УДК 533.6.013.42

©2010. **А.Ю. Карнаух, Н.К. Дидок**

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ДНА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СОСУДА И ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

На основании подхода Л.В. Докучаева обобщена задача о собственных совместных колебаниях плоского упругого дна кругового цилиндрического сосуда и идеальной жидкости со свободной поверхностью на случай, когда сосуд имеет произвольное поперечное сечение. Получено частотное уравнение и собственные формы совместных колебаний. С позиций функционального анализа эта задача была рассмотрена в известной монографии Н.Д. Копачевского, С.Г. Крейна и Нго Зуй Кана, где была доказана ее разрешимость.

Ключевые слова: *гидроупругость, собственные колебания, жидкость, частотное уравнение, собственные формы.*

1. Постановка задачи.Рассмотрим цилиндрический сосуд произвольного поперечного сечения Ω с жесткой боковой поверхностью Σ и плоским упругим дном. Сосуд заполнен идеальной несжимаемой жидкостью плотности ρ. Упругое дно представляет собой изотропную пластинку, жестко защемленную по контуру γ, с изгибной жесткостью D и растягивающим усилием T в серединной поверхности. Предполагается, что движение жидкости является безвихревым и происходит с ограниченными скоростями. Глубина заполнения сосуда равна h. Объем, заполненный жидкостью, обозначим через V.

В линейной постановке рассмотрим задачу о совместных колебаниях упругого дна и жидкости, считая их безотрывными. Введем систему координат $Oxyz$ так, чтобы плоскость Oxy находилась в плоскости невозмущенного дна, а ось Oz была направлена противоположно вектору ускорения силы тяжести $\vec{g}$.

Уравнения движения и граничные условия данной задачи гидроупругости имеют вид [2 – 4]

$$k_0\frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}+D\Delta_2\Delta_2 W_2-T\Delta_2 W_2-\rho g W_2=\rho\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=0}-\rho\tilde{Q}, \tag{1}$$

$$gW_1=-\left(\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=h}+\tilde{Q}+gh\right), \tag{2}$$

$$\Delta\Phi=0, \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=h}=\frac{\partial W_1}{\partial t},\quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\partial W_2}{\partial t}, \tag{4}$$

$$\int\limits_{\Omega}W_1 ds=\int\limits_{\Omega}W_2 ds, \tag{5}$$

$$W_2|_\gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial W_2}{\partial \vec{\nu}}\right|_\gamma = 0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{\nu}}\right|_\Sigma = 0, \quad \nabla\Phi < \infty \quad \text{в} \quad V, \quad W_l < \infty, \quad \nabla W_l < \infty \quad (l = 1, 2). \tag{7}$$

Здесь $\vec{\nu}$ – вектор нормали к Σ, Φ – потенциал скорости жидкости; Δ и Δ_2 – трехмерный и двухмерный операторы Лапласа; W_1 – форма свободной поверхности жидкости; W_2 – прогиб днища; $k_0 = \rho_0\delta_0$; ρ_0 и δ_0 – соответственно, плотность и толщина пластинки; $\tilde{Q}$ – произвольная функция времени.

Представим функции W_l в виде суммы динамического и статического прогибов

$$W_l(x, y, t) = W_l^d(x, y, t) + W_l^{st}(x, y), \tag{8}$$

где $W_1^{st} \equiv 0$, а W_2^{st} находится из решения следующей краевой задачи

$$\begin{cases} D\Delta_2\Delta_2 W_2^{st} - T\Delta_2 W_2^{st} - \rho g W_2^{st} = -\rho g h, \\ W_2^{st}\big|_\gamma = 0, \quad \left.\dfrac{\partial W_2^{st}}{\partial \vec{\nu}}\right|_\gamma = 0. \end{cases} \tag{9}$$

В предположении достаточно большой жесткости днища, в работе [3] показана разрешимость задачи (1) – (7) и в операторной форме решена задача (9). В дальнейшем будем предполагать, что указанные в [3] условия существования решения выполнены.

2. Вывод уравнений совместных колебаний днища и свободной поверхности. Общее решение уравнения (3), удовлетворяющее первым двум условиям (7), имеет вид

$$\Phi(x, y, z, t) = a_0(t) + a_1(t)\, z + \sum_n \left[A_n(t)e^{k_n z} + B_n(t)e^{-k_n z}\right] \psi_n(x, y), \tag{10}$$

где $\psi_n(x, y)$ и k_n – соответственно, собственные функции и собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_2\psi + k\psi = 0 \quad \text{на} \quad \Omega, \\ \left.\dfrac{\partial \psi}{\partial \vec{\nu}}\right|_\gamma = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Задача (11) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма второго рода с симметричным ядром. Откуда вытекает существование счетного множества собственных чисел k_n и соответствующих им собственных функций ψ_n. Функции $\psi_n(x, y)$ вместе с константой образуют на Ω полную ортогональную систему функций.

Из граничных условий (4) с учетом представления (10) следует

$$\begin{cases} a_1 + \sum\limits_n \left(A_n e^{\varkappa_n} - B_n e^{-\varkappa_n}\right) k_n \psi_n(x,y) = \dot{W}_1^d, \\ a_1 + \sum\limits_n \left(A_n - B_n\right) k_n \psi_n(x,y) = \dot{W}_2^d. \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $\varkappa_n = k_n h \quad (n = 1, 2, ...)$.

Введем обозначения

$$W_{l0}(t) = \frac{1}{S}\int\limits_\Omega W_l^d ds, \quad W_{ln}(t) = \frac{1}{N_n^2}\int\limits_\Omega W_l^d \psi_n ds, \quad N_n^2 = \int\limits_\Omega \psi_n^2 ds. \tag{13}$$

Умножая уравнения (12) на $\psi_n(x,y)$ и интегрируя по области Ω с учетом ортогональности функций $\psi_n(x,y)$, получаем следующие равенства:

$$a_1 = \dot{W}_{10} = \dot{W}_{20}, \tag{14}$$

$$\dot{A}_n e^{\varkappa_n} - \dot{B}_n e^{-\varkappa_n} = \frac{\ddot{W}_{1n}}{k_n}, \quad \dot{A}_n - \dot{B}_n = \frac{\ddot{W}_{2n}}{k_n}. \tag{15}$$

Выполнив аналогичные преобразования в интеграле Коши-Лагранжа (2) и во втором соотношении из (4), получим

$$\dot{A}_n e^{\varkappa_n} + \dot{B}_n e^{-\varkappa_n} = gW_{1n}, \quad \dot{A}_n - \dot{B}_n = \frac{\ddot{W}_{2n}}{k_n} \quad . \tag{16}$$

Из (2), (4) и (12) имеем

$$\ddot{W}_{10} + \omega_0^2 W_{10} = \frac{\tilde{Q} - \dot{a}_0}{h}.$$

Разрешив систему (16) относительно $\dot{A}_n$ и $\dot{B}_n$, и подставив в первое из равенств (4), придем к системе уравнений

$$\ddot{W}_{1n} + \omega_n^2 W_{1n} = \frac{\ddot{W}_{2n}}{\cosh\varkappa_n}. \tag{17}$$

Величины $\omega_n^2 = gk_n \tanh\varkappa_n$ представляют собой собственные частоты колебаний жидкости в цилиндрическом сосуде с жестким дном; $\omega_0^2 = g/h$ – собственная частота колебаний столба жидкости высоты h в сосуде с упругим дном.

Подстановка найденных из соотношений (15) и (16) выражений для $\dot{A}_n$ и $\dot{B}_n$ в (2) и (1) приводит к системе уравнений для динамических прогибов

$$\begin{cases} \rho g W_1^d = -\rho h \ddot{W}_{20} + \rho \sum\limits_n \dfrac{\ddot{W}_{2n} - \ddot{W}_{1n}\cosh\varkappa_n}{k_n \sinh\varkappa_n}\psi_n(x,y) - \rho Q^*, \\ \qquad k_0 \dfrac{\partial^2 W_2^d}{\partial t^2} + D\Delta_2\Delta_2 W_2^d - T\Delta_2 W_2^d - \rho g W_2^d = \\ \qquad = \rho \sum\limits_n \dfrac{\ddot{W}_{1n} - \ddot{W}_{2n}\cosh\varkappa_n}{k_n \sinh\varkappa_n}\psi_n(x,y) + \rho Q^*, \end{cases} \tag{18}$$

где $Q^* = \dot{a}_0 - \tilde{Q}$.

Решение (18) будем искать в виде

$$W_l^d = w_l(x,y)e^{i\omega t}, \quad Q^* = Qe^{i\omega t} \quad (l = 1, 2). \tag{19}$$

Функции $w_1(x,y)$ и $w_2(x,y)$ – собственные формы колебаний свободной поверхности и днища, соответственно, Q – константа, подлежащая определению.

Введем обозначение

$$w_{l0} = \frac{1}{S}\int\limits_{\Omega} w_l ds, \quad w_{ln}(t) = \frac{1}{N_n^2}\int\limits_{\Omega} w_l \psi_n ds. \tag{20}$$

Из представления (19) и соотношений (17) следует выражение

$$w_{1n} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_n^2} \cdot \frac{w_{2n}}{\cosh \varkappa_n}, \tag{21}$$

позволящее из системы (18) получить следующую краевую задачу для форм колебаний:

$$w_1 = \frac{\omega^2}{g}\left(hw_{20} + \sum_n \frac{gw_{2n}}{(\omega^2 - gk_n \tanh \varkappa_n)\cosh \varkappa_n}\psi_n + Q\right), \tag{22}$$

$$A\left[w_2\right] = -\rho\omega^2\left(\sum_n \frac{\omega^2 \tanh \varkappa_n - gk_n}{gk_n \tanh \varkappa_n - \omega^2} \cdot \frac{w_{2n}}{k_n}\psi_n + Q\right), \tag{23}$$

$$w_2 < \infty \quad \text{на} \quad \Omega, \quad w_2|_\gamma = 0, \quad \left.\frac{\partial w_2}{\partial \vec{\nu}}\right|_\gamma = 0, \tag{24}$$

$$\int\limits_{\Omega} w_1 ds = \int\limits_{\Omega} w_2 ds. \tag{25}$$

Здесь через $A\left[w\right]$ обозначен следующий дифференциальный оператор:

$$A\left[w_2\right] = \left[D\Delta_2^2 - T\Delta_2 - \left(k_0\omega^2 + \rho g\right)\right] w_2.$$

Решение задачи (23)-(24) представляется в виде линейной комбинации линейно независимых решений w_{2i}^0 однородного уравнения $A\left[w_2\right] = 0$ и частного решения неоднородного уравнения (23) [1]. Отбросив два решения однородного уравнения, имеющие особенность на Ω, получим

$$w_2 = Aw_{21}^0 + Bw_{22}^0 + C + \sum_n K_n \psi_n.$$

Неизвестные константы C и K_n определяются из неоднородного уравнения (23), и функция w_2 имеет окончательный вид

$$w_2 = A\left(w_{21}^0 + \sum_n \tilde{\alpha}_{2n}\psi_n\right) + B\left(w_{22}^0 + \sum_n \tilde{\beta}_{2n}\psi_n\right) + \frac{\rho\omega^2}{q}Q, \tag{26}$$

где $q = k_0\omega^2 + \rho g$.

Подставив найденное для w_2 выражение (26) в уравнение (22), получим

$$w_1 = A\left(a_0 + \sum_n \alpha_n^*\psi_n\right) + B\left(b_0 + \sum_n \beta_n^*\psi_n\right) + \frac{\omega^2\left(\rho\omega^2 h + q\right)}{gq}Q. \tag{27}$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde{\alpha}_{2n} = \frac{\alpha_n^0\tau_n}{d_n - \tau_n}, \quad \tilde{\beta}_{2n} = \frac{\beta_n^0\tau_n}{d_n - \tau_n},$$

$$\tau_n = \frac{\rho\omega^2}{k_n}\cdot\frac{\omega^2\tanh\varkappa_n - gk_n}{\omega^2 - gk_n\tanh\varkappa_n}, \quad d_n = \left(Dk_n^2 + T\right)k_n^2 - q,$$

$$\alpha_n^* = \alpha_n^0\frac{d_n\omega^2}{\Delta_n}, \quad \beta_n^* = \beta_n^0\frac{d_n\omega^2}{\Delta_n}, \quad a_0 = \frac{\alpha_0^0 h\omega^2}{g}, \quad b_0 = \frac{\beta_0^0 h\omega^2}{g},$$

$$\Delta_n = \cosh\varkappa_n\left(d_n - \tau_n\right)\left(\omega^2 - gk_n\tanh\varkappa_n\right),$$

$$\alpha_n^0 = \frac{1}{N_n^2}\int_\Omega w_{21}^0\psi_n ds, \quad \beta_n^0 = \frac{1}{N_n^2}\int_\Omega w_{22}^0\psi_n ds,$$

$$\alpha_0^0 = \frac{1}{S}\int_\Omega w_{21}^0 ds, \quad \beta_0^0 = \frac{1}{S}\int_\Omega w_{22}^0 ds.$$

3. Частотное уравнение и собственные формы. Неизвестные константы A, B и Q находятся из граничных условий жесткого закрепления днища (второе и третье соотношения в (24)) и условия несжимаемости жидкости (25):

$$M\cdot\begin{pmatrix} A \\ B \\ Q \end{pmatrix} = 0, \tag{28}$$

где

$$M = \begin{pmatrix} B_{21} + \sum\limits_n \tilde{\alpha}_{2n}B_n^* & B_{22} + \sum\limits_n \tilde{\beta}_{2n}B_n^* & \dfrac{\rho\omega^2}{q} \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ \alpha_0^0 & \beta_0^0 & -\dfrac{\omega^4 h(\rho h + k_0)}{gq\left(h - \omega^2 g\right)} \end{pmatrix},$$

$$B_{2i} = \left.w_{2i}^0\right|_\gamma \ (i = 1,2), \quad B_n^* = \left.\psi_n\right|_\gamma, \quad C_{21} = \left.\frac{\partial w_{21}^0}{\partial\vec{\nu}}\right|_\gamma, \quad C_{22} = \left.\frac{\partial w_{22}^0}{\partial\vec{\nu}}\right|_\gamma,$$

$$c = \frac{h - \omega^2 g}{h}, \quad C_{33} = -\frac{\omega^4 (\rho h + k_0)}{gq}.$$

Собственными частотами совместных колебаний упругого дна и жидкости будут корни характеристического уравнения $\det M = 0$

$$\begin{vmatrix} B_{21} + \sum\limits_n \tilde{\alpha}_{2n} B_n^* & B_{22} + \sum\limits_n \tilde{\beta}_{2n} B_n^* & \rho g \left(\omega^2 g - h\right) \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ \alpha_0^0 & \beta_0^0 & \omega^2 h \left(\rho h + k_0\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Взяв $Q = 1$, найдем из (28) выражения для A, B:

$$\begin{cases} A = -\dfrac{\rho\omega^2 C_{22}/q}{C_{22}\left(B_{21} + \sum\limits_n \tilde{\alpha}_{2n} B_n^*\right) - C_{21}\left(B_{22} + \sum\limits_n \tilde{\beta}_{2n} B_n^*\right)}, \\ B = \dfrac{\rho\omega^2 C_{21}/q}{C_{22}\left(B_{21} + \sum\limits_n \tilde{\alpha}_{2n} B_n^*\right) - C_{21}\left(B_{22} + \sum\limits_n \tilde{\beta}_{2n} B_n^*\right)}. \end{cases} \tag{30}$$

Если пластина вырождается в мембрану ($D \to 0$), то уравнение (29) переходит в

$$\begin{vmatrix} B_{21} + \sum\limits_n \tilde{\alpha}_{2n} B_n^* & \rho g \left(\omega^2 g - h\right) \\ \alpha_0^0 & \omega^2 h \left(\rho h + k_0\right) \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

Из (28) и (31) следует, что в случае абсолютно жесткого дна ($D \to \infty$, или $T \to \infty$), эти частотные уравнения имеют решения

$$\omega_n^2 = g k_n \tanh \varkappa_n.$$

4. Осесимметричный случай. В случае, когда сечение полости есть круг радиуса R с центром на оси Oz, а колебания являются осесимметричными, имеем

$$\psi_n = J_0(k_n r), \quad w_{21}^0 = J_0(\lambda_1 r), \quad w_{22}^0 = I_0(\lambda_2 r),$$

где $J_0(x)$ и $I_0(x)$ – функции Бесселя действительного и мнимого аргументов, соответственно; $k_n = \mu_n / R$; μ_n – положительные корни уравнения $J_0'(\mu) = 0$;

$$\lambda_1^2 = -\frac{T}{2D} + \sqrt{\left(\frac{T}{2D}\right)^2 + \frac{q}{D}}, \quad \lambda_2^2 = \frac{T}{2D} + \sqrt{\left(\frac{T}{2D}\right)^2 + \frac{q}{D}};$$

$$\alpha_n^0 = \frac{\lambda_1 R}{(\lambda_1 R)^2 - \mu_n^2} \cdot \frac{J_1(\lambda_1 R)}{J_0^2(\mu_n)}, \quad \beta_n^0 = \frac{\lambda_2 R}{(\lambda_2 R)^2 + \mu_n^2} \cdot \frac{I_1(\lambda_2 R)}{J_0^2(\mu_n)},$$

$$\alpha_0^0 = \frac{J_1(\lambda_1 R)}{\lambda_1 R\, J_0^2(\mu_n)}, \quad \beta_0^0 = \frac{I_1(\lambda_2 R)}{\lambda_2 R\, J_0^2(\mu_n)},$$

$$B_{21} = J_0(\lambda_1 R), \quad B_{22} = I_0(\lambda_2 R), \quad B_n^* = J_0(\mu_n),$$

$$C_{21} = -\lambda_1 J_1(\lambda_1 R), \quad C_{22} = \lambda_2 I_1(\lambda_2 R).$$

Собственные формы колебаний с учетом (30) имеют вид (26) – (27). В случае большой относительной глубины заполнения (при $h/R >> 1$) выражения для w_1 и w_2 приведены в [2] и [4].

Полученные собственные частоты и собственные формы совместных колебаний позволяют рассмотреть более важную задачу о вынужденных колебаниях данной механической системы.

1. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 232 с.
2. *Карнаух А.Ю., Дидок Н.К.* Собственные формы совместных колебаний упругого дна и жидкости со свободной поверхностью. Труды ИПММ. – Т.18. – 2009. – С.78-84.
3. *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.: Наука, 1989. – 416 с.
4. *Петренко М.П.* Собственные колебания жидкости со свободной поверхностью и упругого днища цилиндрической полости // Прикл. механика. – 1969. – Т.5, №6. – С. 44-50.

A.Yu. Karnauch, N.K. Didok

Eigen oscillations of elastic bottom of a cylindrical vessel and liquid with a free surface

On the basis of L.V. Dokuchayev's approach the problem about joint eigen oscillations of flat elastic bottom of a circular cylindrical vessel and an ideal liquid with a free surface on a case when the vessel has arbitrary cross-section is generalized. The frequency equation and eigen forms of joint oscillations are received. This problem has been considered in known monography of N.D. Kopachevsky, S.G. Crein and Ngo Zyu Can from a functional analysis view, where its solubility has been proved.

Keywords: *hydroelasticity, eigen oscillations, liquid, frequency equation, eigen forms.*

А.Ю. Карнаух, Н.К. Дідок

Власні коливання пружного дна циліндричної посудини й рідини з вільною поверхнею

На основі підходу Л.В. Докучаєва узагальнено задачу про власні сумісні коливання плоского пружного дна кругової циліндричної посудини та ідеальної рідини з вільною поверхнею на випадок, коли посудина має довільний поперечний перетин. Отримано частотне рівняння і власні форми сумісних коливань. З позицій функціонального аналізу цю задачу було розглянуто у відомій монографії М.Д. Копачевського, С.Г. Крейна і Нго Зуй Кана, де було доведено її розв'язність.

Ключові слова: *гідропружність, власні коливання, рідина, частотне рівняння, власні форми.*

Донецк, Донецкий национальный университет
nick_di@rambler.ru

Получено 19.05.08