УДК 517.5

©2010. **Т.В. Ломако**

Теорема сходимости для уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на дилатацию

В данной статье доказана теорема сходимости для регулярных решений вырожденных уравнений Бельтрами с ограничениями интегрального типа на дилатацию.

Ключевые слова: *уравнения Бельтрами, дилатация, сходимость, регулярное решение, классы Соболева.*

1. Обозначения и предварительные замечания. Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, т.е. связное открытое подмножество $\mathbb{C}$. **Уравнениями Бельтрами** называются уравнения вида

$$f_{\overline{z}} = \mu(z) \cdot f_z \,, \tag{1}$$

где $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ – измеримая функция с $|\mu(z)| < 1$ п.в., $f_{\overline{z}} = \overline{\partial} f = (f_x + i f_y)/2$, $f_z = \partial f = (f_x - i f_y)/2$, $z = x + iy$, f_x и f_y – частные производные отображения f по x и y, соответственно. Функция μ называется **комплексным коэффициентом** и

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|} \tag{2}$$

– **максимальной дилатацией** или просто **дилатацией** уравнения (1).

Обозначим через $Df(z)$ дифференциал функции $f : D \to \mathbb{C}$ в точке z:

$$Df(z) \cdot h := f_z \cdot h + f_{\overline{z}} \cdot \overline{h} \,,$$

где $h \in \mathbb{C}$. Тогда

$$|Df(z)| := \sup_{|h|=1} \{|Df(z) \cdot h|\} = |f_z| + |f_{\overline{z}}| \,. \tag{3}$$

Точка дифференцируемости называется **регулярной точкой** отображения f, если его якобиан в этой точке отличен от нуля:

$$J_f(z) = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \neq 0 \,. \tag{4}$$

Как известно, необходимым и достаточным условием того, что гомеоморфизм, имеющий хотя бы одну регулярную точку, сохраняет ориентацию, является положительность якобиана во всех регулярных точках, см., напр., [1], с. 10.

Заметим, что в регулярных точках гомеоморфного решения уравнения Бельтрами

$$K_\mu(z) = \frac{|Df(z)|^2}{J_f(z)} = \frac{J_f(z)}{l\,(Df(z))^2} \,,$$

где $l\,(Df(z)) := \inf\limits_{|h|=1} |Df(z)\cdot h| = |f_z| - |f_{\overline{z}}|$.

Под **регулярным решением** уравнения Бельтрами (1) в области D будем понимать гомеоморфизм f из пространства Соболева $W^{1,1}_{loc}(D)$, частные производные которого удовлетворяют (1) и (4) п.в. в D.

Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется **абсолютно непрерывной на линиях**, пишут $f \in \mathrm{ACL}$, если для любого замкнутого прямоугольника R в D, стороны которого параллельны координатным осям, $f|R$ является абсолютно непрерывной на почти всех линейных сегментах в R, параллельных сторонам R, см., напр., [2], с. 27. В частности, $f \in \mathrm{ACL}$, если f принадлежит классу $W^{1,1}_{loc}$ и, наоборот, если $f \in \mathrm{ACL}$ имеет первые частные производные из L^1_{loc}, тогда $f \in W^{1,1}_{loc}$, см. например 1.2.3 в [3]. Напомним, что по теореме Геринга-Лехто, см. теорему III.3.1 в [1], любой гомеоморфизм на плоскости, имеющий п.в. частные производные, является дифференцируемым п.в.

Будем говорить, что функция множества M, заданная на подмножествах D, **абсолютно непрерывна**, если $M(E) \to 0$ при $|E| \to 0$. В дальнейшем мы рассматриваем только неотрицательные M, допускающие значение $+\infty$.

2. Предварительные замечания.

В дальнейшем нам понадобятся следующие опорные факты.

Предложение 2.1. Пусть гомеоморфизм $f \in W^{1,1}_{loc}(D)$ с $J_f(z) > 0$ для п.в. $z \in D$. Тогда $f^{-1} \in W^{1,1}_{loc}\,(f(D))$ и если дополнительно $K_\mu \in L^1_{loc}(D)$, то $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}\,(f(D))$, см. теоремы 1.1 и 1.3 в [4].

Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ – непрерывная функция. Говорят, что f обладает (N)–свойством по Лузину, если для любого $E \subset D$

$$|E| = 0 \Rightarrow |f(E)| = 0\,.$$

Здесь и далее $|E|$ обозначает меру Лебега множества $E \subset \mathbb{C}$.

Говорят, что функция f обладает $\left(N^{-1}\right)$–свойством, если для любого $E \subset \mathbb{C}$

$$|E| = 0 \Rightarrow \left|f^{-1}(E)\right| = 0\,.$$

Предложение 2.2. Пусть $f : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфизм класса $W^{1,2}_{loc}(D)$. Тогда f обладает (N)–свойством, см. теорему III.6.1 в [1].

Пусть U – непустое ограниченное открытое множество в $\mathbb{C}$ и f_n, $f \in L^1(U)$. Говорят, что последовательность функций $f_n \to f$ слабо в $L^1(U)$, если

$$\lim_{n\to\infty} \iint\limits_U F(z)\,(f_n(z) - f(z))\,dxdy = 0$$

для любого $F \in L^\infty(U)$, см., например в [5], с.67.

Предложение 2.3. Пусть $f_n : U \to \mathbb{R}$ – последовательность функций класса $W^{1,1}(U)$. Предположим, что $f_n \to f$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1(U)$, $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$, $n = 1, 2, ...$, – равномерно ограничены в $L^1(U)$ и их неопределенные интегралы равностепенно абсолютно непрерывны. Тогда $f \in W^{1,1}(U)$ и $\frac{\partial f_n}{\partial x} \to \frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y} \to \frac{\partial f}{\partial y}$ при $n \to \infty$ слабо в $L^1(U)$, см. лемму 2.1 в [6].

Предложение 2.4. Пусть D' – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Если гомеоморфизм $f : D \to D'$ имеет конечные частные производные п.в. в D, то

$$\iint\limits_{B} J_f \, dxdy \leq |f(B)|$$

для любого борелевского множества $B \subset D$. Равенство верно для любого B тогда и только тогда, когда f – локально абсолютно непрерывно в D, см. теорему III.3.3 в [1].

Предложение 2.5. Пусть f, $f_n : D \to \mathbb{C}$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,1}_{loc}$ и пусть $f_n \to f$ при $n \to \infty$ локально равномерно. Тогда для любого открытого множества $\Omega \subseteq D$:

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi\left(K_\mu(z)\right) \, dxdy \leq \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) \, dxdy \tag{5}$$

для любой неубывающей выпуклой функции $\Phi : [1, \infty] \to \overline{\mathbb{R}^+}$, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке

$$Q = \sup_{\Phi(t)<\infty} t \tag{6}$$

и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = \infty\,, \tag{7}$$

см. теорему 1 в [7].

3. Основной результат.

Теорема 3.1. *Пусть $f_n : D \to \mathbb{C}$ – последовательность регулярных решений уравнения Бельтрами с комплексными коэффициентами μ_n. Предположим, что для каждого ограниченного измеримого множества $E \subset D$ и абсолютно непрерывной функции множества $M_E = M(E)$ верно соотношение*

$$\iint\limits_{E} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right) \, dxdy \leq M_E\,, \tag{8}$$

где $\Phi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ – неубывающая выпуклая функция, которая непрерывна в смысле $\overline{\mathbb{R}^+}$ слева в точке (6) и удовлетворяет условию (7).

Если $f_n \to f$ равномерно на каждом компактном множестве в D, где $f : D \to \mathbb{C}$ – гомеоморфизм, то f является регулярным решением уравнения (1). Более того, выполнено неравенство

$$\iint\limits_{E} \Phi\left(K_{\mu}(z)\right)\, dxdy \le M_E\,, \tag{9}$$

где $K_{\mu}(z)$ – максимальная дилатация предельного отображения f.

Доказательство. Поскольку $\Phi(t)$ – выпуклая на $[0,\,\infty)$ неубывающая функция, то, см., напр., [8], с. 63, [9], с. 15, найдутся числа $C > 0$ и $T \in [0,\,\infty)$ такие, что при $t > T\,:\, \frac{t}{\Phi(t)} < C < \infty$. Поэтому, если на некотором ограниченном открытом множестве $\Omega \subset D$

$$\iint\limits_{\Omega} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right)\, dxdy \le M_{\Omega}\,,$$

то

$$\iint\limits_{\Omega} K_{\mu_n}(z)\, dxdy \le CM_{\Omega} + T\,|\Omega|\,. \tag{10}$$

Пусть E – произвольное измеримое множество из D с $0 < |E| < \infty$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется открытое множество $\Omega_\epsilon \supseteq E$ с $|\Omega_\epsilon \setminus E| < \epsilon$, см. теорему III.6.6 в [10]. В частности, найдется открытое множество $\Omega \supseteq E$, такое что $|\Omega \setminus E| < |E|$, т.е. $|\Omega| < 2|E|$, и по неравенству (10) получаем

$$\iint\limits_{E} K_{\mu_n}(z)\, dxdy \le CM_{\Omega} + 2T|E|\,, \tag{11}$$

где $M_{\Omega} \to 0$ при $|E| \to 0$ в силу абсолютной непрерывности функции множества M.

Аналогично рассуждениям, приводимых при доказательстве теоремы 3.1 в [6], покажем, что предельная функция последовательности f_n принадлежит классу $W^{1,1}_{loc}(D)$. Согласно предложению 2.3, для доказательства этого факта достаточно показать, что ∂f_n и $\overline{\partial} f_n$ равномерно ограничены в L^1_{loc} и имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы.

Итак, пусть C – компактное множество в D и пусть V – открытое множество с компактным замыканием $\overline{V}$ в D, такое что $C \subset V$, скажем $V = \{z \in D : \mathrm{dist}(z,\, C) < r\}$, где $r < \mathrm{dist}(C,\, \partial D)$. Заметим, что

$$|\overline{\partial} f_n| \le |\partial f_n| \le |\partial f_n| + |\overline{\partial} f_n| = K^{1/2}_{\mu_n}(z) \cdot J^{1/2}_{f_n}(z)$$

справедливо п.в. Следовательно, согласно неравенству Гельдера и предложению 2.4

$$\iint\limits_{E} |\partial f_n|\, dxdy \le \left|\iint\limits_{E} K_{\mu_n}(z)\, dxdy\right|^{1/2} |f_n(C)|^{1/2}$$

для любого измеримого множества $E \subseteq C$. Отсюда, поскольку f_n сходится к f равномерно на C, получаем

$$\iint\limits_{E} |\partial f_n|\, dxdy \leq \left|\iint\limits_{E} K_{\mu_n}(z)\, dxdy\right|^{1/2} |f(V)|^{1/2} \qquad (12)$$

для всех достаточно больших n. Учитывая оценку (11), получаем, что $\frac{\partial f_n}{\partial x}$, $\frac{\partial f_n}{\partial y}$ равномерно ограничены по норме L^1_{loc} и имеют локально равностепенно абсолютно непрерывные неопределенные интегралы.

Т.к. $f_n \in W^{1,1}_{loc}(D)$ и $J_{f_n}(z) > 0$ п.в., то $f_n^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(f_n(D))$ согласно предложению 2.1.

Аналогично (3.11) и (3.12) в [4], для произвольного измеримого множества $E \subset D$ имеем

$$\iint\limits_{f_n(E)} |Df_n^{-1}(w)|^2\, dudv \leq \iint\limits_{E} K_{\mu_n}(z)\, dxdy\,. \qquad (13)$$

Заметим, что из локально равномерной сходимости $f_n \to f$ следует, что $f_n^{-1} \to f^{-1}$ локально равномерно, см., например, лемму 3.1 в [11]. Из (11) и (13) получаем, что $f^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(f(D))$, см. теорему I.1 в [12]. Тогда f обладает $\left(N^{-1}\right)$–свойством, см. предложение 2.2, и $J_f \neq 0$ п.в. в D, см. теорему 1 в [13].

Пусть E – произвольное измеримое множество из D с $|E| < \infty$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ найдется открытое множество $\Omega_\epsilon \supseteq E$ с $|\Omega_\epsilon \setminus E| < \epsilon$, см. теорему III.6.6 в [10]. Т.к. f, $f_n : D \to \mathbb{C}$ – сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы класса Соболева $W^{1,1}_{loc}(D)$ и $f_n \to f$ локально равномерно, то, согласно предложению 2.5:

$$\iint\limits_{E} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dxdy \leq \iint\limits_{\Omega_\epsilon} \Phi\left(K_\mu(z)\right)\, dxdy \leq$$

$$\leq \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{E} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right)\, dxdy + \liminf_{n\to\infty} \iint\limits_{\Omega_\epsilon \setminus E} \Phi\left(K_{\mu_n}(z)\right)\, dxdy \leq$$

$$\leq M_E + M_{\Omega_\epsilon \setminus E}\,.$$

В силу абсолютной непрерывности функции M, при $\epsilon \to 0$ приходим к (9). $\Box$

1. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer, New York etc., 1973.
2. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – М.: Мир, 1969. – 135с.
3. *Maz'ya V.G., Poborchi S.V* Differentiable functions on bad dommains, Singapure–New Jersey–London–Hong Kong, World Scientific, 1997.
4. *Hencl S., Koskela P.* Regularity of the inverse of a planar Sobolev homeomorphism // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2006. – **180**, no.1. – P.75–95.
5. *Danford N., Schwartz J.T.* Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience Publishers, Inc., New York, London, 1957.
6. *Ryazanov V., Srebro U., Yakubov E.* On convergence theory for Beltrami equations // Ukrainian Math. Bull. – 2008. – **5**, no.4 – P.524–535.

7. *Рязанов В.И.* О квазиконформных отображениях с ограничениями по мере // Укр. мат. журн., 1993. – **45**, №7. – С.1009–1019.
8. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. – М.: Наука, 1993. – 424с.
9. *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. – М.: ГИФМЛ, 1993. – 272с.
10. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: ИЛ, 1949. – 494с.
11. *Kolomoitsev Iu.S., Ryazanov V.I.* Uniqueness of approximate solutions of the Beltrami equations// Proceeding of Inst. Appl. Mech. of NAS of Ukraine. – 2009. – **19**. – P.116–124.
12. *Суворов Г.Д.* Семейства плоских топологических отображений – Новосибирск: Ред.–изд. совет Сиб. отд-ния АН СССР, 1965. – 264с.
13. *Пономарев С.П.* N^{-1}–свойство отображений и условие (N) Лузина // Мат. заметки. – 1995. – **58**, №3. – P.411–418.

T.V. Lomako

The convergence theorem for Beltrami equations with restrictions of integral type on the dilatation.

This paper is devoted to the convergence theorems for regular solutions of the degenerate Beltrami equations with restrictions of integral type on the dilatation.

Keywords: *Beltrami equations, dilatation, convergence, regular solution, Sobolev classes.*

Т.В. Ломако

Теорема збіжності для рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на дилатацію.

У даній статті доведено теорему збіжності для регулярних розв'язків вироджених рівнянь Бельтрамі з обмеженнями інтегрального типу на дилатацію.

Ключові слова: *рівняння Бельтрамі, дилатація, збіжність, регулярний розв'язок, класи Соболева.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`tlomako@yandex.ru, tlomako@rambler.ru`

Получено 05.05.10