризатора. Доказательство Теоремы 1. Введем разбиение области Ω на подобласти $\omega^{(k)}$ и $\Omega^{(k)}$. Ввиду ограниченности объёма статьи, ограничимся ссылкой на Главу IV монографии [4], где приведено подробное описание данных множеств. Нас, в первую очередь, будут интересовать множества $\omega^{(k)}$, $\Omega^{(k)}$, примыкающие к кривой Γ, участки границы $\gamma^{(k)}=\Gamma\bigcap\overline{\omega^{(k)}}$, $\Gamma^{(k)}=\Gamma\bigcap\overline{\Omega^{(k)}}$ и соответствующий им набор индексов $k\in\mathfrak{N}$. Предполагается, что можно указать такое число $d>0$, что в круге радиуса $d>0$ с центром в $\xi^{(k)}\in\gamma^{(k)}$, кривая Γ задается в местной системе координат в точке $\xi^{(k)}$ уравнением $y_2=F^{(k)}(y_1)$. Координаты $\{x\}$ и $\{y\}$ связаны соотношениями

$$y_i=\sum_{i=1}^{2}\beta^{(k)}_{ij}(x_j-\xi^{(k)}_j)\ i=1,2;\ y=\mathcal{B}^{(k)}(x-\xi^{(k)}), \tag{30}$$

где $\mathcal{B}^{(k)}=\|\beta^{(k)}_{ij}\|_{i,j=1,2}$- ортогональная матрица. Напомним, что при переходе от координат $\{x\}$ к локальным координатам $\{y\}$, вектор смещения и компоненты тензора напряжений преобразуются по правилу

$$u_i(x)=\sum_{i=1}^{2}\beta^{(k)}_{ji}u_j(y),\ \sigma_{ij}(u(x))=\sum_{m,l=1}^{2}\beta^{(k)}_{mi}\sigma_{ml}(u(y))\beta^{(k)}_{lj},\ \mathbb{T}\mathrm{r}\,\sigma(u(x))=\mathbb{T}\mathrm{r}\,\sigma(u(x)).$$

Локальное "выпрямление"границы осуществляется при помощи замены переменных

$$z_1=y_1,\ \ z_2=y_2-F^{(k)}(y_1), \tag{31}$$

причем производные связаны соотношениями $\frac{\partial}{\partial y_1}=\frac{\partial}{\partial z_1}-F_{z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}$, $\frac{\partial}{\partial y_2}=\frac{\partial}{\partial z_2}$.

Следуя [4], введем также функции $\eta^{(k)}$, $\zeta^{(k)}$ такие, что $0\le\zeta^{(k)}\le 1$, $|D^s_x\zeta^{(k)}|\le\frac{c}{\lambda^{|s|}}$, $\sum\limits_k\eta^{(k)}(x)\zeta^{(k)}(x)=1$, $\zeta^{(k)}=\begin{cases}1 \text{ при } x\in\omega^{(k)},\\ 0 \text{ при } x\in\Omega^{(k)}\backslash\omega^{(k)}.\end{cases}$ Прямую и обратную связь между x и z через соотношения (30), (31) обозначим $x=Z_k(z)$ и $z=Z_k^{-1}(x)$.

Обозначим через $p^{(k)}$, $w^{(k)}$ решение задачи (8)-(10), в которой положим $\psi=h^{(k)}\equiv Z_k^{-1}\{\eta^{(k)}h\}$. Леммы 3 и 4 приводят к оценке

$$\langle\langle p^{(k)}\rangle\rangle^{(5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5})}_{S\times[0,T]}+\langle\langle w^{(k)}\rangle\rangle^{(m+\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{D\times[0,T]}\le C\langle\langle h^{(k)}\rangle\rangle^{(\alpha,\frac{5+\alpha}{5})}_{S\times[0,T]}. \tag{32}$$

Введем пространства $\mathfrak{C}^{m+\alpha}=\{h\in C^{\frac{\alpha}{5}}([0,\tau];C^{m+\alpha}(\Gamma)): h|_{t=0}=0\}$, $(m=0,..,5)$, $\mathfrak{P}^{5+\alpha}=\Big\{\rho\in P^{5+\alpha,\frac{5+\alpha}{5}}(\Gamma\times[0,\tau]):\ \rho|_{t=0}=0\Big\}$. Оператор $\mathcal{R}$, действующий из $\mathfrak{C}^\alpha$ в

$\mathfrak{P}^{5+\alpha}$, определим следующим образом:

$$\mathcal{R}h = \sum_k \eta^{(k)} Z_k\{p^{(k)}\}. \tag{33}$$

Здесь и всюду ниже, по умолчанию, суммирование производится по всем значениям $k \in \mathfrak{N}$. В пространстве $\mathfrak{C}^{\alpha}$ введем норму $\{h\}^{(\alpha)}_{\Gamma\times[0,\tau]} = \sup\limits_k \langle\langle h\rangle\rangle^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}_{\Gamma^{(k)}\times[0,\tau]}$. Следуя доказательству Леммы 4.2 Главы IV монографии [4], можно доказать, что при $\tau = \varkappa\lambda^{\frac{5(4+\alpha)}{4}}$, $h \in \mathfrak{C}^{\alpha}$ справедливы неравенства

$$\{h\}^{(\alpha)}_{\Gamma\times[0,\tau]} \le \langle\langle h\rangle\rangle^{(\alpha)}_{\Gamma\times[0,\tau]} \le c\,\{h\}^{(\alpha)}_{\Gamma\times[0,\tau]}\,,$$

причём правое неравенство имеет место при дополнительном предположении, что $h \in C^{\frac{\alpha}{5}+\frac{4\alpha}{5(4+\alpha)}}([0,\tau]; C(\Gamma))$.

Далее определим вспомогательную функцию $v_h(x)$ по правилу $v_h = \sum\limits_k \eta^{(k)}\theta^{(k)}$, $\theta^{(k)} = Z_k\{\mathcal{B}^{(k)*} w^{(k)}\}$, где $\mathcal{B}^{(k)*}$- транспонированная матрица $\mathcal{B}^{(k)}$.

Обозначим через u_h решение задачи

$$\begin{gathered} \mathbb{L}_i u_h = 0,\ i = 1,2,\ x \in \Omega,\ t > 0, \\ u_h = 0 \ \ x \in \Sigma,\ t > 0, \\ \mathbb{B}_1\left(x,t,\tfrac{\partial}{\partial x}\right) u_h = 0,\ \mathbb{B}_2\left(x,t,\tfrac{\partial}{\partial x}\right) u = b\Delta_\Gamma \mathcal{R}h,\ x \in \Gamma,\ t > 0. \end{gathered} \tag{34}$$

Тогда, как видим, (ср. (5))

$$\mathcal{A}\mathcal{R}h = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}h - \mathbb{Q}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_h. \tag{35}$$

Доказательство Теоремы 1. Следуя подходу, предложенному в работе [14], разобьём доказательство на два этапа. Первый - состоит в том, чтобы доказать, что оператор $\mathcal{R}$ является правым регуляризатором оператора $\mathcal{A}$, т.е. при любых $h \in \mathfrak{C}^{\alpha}$ справедливо соотношение $\mathcal{A}\mathcal{R}h = h + \mathcal{T}h$, в котором $\mathcal{T}$ ограниченный оператор в пространстве $\mathfrak{C}^{\alpha}$ и

$$\|\mathcal{T}\| \le \frac{1}{2}, \tag{36}$$

если τ достаточно мало. На втором этапе доказывается справедливость оценки (7).

Возвращаясь к равенству (35), непосредственно из определения функций $p^{(k)}$, $w^{(k)}$, v_h получим

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{R}h - \mathbb{Q}u_h = h + \sum\limits_k \eta^{(k)}[Z_k \tfrac{\partial^3\, q\mathbb{T}\mathrm{r}\,\sigma(w^{(k)})}{\partial z_1^2 \partial z_2} - \mathbb{Q}Z_k\mathcal{B}^{(k)*}w^{(k)}] + \\ + \sum\limits_k [\eta^{(k)}\mathbb{Q}Z_k\mathcal{B}^{(k)*}w^{(k)} - \mathbb{Q}\eta^{(k)}Z_k\mathcal{B}^{(k)*}w^{(k)}] + \mathbb{Q}(v_h - u_h) = h + \sum\limits_i \mathcal{T}_i h. \end{gathered} \tag{37}$$

Как будет показано ниже, "малость"второго $\mathcal{T}_1 h$ и третьего $\mathcal{T}_2$ слагаемых обеспечивается за счёт того, что в них присутствуют либо произведения "старших производных"на функции, нормы которых "достаточно малы"либо же "младшие производные". Наконец, соответствующая норма четвертого слагаемого $\mathcal{T}_3 h$ будет мала, так как функция v_h "достаточно хорошо приближает" функцию u_h, а именно является решением неоднородной задачи вида (34), с правыми частями, нормы которых "малы" при малых τ.

Второе слагаемое $\mathcal{T}_1 h$ из (37) можно записать в виде:

$$\mathcal{T}_1 h = \sum_k \eta^{(k)} Z_k \left\{ \left(\mathbb{P}\left(z, \tfrac{\partial}{\partial z}\right) - \mathbb{P}\left(0, \tfrac{\partial}{\partial z}\right)\right) \operatorname{Tr}\sigma(w^{(k)}) + \mathbb{P}\left(z, \tfrac{\partial}{\partial z}\right) \operatorname{Tr}\sigma\langle F_{z_1}, w^{(k)}\rangle \right\},$$

где $\mathbb{P}(z, \frac{\partial}{\partial z}) = -qn_j^{(k)}(z)(\frac{1}{(1+F_{z_1}^2(z))^{1/2}}\frac{\partial}{\partial z_1})^2(\frac{\partial}{\partial z_j} + F_{z_j}(z)\frac{\partial}{\partial z_2})$, $\mathbb{P}(0, \frac{\partial}{\partial z}) = q\frac{\partial^3}{\partial z_1^2 z_2}$, а также $\operatorname{Tr}\sigma\langle F_{z_1}, w^{(k)}\rangle = -\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} F_{z_1} w_{1,z_1}^{(k)}$.

Применяя Лемму 1, неравенства (6) и оценку (32), получим

$$\{\mathcal{T}_1 h\}_{\Gamma\times[0,\tau]}^{(\alpha)} \le C(\varkappa^{\frac{4}{5(4+\alpha)}} + \varkappa^{\frac{12}{5(4+\alpha)}} + \lambda + \lambda^\alpha)|h|_{Q\times[0,T]}^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}. \tag{38}$$

Т.к.

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}(\eta^{(k)}\theta^{(k)}) = \eta^{(k)}\sigma_{ij}(\theta^{(k)}) + \left[\sigma_{ij}, \eta^{(k)}\right]\theta^{(k)}, \\ \left[\sigma_{ij}, \eta^{(k)}\right]\theta^{(k)} \equiv \tfrac{E}{1+\nu}\left(\tfrac{1}{2}(\eta_{x_j}^{(k)}\theta_i^{(k)} + \eta_{x_i}^{(k)}\theta_j^{(k)}) + \tfrac{\nu}{1-2\nu}\eta_{x_l}^{(k)}\theta_l^{(k)}\delta_{ij}\right),\end{gathered} \tag{39}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Tr}\sigma(\eta^{(k)}\theta^{(k)}) = \eta^{(k)}\operatorname{Tr}\sigma(\theta^{(k)}) + \left[\operatorname{Tr}\sigma, \eta^{(k)}\right](\theta^{(k)}), \\ \left[\operatorname{Tr}\sigma, \eta^{(k)}\right](\theta^{(k)}) = \tfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\eta_{x_i}^{(k)}\theta_i^{(k)},\end{gathered}$$

выводим, что $\mathcal{T}_2 h = \sum_k \left(\left[\mathbb{Q}, \eta^{(k)}\right]'(\theta^{(k)}) + \left[\mathbb{Q}, \eta^{(k)}\right]''(\theta^{(k)})\right)$, где

$$\begin{gathered}\left[\mathbb{Q}, \eta^{(k)}\right]'(\theta^{(k)}) = -qn_i(x)\left(\tfrac{\partial^2}{\partial\omega^2}\eta_{x_i}^{(k)}\operatorname{Tr}\sigma(\theta^{(k)}) + 2\tfrac{\partial}{\partial\omega}\eta_{x_i}^{(k)}\tfrac{\partial}{\partial\omega}\operatorname{Tr}\sigma(\theta^{(k)}) + \right. \\ \left. + \eta_{x_i}^{(k)}\tfrac{\partial^2}{\partial\omega^2}\operatorname{Tr}\sigma(\theta^{(k)}) + \tfrac{\partial^2}{\partial\omega^2}\eta^{(k)}(\operatorname{Tr}\sigma(\theta^{(k)}))_{x_i} + 2\tfrac{\partial}{\partial\omega}\eta^{(k)}\tfrac{\partial}{\partial\omega}(\operatorname{Tr}\sigma(\theta^{(k)}))_{x_i}\right), \\ \left[\mathbb{Q}, \eta^{(k)}\right]''(\theta^{(k)}) = -qn_i\tfrac{\partial^2}{\partial\omega^2}(\left[\operatorname{Tr}\sigma, \eta^{(k)}\right](\theta^{(k)}))_{x_i}.\end{gathered}$$

Снова применяя Лемму 1, неравенства (6) и оценку (32), получим

$$\{\mathcal{T}_2 h\}_{\Gamma\times[0,\tau]}^{(\alpha)} \le C(\varkappa^{\frac{4}{5(4+\alpha)}} + \varkappa^{\frac{12}{5(4+\alpha)}} + \lambda + \lambda^\alpha)|h|_{Q\times[0,T]}^{(\alpha,\frac{\alpha}{5})}. \tag{40}$$

Для оценки слагаемого $\mathcal{T}_3$ необходимо получить представления для выражений $\mathbb{L}_i v_h$, $\mathbb{B}_i v_h$, $i = 1, 2$.

Непосредственными вычислениями можно убедиться в том, что при известном наборе функций $p^{(k)}$ и $w^{(k)}$, разность $v_h - u_h$ является решением задачи вида

$$\begin{aligned}&\mathbb{L}_n(v_h - u_h) = f_n,\ x \in \Omega,\ n = 1, 2,\ t > 0, \\ &\mathbb{B}_i\left(x, t, \tfrac{\partial}{\partial x}\right)(v_h - u_h) = g_i,\ x \in \Gamma,\ i = 1, 2,\ t > 0, \\ &v_h - u_h = 0\ x \in \Sigma,\ t > 0.\end{aligned}$$

где, например,

$$f_n = \sum_k \left(\eta^{(k)} \beta_{in}^{(k)} Z_k \left\{ \left(\mathbb{L}_i(z, \tfrac{\partial}{\partial z}) - \mathbb{L}_i(0, \tfrac{\partial}{\partial z})\right) w^{(k)} + + \mathbb{L}_i(z, \tfrac{\partial}{\partial z})' \, F_{z_1} \frac{\partial w_1^{(k)}}{\partial z_2} \right\} + \right.$$
$$\left. + \beta_{in}^{(k)} \left[\mathbb{L}_i, \eta^{(k)}\right] (\theta^{(k)}) \right),$$
$$\mathbb{L}_i(z, \tfrac{\partial}{\partial z}) w^{(k)} = \tfrac{1}{1-2\nu} \left(\tfrac{\partial}{\partial z_i} + F_{z_i}(z) \tfrac{\partial}{\partial z_2} \right) \operatorname{div} w^{(k)} + \left(\tfrac{\partial}{\partial z_1} + F_{z_1}(z) \tfrac{\partial}{\partial z_2} \right)^2 w_i^{(k)} + \tfrac{\partial^2}{\partial z_2^2} w_i^{(k)},$$
$$\mathbb{L}_i(z, \tfrac{\partial}{\partial z})' = \tfrac{1}{1-2\nu} \left(\tfrac{\partial}{\partial z_i} + F_{z_i}(z) \tfrac{\partial}{\partial z_2} \right), \quad \mathbb{L}_i(0, \tfrac{\partial}{\partial z}) w^{(k)} = \tfrac{1}{1-2\nu} \tfrac{\partial}{\partial z_i} \operatorname{div} w^{(k)} + \Delta w_i^{(k)} = 0,$$
$$\left[\mathbb{L}_i, \eta^{(k)}\right] (\theta^{(k)}) \equiv \tfrac{1}{1-2\nu} \left(\eta_{x_i x_j}^{(k)} \theta_j^{(k)} + \eta_{x_i}^{(k)} \theta_{j,x_i}^{(k)} + \eta_{x_i}^{(k)} \theta_{j,x_j}^{(k)} \right) + \theta_i^{(k)} \Delta \eta^{(k)} + 2 \eta_{x_j}^{(k)} \theta_{i,x_j}^{(k)}.$$

Из результатов работы [15] следует оценка

$$|v_h - u_h|_{\Omega \times [0,T]}^{(4+\alpha, \frac{\alpha}{5})} \le \left(\sum_{i=1}^{2} |f_i|_{\Omega \times [0,T]}^{(2+\alpha, \frac{\alpha}{5})} + \sum_{i=1}^{2} |g_i|_{\Gamma \times [0,T]}^{(3+\alpha, \frac{\alpha}{5})} \right), \tag{41}$$

Лемма 1, неравенства (6) и оценки (32), (41) приводят к оценке

$$\{\mathcal{T}_3 h\}_{\Gamma \times [0,\tau]}^{(\alpha)} \le C(\varkappa^{\frac{4}{5(4+\alpha)}} + \varkappa^{\frac{12}{5(4+\alpha)}} + \varkappa^{\frac{5-\alpha}{5(5+\alpha)}} + \varkappa^{\frac{4(5-\alpha)}{5(5+\alpha)}} + \lambda + \lambda^{\alpha}) |h|_{Q \times [0,T]}^{(\alpha, \frac{\alpha}{5})}. \tag{42}$$

Из (38), (40), (42) при достаточно малых $\varkappa$, λ вытекает (36).

Для доказательства оценки (7) применяется метод Шаудера. Разбиение единицы при помощи срезающих функций $\chi^{(k)} = \eta^{(k)} \xi^{(k)}$ приводит к модельной задаче вида (8)-(10), и оценка (7) следует из Лемм 1, 3 и 5. □

В заключение автор приносит глубокую благодарность Б.В.Базалию и Н.В.Васильевой за полезные консультации.

1. *Barra F., Herrera M., Procaccia I.* Conformal Dynamics of Precursors to Fracture // Europhysics Letters.- 2003.– 63, 708.
2. *Базалий Б.В.* Задача Стефана для уравнения Лапласа с учетом кривизны свободной границы // Укр.мат.журнал. – 1997. – т.49. – С.1299-1315.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Физматгиз, 1966. – 707 с.
4. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
5. *Васильева Н.В.* Об одной краевой задаче со старшими производными в граничном условии, возникающей при исследовании задачи Hele-Shaw с нерегулярной границей // Труды ИПММ НАН Украины. – 2002. – т. 7. – P. 33–44.
6. *Mucha P.* On the weak solutions to the Stefan problem with Gibbs-Thompson correction // Differential and integral equations. - V. 20, - 2007. P. 769-792.
7. *Esher J., Simonett G.* Classical solutions for Hele-Shaw models with surface tension // Adv. Differential Eqs. – 1997. – V.2. - No. 4. – P. 619-642.
8. *Bum Ja Jin* Estimates of the solutions of the elastic system in a moving domain with free upper interface // Nonlinear Analysis. – 2002. – v. 51. – P. 1009–1029.
9. *Гусаков В.Н., Дегтярев С.П.* Существование гладкого решения в одной задаче фильтрации // Укр. матем. журнал.- 1989. - 41, No.9. - С.1192-1198.
10. *Antontsev S.N., Gonçalves C.R., Meirmanov A.M.* Exact estimates for the classical solutions to the free boundary problem in the Hele-Shaw cell // Advances in Differential Equations. – 2003. – v. 8. – P. 1259-1280.

11. *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гёльдера. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 176 с.
12. *Lunardi A.* Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems. – Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser, 1995. – 424 p.
13. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, 1973. – 576 с.
14. *Bizhanova G.I., Rodrigues J.F.* Classical solutions to parabolic systems with free boundary of Stefan type // Advances in Differential Equations. – 2005. – v. 10. – P. 1345-1388.
15. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – v. 17. – P. 35-92.

M.V.Krasnoschok

On an initial-boundary value problem for stationaty system of the theory of elasticity with additional dynamical condition on a boundary of domain.

We consider mixed boundary-value problem for stationaty system of the theory of elasticity in doubly-connected domain with additional dynamical condition on a part of boundary. Displacements u and some additional function ρ is unknowns. The existence of smooth solution in Holdet spaces is proved by use of the method of construction of regularizer.

Keywords: *elasticity, Cauchy problem, regularizer, Schauder estimates.*

М.В. Краснощок

Про одну початково-крайову задачу для стаціонарної системи пружності з додатковою динамічною умовою на частині межі області.

Розглянуто мішану граничну задачу для стаціонарної системи теорії пружності в двозв'язній області з додатковою динамічною умовою на частині межі. Невідомими є переміщення u та додаткова функція ρ. За допомогою методу побудови регуляризатора доведено існування гладкого розв'язку в просторах Гельдера.

Ключові слова: *пружність, задача Коші, регуляризатор, оцінки Шаудера.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`krasnoschok@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 9.11.10