

УДК 517.928: 533.6.013.2

©2010. Б.И. Басок, В.В. Гоцуленко

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОГО ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРИ ТЕПЛОПОДВОДЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ КОЛЕБАНИЯМИ

Рассмотрена задача стабилизации стационарного режима в динамической системе феномена Рийке импульсными периодическими колебаниями величины дополнительной акустической гибкости. Получены асимптотические соотношения, описывающие границу области устойчивости положения равновесия в рассматриваемой динамической системе. Обоснованы механизмы возбуждения автоколебаний, возникающих при потере устойчивости стационарного режима движения среды в трубе Рийке.

Ключевые слова: труба Рийке, теплоподвод, неустойчивость, параметрические колебания, тепловое сопротивление, автоколебания.

1. Введение. Хорошо известно [1-3], что одним из следствий параметрического резонанса, является тот факт, что если параметры системы периодически меняются во времени, то положение равновесия может сделаться неустойчивым, даже если оно устойчиво при каждом фиксированном значении параметра. Однако периодический способ изменения некоторых параметров в системе может осуществлять и стабилизацию ранее (т.е. при фиксированном значении параметра) неустойчивого положения равновесия [1] и, таким образом, быть в этом случае аналогом динамического демпфирования колебательных режимов [2-3].

Фундаментальным решением возбуждения продольных автоколебаний (помпажа) в пневмосистеме, включающей лопастный компрессор, являются исследования В. А. Боднера и В. В. Казакевича [4], в которых использована напорная характеристика $F(Q)$ нагнетателя. Ранее экспериментально было установлено, что образование восходящей ветви на зависимости $F(Q)$ как функции объемного расхода Q , является причиной возбуждения автоколебаний [4]. Образование неустойчивой ветви напорной характеристики является следствием возникновения отрывных течений в проточной части компрессора при снижении подаваемого расхода, что приводит к порождению вихревых явлений в потоке. Поэтому в области малых расходов гидравлические потери $h_{\text{вихр}}$ возрастают с уменьшением объемного расхода Q и на зависимости $h_{\text{вихр}}(Q)$ образуется нисходящая ветвь "отрицательного" сопротивления.

В трубе Рийке, в жидкостных реактивных двигателях (ЖРД) и других устройствах восходящая ветвь напорной характеристики устройства оставалась неизвестной. Поэтому как устранение термоакустических автоколебаний или вибрационного горения, так их генерирование, по образному высказыванию Б. В. Раушенбаха, осуществлялось вслепую [5].

Л. Крокко ввел запаздывание τ сгорания топлива в уравнение динамики ЖРД (жидкостного реактивного двигателя) [6], что сыграло историческую роль в описании вибрационного горения [7].

В работе [8] в уравнения феномена Рийке была введена напорная характеристика теплоподвода и установлены причины образования на ней восходящей ветви, что согласно исследованиям [4] является причиной возбуждения автоколебаний в этом устройстве. Подвод теплоты порождает образование нисходящей ветви на зависимости потерь вязкостного трения по длине $h_{\text{тр}}(Q)$, а также теплового сопротивления $h_{\text{т}}(Q)$, которое является местным гидравлическим, поскольку в зоне теплоподвода возрастает скорость потока из-за снижения плотности среды.

Автоколебания, самовозбуждающиеся в области восходящей (неустойчивой) ветви характеристики $F(Q)$, имеют диаметрально противоположные свойства в сравнении с автоколебаниями, обусловленными запаздыванием τ сгорания топлива, что имеет место как в явлении "поющего" пламени Хиггинса [9], так и при возбуждении вибрационного горения [10]. Это явление наблюдалось в экспериментальных исследованиях по подавлению вибрационного горения в вертикальных камерах горения регенеративных воздухонагревателей доменных печей [11], когда при одних и тех же мероприятиях изменение автоколебаний в различных воздухонагревателях было противоположным.

2. Объект исследования и его математическое описание. Далее труба Рийке рассматривается как динамическая система с сосредоточенными параметрами (рис.1). Для вывода уравнений движения нагретой среды в рассматриваемой

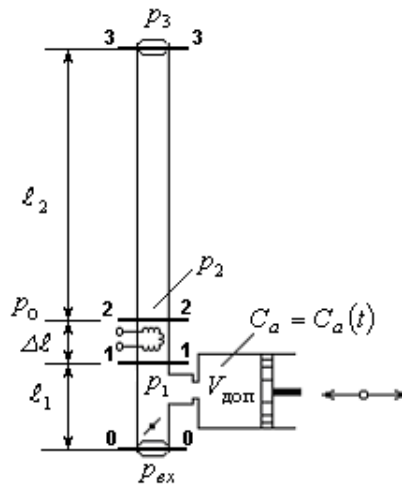


Рис. 1. Схема трубы Рийке с периодическим изменением подключенной дополнительной емкости

модели воспользуемся уравнениями баланса импульса массы, неразрывности и энергии.

Для составления уравнения баланса импульсов, рассмотрим силы, действующие на нагретый столб воздуха, заключенный в сечениях 2-2 и 3-3 (рис.1), в трубе Рийке: $F_p = (p_2 - p_3)S$ – сила поверхностного давления, $F_{\text{веса}} = \rho_2 g l_2 S$ – сила веса, а также $F_{\text{тр}}$ – сила вязкостного трения по длине трубы при движении нагретой среды и сила $F_{\text{т}}$, обусловленная тепловым сопротивлением [12], которое является

местным при нагреве среды [13]. Следовательно, согласно принципа Даламбера

$$m_2 \frac{dw_2}{dt} = (p_2 - p_3) S - \rho_2 g \ell_2 S - F_{\text{тр}} - F_{\text{т}}, \quad (1)$$

где $m_2 = \rho_2 V_2$ – масса нагретого столба воздуха, w_2 – скорость нагретого воздуха после нагревателя. Полагая $h_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}/S$, $h_{\text{т}} = F_{\text{т}}/S$ и используя соотношения: $p_1 - p_2 = h_{\text{т}} + h_{\text{сетки}}$, $p_0 = p_3 + \rho_0 g \ell_2$, где p_0 – давление в сечении 2 – 2 снаружи трубы (рис.1), $h_{\text{сетки}}(Q_2) = k_{\text{сетки}} Q_2^2$ – потери при обтекании сетки, имеем из (1)

$$L_a \frac{dQ_2}{dt} = F(Q_2) - P, \quad (2)$$

где $L_a = \rho_2 \ell_2 / S$ – акустическая масса нагретого столба воздуха [4,8-9], $F(Q_2) = A(Q_2) - h_{\text{тр}}(Q_2) - h_{\text{т}}(Q_2) - h_{\text{сетки}}(Q_2)$ – напорная характеристика трубы Рийке [13], $A(Q_2) = g \ell_2 (\rho_0 - \rho_2)$ – давление подъемной силы, $Q_2 = S w_2$ – объемный расход нагретого воздуха, $P = p_0 - p_1$.

Запишем уравнение неразрывности для участка между сечениями 0 – 0 и 2 – 2 вертикальной трубы (рис.1)

$$\frac{dM}{dt} = Q_{\text{вх}} \rho_0 - Q_2 \rho_2, \quad (3)$$

где $M = M(t)$ – масса холодного столба воздуха, расположенного до электроспирали в момент времени t , $Q_{\text{вх}}$ – объемный расход воздуха, входящего в трубу (в сечении 0 – 0), Q_2 – объемный расход нагретого воздуха, выходящего из сечения 2 – 2, ρ_0 и ρ_2 – соответственно плотности потока до и после источника теплоподвода. Имеем $dM = V d\rho_1$, где $V = S \ell_1 + V_{\text{доп}}$ – объем трубы до электроспирали, $V_{\text{доп}}$ – объем дополнительной емкости (рис.1), площадь нормального сечения трубы. Далее $d\rho_1/d\rho_1 = c_1^2$, где c_1 – скорость звука в среде до нагревателя.

Таким образом, уравнение (3) можно записать в следующей форме

$$C_a \frac{dp_1}{dt} = \frac{\rho_0}{\rho_2} Q_{\text{вх}} - Q_2,$$

где $C_a = \frac{V}{c_1^2 \rho_2}$ – акустическая гибкость трубы [4]. Далее, учитывая, что

$$p_{\text{вх}} = p_0 + \rho_0 g (\ell_1 + \Delta \ell) \text{ и } p_{\text{вх}} - p_1 = \rho_0 g \ell_1 + k_{\text{др}} Q_{\text{вх}}^2 + k_{\text{тр}} Q_{\text{вх}}^2, \quad (4)$$

где $p_{\text{вх}}$ – давление окружающей среды на входе в трубу, $k_{\text{др}} Q_{\text{вх}}^2$ – гидравлические потери при обтекании дросселя, $k_{\text{тр}} Q_{\text{вх}}^2$ – гидравлические потери перед нагревателем, обусловленные вязкостью. Исключая в уравнениях (4) давление $p_{\text{вх}}$, получим $p_0 - p_1 = k_{\text{вх}} Q_{\text{вх}}^2 - \rho_0 g \Delta \ell$, где $k_{\text{вх}} = k_{\text{др}} + k_{\text{тр}}$. Величина $\Delta \ell$ (рис.1) порядка толщины спирали электронагревателя, которой можно пренебречь. Тогда $P = p_0 - p_1 \approx k_{\text{вх}} Q_{\text{вх}}^2$ и следовательно $\frac{\rho_0}{\rho_2} Q_{\text{вх}} = \varphi(P)$, где $\varphi(P) = k_{\varphi} \sqrt{P}$, $k_{\varphi} = \frac{\rho_0}{\sqrt{k_{\text{вх}} \rho_2}}$. Учитывая, что давление $p_0 = \text{const}$, получим $dP(t) = -dp_1(t)$, и окончательно уравнение (3) запишем в виде

$$C_a \frac{dP}{dt} = Q_2 - \varphi(P). \quad (5)$$

Полученная нелинейная диссипативная динамическая система (2), (5) формально совпадает с уравнениями теории помпажа центробежных нагнетателей [4]. В компрессорах в напор потока превращается механическая энергия вращения, а в трубе Рийке напор возникает из-за частичного преобразования в него подводимой теплоты.

Таким образом, задача о самовозбуждении термоакустических автоколебаний в рассматриваемой модели трубы Рийке математически свелась к исследованию причин, приводящих к образованию периодических решений в нелинейной автономной системе дифференциальных уравнений (2), (5). Как хорошо известно, это имеет место тогда и только тогда, когда соответствующее уравнение интегральных кривых

$$\frac{dP}{dQ_2} = \frac{L_a}{C_a} \cdot \frac{Q_2 - \varphi(P)}{F(Q_2) - P} \quad (6)$$

имеет предельный цикл, структура которого определяется величиной волнового сопротивления $Z = \sqrt{L_a/C_a}$ [4].

Также было установлено [8], что необходимым условием образования предельного цикла для уравнения (6) является наличие восходящего участка $dF(Q_2)/dQ_2 > 0$ на напорной характеристике $F(Q_2)$. Это в свою очередь имеет место, когда на зависимостях $h_{\text{тр}}(Q_2)$ и $h_{\text{т}}(Q_2)$ имеются нисходящие участки "отрицательных" сопротивлений. Механизм возбуждения автоколебаний, основанный на отрицательном сопротивлении, является классическим в электрических системах [15] и в теории помпажа [4].

Далее в этой работе мы покажем, что зависимости $h_{\text{тр}}(Q_2)$ и $h_{\text{т}}(Q_2)$ действительно имеют нисходящие ветви отрицательных сопротивлений. Расчетное выражение для $h_{\text{тр}}(Q_2)$ получим с помощью формулы Дарси – Вейсбаха [12], а тепловое сопротивление $h_{\text{т}}(Q_2)$ [14] определим из уравнения энергии для потока в форме первого закона термодинамики.

3. Инженерный расчет характеристик трубы Рийке. Рассматривая гидравлически гладкую трубу для вязкостных потерь по длине трубы на участке нагретого столба воздуха, имеем выражение

$$h_{\text{тр}}(Q_2) = \lambda \frac{\rho_2 \ell_2}{2dS^2} Q_2^2, \quad \lambda = \lambda(Q_2), \quad (7)$$

где $\lambda = 64/\text{Re}$ для ламинарного движения при $\text{Re} \leq \text{Re}_{\text{кр}} \approx 2320$ и $\lambda = 0,3164/\text{Re}^{0,25}$ для турбулентного режима движения при $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$, $\text{Re} = \frac{d}{S\nu} Q_2$, ν – коэффициент кинематической вязкости нагретого воздуха.

На рис. 2 – а представлена зависимость $h_{\text{тр}}(Q_2)$ для трубы с диаметром $d = 0.06$ м, длиной $\ell = 1.2$ м и расположением электронагревателя на расстоянии $\ell_1 = \frac{1}{4}\ell$ от ее нижнего основания с мощностью $W_3 = 2.5$ кВт.

Участок нисходящей ветви (рис. 2 – а) на зависимости $h_{\text{тр}}(Q_2)$ образуется (рис. 2 – б) в области ламинарного режима при малых расходах нагретого воздуха. Это связано с тем, что при уменьшении расхода воздуха его вязкость сильно возрастает, а с его увеличением при постоянном тепловом потоке $W_3 = \text{const}$ температура воздуха

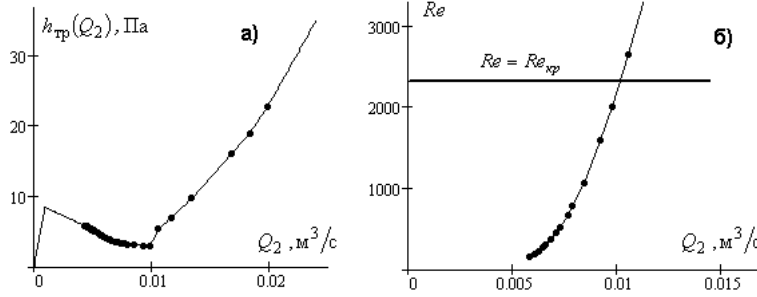


Рис. 2. Зависимости а) – гидравлических потерь по длине трубы и б) – числа Рейнольдса от объемного расхода нагретого воздуха после электроспирали

снижается, и зависимость $\lambda = \lambda(Q_2)$ становится убывающей. С дальнейшим увеличением расхода Q_2 режим движения переходит в турбулентный, и гидравлические потери $h_{тр}(Q_2)$ уже имеют возрастающий характер (рис.2 – а).

Таким образом, в области ламинарного режима на зависимости $h_{тр}(Q_2)$ гидравлических потерь по длине нагретого участка трубы Рийке образуется участок отрицательного сопротивления.

При подводе теплоты даже в гидравлически идеальной жидкости возникают потери – тепловое сопротивление. Тепловое сопротивление, по – видимому, впервые было введено в [12]. Для несжимаемой жидкости Б. В. Раушенбахом в [5] было получено для $h_{т}(Q_2)$ возрастающую зависимость. Для произвольного политропного теплоподвода получим выражение для теплового сопротивления $h_{т}(Q_2)$ из уравнения энергии для идеального газа

$$q + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{w_1^2}{2} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{w_2^2}{2} + u_2 + \Delta h_{т}, \quad (8)$$

где $\Delta h_{т}$ потери энергии из-за теплового сопротивления, q – подводимый удельный тепловой поток, u_1 и u_2 – соответственно удельная внутренняя энергия воздуха до и после нагревателя. В (8) не учитывается потенциальная энергия положения, ввиду ее незначительного изменения при достаточно близком расположении сечений 1 – 1 и 2 – 2 (рис.1), для которых составлено это уравнение. При политропном подводе теплоты, когда $q = c_v \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1)$, где c_v – удельная теплоемкость изохорного процесса, n и k – соответственно показатели политропы и адиабаты, с учетом того, что $\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = R(T_2 - T_1)$ и $R(T_2 - T_1) = c_v(k-1)(T_2 - T_1)$, уравнение (8) позволяет определить $\Delta h_{т}$ в таком виде:

$$\Delta h_{т} = n \left(\frac{k-1}{1-n} \right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2},$$

откуда полагая $h_{т} = \rho_1 \Delta h_{т}$, для теплового сопротивления получаем выражение

$$h_{т} = n \rho_1 \left(\frac{k-1}{1-n} \right) c_v (T_2 - T_1) + \frac{\rho_1 w_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{\frac{2}{n-1}} \right]. \quad (9)$$

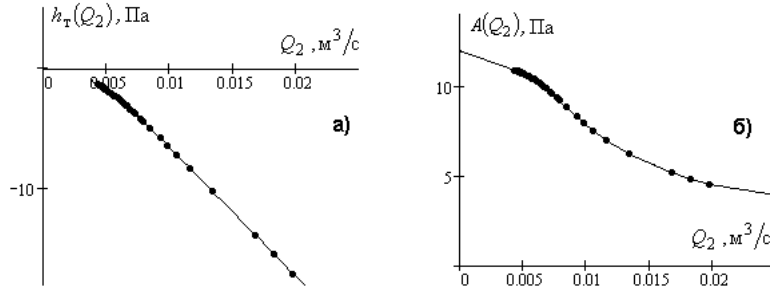


Рис. 3. Зависимости а) – теплового сопротивления $h_T(Q_2)$, б) – давления подъемной силы $A(Q_2)$

Для изобарного процесса ($n = 0$) из (9) получается окончательно необходимое выражение (рис.3)

$$h_T(Q_2) = \frac{\rho_2^2}{2\rho_1 S^2} \left[1 - \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^2 \right] Q_2^2. \quad (10)$$

Напорная характеристика $F(Q_2) = A(Q_2) - h_{тр}(Q_2) - h_T(Q_2)$ трубы Рийке, восходящая ветвь которой составляет необходимое условие феномена Рийке [13], предельный цикл и автоколебания в рассматриваемой трубе Рийке представлены на рис. 4. Из-за проявления отрицательного теплового сопротивления при увеличении тепловой нагрузки область возбуждения колебаний феномена Рийке расширяется в сторону увеличения расхода, где режим движения является турбулентным.

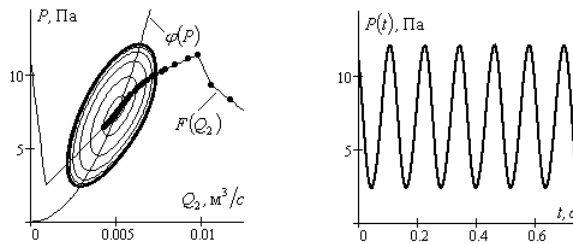


Рис. 4. Напорная характеристика, предельный цикл и автоколебания $P(t)$ в трубе Рийке

4. Особенность потока при экспериментальном исследовании феномена Рийке. Применение охлаждения в вертикальной трубе с целью защиты регистрирующей аппаратуры значительно снижает температуру воздуха в потоке по периферии. Это согласно [16], приводит к редкому совпадению теоретического описания феномена Рийке с экспериментальным даже в качественном отношении. В этом случае поток становится неоднородным из-за значительного градиента температуры, что усложняет модель течения, требует существенного повышения мощности теплового потока для возбуждения автоколебаний.

Экспериментально установлено [17], что термоакустические колебания влияют на распределение температуры воздуха в трубе Рийке. При возбуждении автоколе-

баний в неохлаждаемой трубе зона с наибольшей температурой смещается от оси трубы к стенке, создавая кольцевую область нагретого воздуха в пристеночном слое. Поэтому исключение потерь теплового потока в окружающую среду при теоретическом исследовании [18-19] с повышением тепловой нагрузки является оправданным, т.к. упрощает модель решаемой задачи, а также определение механизмов феномена Рийке и построения периодических решений уравнений движения, характеризующих автоколебания. Это позволило установить особенность возрастания амплитуды релаксационных автоколебаний "поющего" пламени Хиггинса, независимых от волнового сопротивления при повышении тепловой нагрузки [20].

5. Стабилизация неустойчивого стационарного режима в трубе Рийке импульсными параметрическими колебаниями. Далее в этом параграфе рассматривается задача обеспечения устойчивости стационарного режима в трубе Рийке на восходящей (неустойчивой) ветви ее напорной характеристики $F(Q_2)$.

Рассматривая в системе (2),(5) акустическую гибкость C_a как периодически изменяемую во времени функцию $C_a = C_a(t)$, ее неустойчивый стационарный режим, можно стабилизировать. С физической точки зрения, функция $C_a(t)$ реализуется соответствующим колебанием поршня в моделях рис. 1, периодически изменяя его объем.

Характеристики $F(Q_2)$ и $\varphi(P)$, исходя из предыдущего их построения, аппроксимируются следующим образом: $F(Q_2) = F_0 - \varepsilon r(Q_2 - \xi)$, $\varphi(P) = kP^\varepsilon$, где $0 < \varepsilon \leq 1/2$, $F_0 > 0$, $\xi > 0$, $r(x) = x(x - x_0)(x - x_1)$, $x_0x_1 < 0$.

Параметры стационарного режима находим из условий:

$$dQ_2/dt = 0, dP/dt = 0, \Leftrightarrow \begin{cases} Q_2^* = \xi, \\ P^* = F(Q_2^*), \\ \xi = \varphi(P^*). \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_2^* = \xi, \\ P^* = F_0. \end{cases} \Rightarrow k = \xi^{-1/\varepsilon} F_0.$$

Вводим новые переменные, полагая: $x = Q_2 - Q_2^*$, $y = P - P^*$. Тогда динамическая система (2),(5) в этих переменных запишется следующим образом:

$$\begin{cases} L_a dx/dt = -y - \varepsilon r(x), \\ C_a dy/dt = x + \xi \left[1 - \left(1 + \frac{y}{H_0} \right)^\varepsilon \right]. \end{cases} \quad (11)$$

В динамической системе (11) точка $x = y = 0$ является положением равновесия, которому соответствует стационарный режим $Q_2^* = \xi$, $P^* = F_0$ исходной системы (2), (5). Определим характер (линейной) устойчивости этого стационарного режима. Составляем матрицу Якоби системы (11) в нуле:

$$J = \left\| \begin{array}{cc} -\varepsilon x_0 x_1 & -1 \\ 1 & -\varepsilon \xi H_0^{-1} \end{array} \right\|. \quad (12)$$

Характеристическое уравнение:

$$\det |J - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr} J \lambda + \det J = 0, \quad (13)$$

где E – единичная матрица. Из (13) имеем $\lambda = \frac{\text{tr}J \pm \delta}{2}$, $\delta^2 = (\text{tr}J)^2 - 4 \det J$, откуда с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ получаем:

$$\lambda = -\frac{x_0x_1 + \xi H_0^{-1}}{2} \pm 2i + O(\varepsilon^2) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14)$$

Следовательно, при выполнении неравенства $x_0x_1 + \xi H_0^{-1} < 0$ справедливо $\text{Re}[\lambda] > 0$, т.е. стационарный режим неустойчив.

При $\varepsilon = 0$ система (11) становится гамильтоновой (консервативной). Заменой переменных: $X = \sqrt{L_a}x$, $Y = \sqrt{C_a}y$, $s = t/\sqrt{L_a C_a}$ система (11) с точностью до величин порядка приводится к виду:

$$\begin{cases} dX/ds = -Y - \varepsilon \sqrt{C_a} r \left(X/\sqrt{L_a} \right), \\ dY/ds = X - \varepsilon \xi \sqrt{L_a} \ln \left| 1 + \frac{y}{H_0 \sqrt{C_a}} \right| + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (15)$$

Как следует из [21] в системе(15) при малых значениях $\varepsilon > 0$ образуется устойчивый предельный цикл, если функция

$$F(A) = \oint_{\ell_A} f_1(X, Y) dY - f_2(X, Y) dX$$

имеет простой положительный нуль $A = A^*$, причем $\frac{dF}{dA}|_{A=A^*} < 0$, где $\ell_A = \{(X, |Y) : X = A \cos(s), Y = A \sin(s), 0 \leq s < 2\pi\}$ – окружность радиуса A с центром в нуле,

$$f_1(X, Y) = -\sqrt{C_a} r \left(\frac{X}{\sqrt{L_a}} \right), f_2(X, Y) = \xi \sqrt{L_a} \ln \left| 1 + \frac{y}{H_0 \sqrt{C_a}} \right|.$$

Таким образом, в нашем случае:

$$F(A) = -\frac{1}{4} A^2 \sqrt{\frac{C_a}{L_a^3}} \pi (3A^2 + 4x_0x_1 L_a) + \xi \sqrt{L_a} \int_0^{2\pi} \sin(s) \ln \left| 1 + \frac{A \sin(s)}{H_0 \sqrt{C_a}} \right| ds,$$

откуда

$$A^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{-x_0x_1 L_a} + O(\xi), \quad \frac{dF}{dA} \Big|_{A=A^*} = -\frac{4\pi}{\sqrt{3}} |x_0x_1|^{3/2} \sqrt{C_a} + O(\xi).$$

Запишем систему (11) с точностью до величин порядка $O(\varepsilon)$:

$$L_a \frac{dx}{dt} = -y + O(\varepsilon), \quad C_a(t) \frac{dy}{dt} = x + O(\varepsilon),$$

откуда получаем уравнение Хилла:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(t) x(t) + O(\varepsilon), \quad (16)$$

где $\omega(t) = 1/\sqrt{L_a C_a}$, $L_a = \text{const}$, $C_a = C_a(t) = C_a^{\text{соб}} + C_a^{\text{доп}}(t) \geq C_a^{\text{соб}}$ – акустическая гибкость трубы Рийке, состоящая из собственной – $C_a^{\text{соб}}$ и дополнительной – $C_a^{\text{доп}}$, определяемой варьируемым дополнительно подключенным объемом $V_{\text{доп}}$ (рис.1), $\omega(0) = 1/\sqrt{L_a C_a^{\text{соб}}} = \omega_0$ – частота собственных колебаний в вертикальной трубе (рис. 1). Далее полагаем,

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega_* + d, & \text{при } 0 < t < T, \\ \omega_* - d, & \text{при } T < t < 2T, \end{cases}$$

где $|d| \ll 1$, T – полупериод функции $\omega(t)$: $\omega(t) = \omega(t + 2T)$. Сведем уравнение (16) к динамической системе, введением фазовых переменных: $z_1 = x$, $z_2 = dx/dt$. Тогда

$$\frac{dz_1}{dt} = z_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = -\omega^2(t) z_1. \quad (17)$$

Введем в рассмотрение также отображение за период, соответствующее динамической системе (17), имеем:

$$g_t^{2T} : \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z_1(t + 2T) \\ z_2(t + 2T) \end{bmatrix}.$$

В каноническом базисе это отображение задается матрицей $A = A_1 A_2$, $Z(t + 2T) = AZ(t)$, где $Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t)]^T$, $A_k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & a_{12}^k \\ a_{21}^k & a_{22}^k \end{bmatrix}$, $a_{11}^k = \cos T\omega_k$, $a_{12}^k = s_k \omega_k^{-1}$, $a_{21}^k = -s_k \omega_k$, $a_{22}^k = \sin T\omega_k$, $\omega_1 = \omega_* + d$, $\omega_2 = \omega_* - d$, ($k = \overline{1; 2}$).

Известно [1], что область устойчивости нуля в (17) определяется неравенством $|\text{tr}A| < 2$. Поэтому граница области устойчивости определяется уравнением:

$$|\text{tr}A| = \left| 2a_{11}^1 a_{11}^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) s_1 s_2 \right| = 2. \quad (18)$$

Т.к. $|d| \ll 1$, то $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\omega_* + d}{\omega_* - d} \approx 1$. Положим $\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} = 2(1 + \Delta)$. Тогда легко проверяется, что $\Delta = \frac{2d^2}{\omega_*^2} + O(d^4) \ll 1$. Используя тождества:

$$2a_{11}^1 a_{11}^2 = \cos(2Td) + \cos(2T\omega_*), \quad 2s_1 s_2 = \cos(2Td) - \cos(2T\omega_*),$$

перепишем (18) в виде $-\Delta \cos(2Td) + (2 + \Delta) \cos(2T\omega_*) = \pm 2$, откуда

$$\cos(2T\omega_*) = \frac{2 + \Delta \cos(2Td)}{2 + \Delta}, \quad (19)$$

и

$$\cos(2T\omega_*) = \frac{-2 + \Delta \cos(2Td)}{2 + \Delta}. \quad (20)$$

В случае (19) имеем $\cos(2T\omega_*) \approx 1$, поэтому $\omega_* = \frac{\pi}{T}k + a$, где $|a| \ll 1$, $k \in N \cup \{0\}$. И так,

$$\cos(2Ta) = 1 - \frac{\Delta}{2 + \Delta} (1 - \cos(2Td)), \quad (21)$$

где $a = a(d)$, $a(0) = 0$. Воспользовавшись разложениями Тейлора:

$$\cos(2Td) = 1 - 2T^2d^2 + O(d^4), \quad \cos(2Ta) = 1 - 2T^2a^2 + O(a^4),$$

получаем

$$\frac{1}{\omega_*^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{T}k + a(d)\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{T}k + a'(0)d + o(d)\right)^2} = \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-2} + O(d),$$

$$\Delta = \frac{2d^2}{\omega_*^2} + O(d^4) = 2d^2 \left(\left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-2} + O(d) \right) + O(d^4) = 2d^2 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-2} + O(d^3),$$

$$\frac{\Delta}{2 + \Delta} = \frac{\Delta}{2} + O(\Delta^2) = d^2 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-2} + O(d^3),$$

$$1 - 2T^2a^2 + O(a^4) = 1 - \left(d^2 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-2} + O(d^3) \right) (2T^2d^2 + O(d^4)) \Rightarrow$$

$$a^2 = d^4 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-2} + O(d^5) \Rightarrow |a| = d^2 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-1} \sqrt{1 + O(d)} = d^2 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-1} (1 + O(d)).$$

Следовательно, окончательно имеем: $\omega_* = \frac{\pi}{T}k + a = \frac{\pi}{T}k \pm d^2 \left(\frac{\pi}{T}k\right)^{-1} + O(d^3)$, или т.к. $o(d^2) = O(d^3)$, то

$$\omega_* = \frac{\pi}{T}k \pm \frac{T}{\pi k} d^2 + o(d^2). \quad (22)$$

Аналогично, из (20) $\Rightarrow \cos(2T\omega_*) \approx -1 \Rightarrow \omega_* = \frac{\pi}{T}k + \frac{\pi}{2T} + a$, где $|a| \ll 1$, $k \in N \cup \{0\}$. Поэтому, подставляя полученные выше разложения в (15), учитывая, что в этом случае

$$\Delta = \frac{2d^2}{\omega_*^2} + O(d^4) = 2d^2 \left(\left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-2} + O(d) \right) + O(d^4) =$$

$$= 2d^2 \left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-2} + O(d^3),$$

получим

$$2T^2a^2 + O(a^4) = d^2 \left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-2} + O(d^4) \Rightarrow$$

$$a = \pm d \left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-1} \sqrt{1 + O(d^2)} = \pm d \left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-1} + O(d^3) \Rightarrow$$

$$\omega_* = \frac{\pi}{T} \left(k + \frac{1}{2}\right) \pm d \left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-1} + O(d^3),$$

или, т.к. $O(d^3) = o(d)$, то окончательно

$$\omega_* = \frac{\pi}{T} \left(k + \frac{1}{2}\right) \pm d \left(\frac{\pi}{T}(k + 1/2)\right)^{-1} + o(d). \quad (23)$$

На рис. 5 изображены области устойчивости, полученные согласно выражениям (22) и (23). Суммарная область устойчивости получается, очевидно, их объединением.

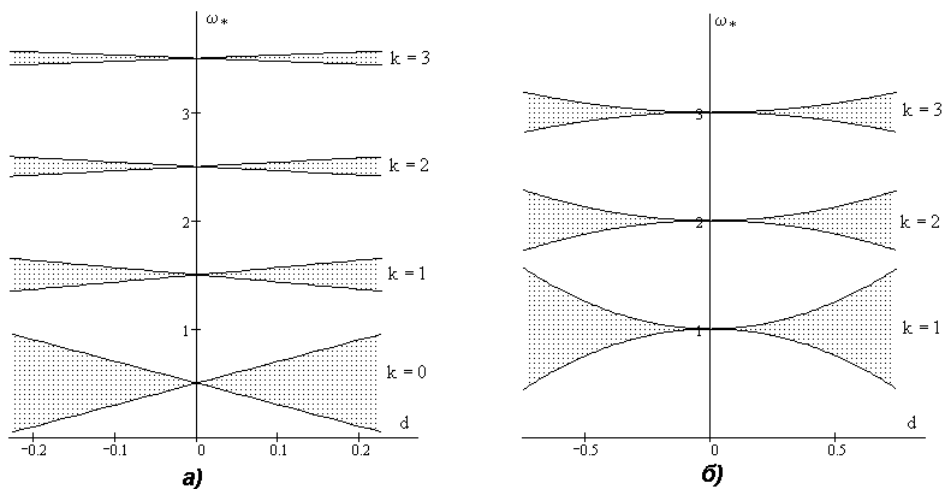


Рис. 5. Области устойчивости при $T = \pi$: а) определенные по (22); б) – по (23)

Таким образом, выбирая параметры ω_* и d из заштрихованной области устойчивости на рис. 5, учитывая соотношение $\omega(t) = 1 / \sqrt{L_a C_a(t)}$, функция $C_a(t)$, стабилизирующая стационарный режим в системе (2), (5), определяется следующим образом:

$$C_a(t) = \begin{cases} L_a^{-1} (\omega_* + d)^{-2}, & \text{при } 0 < t < T, \\ L_a^{-1} (\omega_* - d)^{-2}, & \text{при } T < t < 2T. \end{cases}$$

6. Заключение.

1. Приведены предложенные механизмы феномена Рийке, которые в предыдущих исследованиях этого явления оставались неизвестными.
2. При описании автоколебаний в трубе Рийке введена напорная характеристика теплоподвода $F(Q_2)$, восходящая ветвь которой составляет необходимое условие возбуждения автоколебаний, обусловленных предложенными механизмами.
3. Получены области устойчивости импульсной параметрической стабилизации дополнительной акустической емкостью неустойчивого стационарного режима в рассматриваемой модели трубы Рийке, что осуществляется без воздействия на механизмы, порождающие автоколебания.

1. Арнольд В. И. Математические методы классической механики / Арнольд В. И. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / Тимошенко С. П. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
3. Стрелков С. П. Введение в теорию колебаний / Стрелков С. П. – М.: Наука, 1964. – 437 с.
4. Казакевич В. В. Автоколебания (помпаж) в компрессорах: моногр. / В. В. Казакевич. – М.: Машиностроение, 1974. – 264 с.

5. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение / Раушенбах Б. В. – М.: Физматгиз, 1961. – 500 с.
6. Крокко Л. О роли времени запаздывания в возбуждении продольных высокочастотных колебаний в камере сгорания ЖРД / Л. Крокко, Д. Грей, Д. Гарри // Вопросы ракетной техники. – 1959. – № 5. – С. 24 – 29.
7. Ларинов В. М. Автоколебания газа в установках с горением: моногр. / В.М. Ларинов, Р. Г. Зарипов. – Казань.: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2003. – 327 с.
8. Гоцуленко В. В. Математическое моделирование особенностей феномена Рийке / В. В. Гоцуленко // Математическое моделирование, РАН. – 2004. – Т.16, № 9. – С. 23 – 28.
9. Гоцуленко В. В. Управление автоколебаниями колеблющегося пламени при одновременном действии механизмов их возбуждения / В. В. Гоцуленко, Б. И. Басок // Промышленная теплотехника. – 2009. – Т. 31, № 3. – С. 101 – 107.
10. Gotsulenko V. V. Distinctive features of the intrachamber instability of combustion in liquid-propellant rocket engines / V. V. Gotsulenko // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2008. – Vol. 81, No 5. – P. 935 – 940.
11. Доменные воздухонагреватели [Шкляр Ф. Р., Малкин В. М., Каштанова С. П. и др.]. – М.: Металлургия, 1982. – 176 с.
12. Абрамович Г. Н. Прикладная газовая динамика / Абрамович Г. Н. – М.: Наука, 1969. – 824 с.
13. Басок Б. И. Проблема термоакустических колебаний и вибрационного горения / Б. И. Басок, В. В. Гоцуленко // Техническая теплофизика и промышленная теплоэнергетика: сборник научных трудов. – Д., 2009. – Вып. 1. – С. 5 – 15.
14. Гоцуленко В. В. Тепловое сопротивление как механизм возбуждения автоколебаний / В. В. Гоцуленко, В. Н. Гоцуленко // Сборник научн. трудов Днепродзержинского гос. техн. ун-та. – Днепродзержинск, 2009. – С. 95 – 100.
15. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Меркин Д. Р. – М.: Наука, 1971. – 312 с.
16. Беляев Н. М. Термоакустические колебания газожидкостных потоков в сложных трубопроводах энергетических установок / Беляев Н. М., Белик Н. П., Польшин А. В. – К.: Высшая школа, 1985. – 160 с.
17. Москвичев Д. Ю. Исследование влияния акустических резонаторов на термоакустические процессы в установках с теплоподводом. – Новосибирск: Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича РАН. – 2007. – 118 с.
18. Gotsulenko V. V. Special Modes of the Pijke Phenomenon / V. V. Gotsulenko // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2005. - Vol. 78 – No 2. – P. 375 – 379.
19. Gotsulenko V. V. On the problem of control of relaxation oscillations of a "singing" flame / V. V. Gotsulenko // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. – 2007. – Vol. 80, No 3. – P. 563 – 569.
20. Гоцуленко В.В. Математическое моделирование снижения амплитуд колебаний вибрационного горения в крупных промышленных агрегатах // Математическое моделирование, РАН. – 2005. – Т. 17. – № 11. – С. 16 – 24.
21. Гоцуленко В.В. Асимптотический анализ автоколебаний при напорном перемещении жидкостей или газов в пневмо или гидросистеме / В. В. Гоцуленко // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. Вып. 14. – С. 56 – 62.

B.I. Basok, V.V. Gotsulenko

Stabilization of unstable equilibrium position at a supply of heat by the parametric oscillations.

The problem of stabilization of a stationary mode in dynamic system of the phenomenon of Rijke by the impulsive periodic vibrations the value of additional acoustic flexibility is considered. Asymptotic ratio describing border of area stability position of equilibrium in considered dynamic system are received. Mechanisms of excitation of self-oscillations, arising at loss of stability of a stationary motion

of continuum in Rijke tube are proved.

Keywords: *tube Rijke, heat supply, instability, parametric oscillation, thermal resistance, self-oscillations.*

Б.І. Басок, В.В. Гоцуленко

Стабілізація нестійкого положення рівноваги при теплопідводі параметричними коливаннями.

Розглянуто задачу стабілізації стаціонарного режиму в динамічній системі феномену Рійке імпульсними періодичними коливаннями величини додаткової акустичної гнучкості. Отримано асимптотичні співвідношення, що описують границю області стійкості положення рівноваги в розглянутій динамічній системі. Обґрунтовано механізми збудження автоколивань, що виникають при втраті стійкості стаціонарного режиму руху середовища в трубі Рійке.

Ключові слова: *труба Рійке, теплопідвід, нестійкість, параметричні коливання, тепловий опір, автоколивання.*

*Ин-т технической теплофизики НАН Украины, Киев
gosul@ukr.net*

Получено 04.06.10