

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ПРИ ИТЕРАТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В.Ф. ГУБАРЕВ, А.О. ЖУКОВ

Проводится выявление и аналитическое обоснование общих условий идентифицируемости дискретных стационарных систем с простыми модами на основе анализа общего выражения отклика рассматриваемого класса систем с жордановой формой матрицы состояния. Доказывается, что наибольшую информативность по отношению к возбуждаемым модам имеет прямоугольный импульс либо периодическое возбуждение в зависимости от добротности колебательного контура.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории идентификации многомерных динамических систем наиболее актуальными и малоисследованными являются задачи системной идентификации в условиях ограниченной неопределенности исходных данных [3]. Для решения такого класса задач наиболее целесообразно применять итеративный подход, разработанный в [1, 2] для систем с непрерывным временем. В условиях отсутствия дополнительной априорной информации о каких-либо вероятностных характеристиках шума восстановить полную модель рассматриваемой системы в принципе невозможно. Порядок же предельной по сложности аппроксимирующей модели определяется в первую очередь уровнем возмущений и структурой входных сигналов, используемых для возбуждения системы [4, 6]. В случае применения итеративного метода принципиальной является проблема обнаружения условий, при которых могут быть восстановлены те или иные моды системы, а также их совокупности. Цель данной статьи — обоснование общих условий идентифицируемости устойчивых дискретных стационарных систем с простыми модами.

ОБЩИЙ ВИД ОТКЛИКА МНОГОМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ С ПРОСТЫМИ МОДАМИ

Для обеспечения наиболее удобного и простого вывода общих условий идентифицируемости будем работать с моделью, являющейся дискретным аналогом исходной непрерывной модели линейной стационарной системы в пространстве состояний

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + \xi, \\ y = Cx + Du + \eta. \end{cases} \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение состояния может быть представлено в интегральном виде с помощью формулы Коши

$$x(t) = e^{tA} x_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(t-\tau)A} \xi(\tau) d\tau.$$

Следовательно, отклик системы

$$y(t) = Ce^{tA} x_0 + \int_0^t Ce^{(t-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + Du(t) + w(t),$$

где результирующий шум, приведенный к выходу системы, имеет вид

$$w(t) = \int_0^t Ce^{(t-\tau)A} \xi(\tau) d\tau + \eta.$$

На основе выражения $x(t)$ осуществим временную дискретизацию исходной непрерывной во времени модели (1) при произвольном входном управляющем воздействии. Для произвольного периода дискретизации T имеем

$$\begin{aligned} x_k = x(kT) &= e^{kTA} x_0 + \int_0^{kT} e^{(kT-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + \int_0^{kT} e^{(kT-\tau)A} \xi(\tau) d\tau, \\ x_{k+1} &= e^{(k+1)TA} x_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + \int_0^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\tau)A} \xi(\tau) d\tau = \\ &= e^{TA} \left(e^{kTA} x_0 + \int_0^{kT} e^{(kT-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + \int_0^{kT} e^{(kT-\tau)A} \xi(\tau) d\tau \right) + \\ &+ \int_{kT}^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\tau)A} Bu(\tau) d\tau + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{((k+1)T-\tau)A} \xi(\tau) d\tau = \\ &= e^{TA} x_k + \int_0^T e^{\tau A} Bu((k+1)T - \tau) d\tau + \int_0^T e^{\tau A} \xi((k+1)T - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

При достаточно малом значении величины шага квантования T управляющее воздействие $u(t)$ можно аппроксимировать кусочно-постоянным сигналом, т.е.

$$u(t) \approx u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Следовательно, имеет место приближенная формула

$$\int_0^T e^{\tau A} Bu((k+1)T - \tau) d\tau \approx \left(\int_0^T e^{\tau A} B d\tau \right) u_k.$$

Поскольку здесь рассматриваются лишь системы с ненулевыми собственными значениями, то матрица A^{-1} всегда существует и имеет место формула

$$\int_0^T e^{\tau A} B d\tau = A^{-1} e^{\tau A} B \Big|_0^T = A^{-1} (e^{TA} - I) B.$$

Таким образом, дискретным аналогом исходной непрерывной модели (1) является модель

$$\begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}u_k + \bar{\xi}_k, \\ y_k = Cx_k + Du_k + \eta_k, \end{cases} \quad (2)$$

где

$$x_k = \begin{pmatrix} x_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} \\ \vdots \\ x_k^{(i)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \end{pmatrix}, \quad u_k = \begin{pmatrix} u_k^{(1)} \\ u_k^{(2)} \\ \vdots \\ u_k^{(p)} \\ \vdots \\ u_k^{(m)} \end{pmatrix}, \quad y_k = \begin{pmatrix} y_k^{(1)} \\ y_k^{(2)} \\ \vdots \\ y_k^{(q)} \\ \vdots \\ y_k^{(l)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \bar{A} = e^{TA}, \\ \bar{B} \approx A^{-1}(e^{TA} - I)B, \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar{\xi}_k = \int_0^T e^{\tau A} \xi((k+1)T - \tau) d\tau.$$

При возбуждении системы импульсом, кусочно-постоянным на интервалах дискретизации, полученная приближенная формула для вычисления матрицы \bar{B} становится аналитически точной и справедливо выражение

$$x_k = \bar{A}^k x_0 + \sum_{s=1}^k \bar{A}^{s-1} \bar{B}u_{k-s} + \sum_{s=1}^k \bar{A}^{s-1} \bar{\xi}_{k-s}.$$

Следовательно,

$$y_k = C\bar{A}^k x_0 + \sum_{s=1}^k C\bar{A}^{s-1} \bar{B}u_{k-s} + Du_k + w_k.$$

Причем

$$w_k = \sum_{s=1}^k C\bar{A}^{s-1} \bar{\xi}_{k-s} + \eta_k.$$

При этом неопределенность предполагается ограниченной по амплитуде, т. е. $|w_k| \leq w^*$.

Далее матрицу состояния A будем считать представленной в канонической форме Жордана, ибо в этом случае обеспечиваются возможности:

- легко вычислить соответствующие экспоненциалы матрицы состояния системы, а также наиболее простыми соотношениями выразить коэффициенты разложения отклика через элементы матриц B и C ;
- реализовать итеративный метод последовательного восстановления каждой моды, независимо от других мод исследуемой системы.

Используя полученный дискретный аналог непрерывной модели, найдем разложение отклика системы с простыми модами по собственным функциям оператора, характеризующего идентифицируемую систему.

Для системы с n простыми действительными собственными числами, очевидно, имеют место следующие формулы для модели с непрерывным временем:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ln} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{l1} & d_{l2} & \dots & d_{lm} \end{pmatrix}.$$

Из формул (3) следует, что в дискретном времени

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} e^{T\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{T\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{T\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. } \bar{\lambda}_i = e^{T\lambda_i},$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \frac{e^{T\lambda_1} - 1}{\lambda_1} & b_{12} \frac{e^{T\lambda_1} - 1}{\lambda_1} & \dots & b_{1m} \frac{e^{T\lambda_1} - 1}{\lambda_1} \\ b_{21} \frac{e^{T\lambda_2} - 1}{\lambda_2} & b_{22} \frac{e^{T\lambda_2} - 1}{\lambda_2} & \dots & b_{2m} \frac{e^{T\lambda_2} - 1}{\lambda_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} \frac{e^{T\lambda_n} - 1}{\lambda_n} & b_{n2} \frac{e^{T\lambda_n} - 1}{\lambda_n} & \dots & b_{nm} \frac{e^{T\lambda_n} - 1}{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \text{т.е. } \bar{b}_{ij} = b_{ij} \frac{e^{T\lambda_i} - 1}{\lambda_i},$$

откуда

$$x_k = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1^k x_0^{(1)} + \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_1^{s-1} \sum_{p=1}^m \bar{b}_{1p} u_{k-s}^{(p)} \\ \bar{\lambda}_2^k x_0^{(2)} + \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_2^{s-1} \sum_{p=1}^m \bar{b}_{2p} u_{k-s}^{(p)} \\ \vdots \\ \bar{\lambda}_n^k x_0^{(n)} + \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_n^{s-1} \sum_{p=1}^m \bar{b}_{np} u_{k-s}^{(p)} \end{pmatrix},$$

$$y_k = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} \bar{\lambda}_i^k x_0^{(i)} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^m c_{1i} \bar{b}_{ip} \bar{\lambda}_i^{s-1} u_{k-s}^{(p)} + \sum_{p=1}^m d_{1p} u_k^{(p)} \\ \sum_{i=1}^n c_{2i} \bar{\lambda}_i^k x_0^{(i)} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^m c_{2i} \bar{b}_{ip} \bar{\lambda}_i^{s-1} u_{k-s}^{(p)} + \sum_{p=1}^m d_{2p} u_k^{(p)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{li} \bar{\lambda}_i^k x_0^{(i)} + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k \sum_{p=1}^m c_{li} \bar{b}_{ip} \bar{\lambda}_i^{s-1} u_{k-s}^{(p)} + \sum_{p=1}^m d_{lp} u_k^{(p)} \end{pmatrix}.$$

С целью упрощения дальнейшего изложения положим $x_0 = 0$ и $D = 0$. Допустим, что возбуждение идентифицируемой системы осуществляется лишь по ее p -му входу, тогда как остальные входы тождественно равны нулю. В этом случае приведенные выше выражения вектора состояния системы и ее отклика примут следующий вид:

$$x_k = \begin{pmatrix} \bar{b}_{1p} \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_1^{s-1} u_{k-s}^{(p)} \\ \bar{b}_{2p} \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_2^{s-1} u_{k-s}^{(p)} \\ \vdots \\ \bar{b}_{np} \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_n^{s-1} u_{k-s}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{1p} \frac{e^{T\lambda_1} - 1}{\lambda_1} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_1} u_{k-s}^{(p)} \\ b_{2p} \frac{e^{T\lambda_2} - 1}{\lambda_2} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_2} u_{k-s}^{(p)} \\ \vdots \\ b_{np} \frac{e^{T\lambda_n} - 1}{\lambda_n} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_n} u_{k-s}^{(p)} \end{pmatrix},$$

$$y_k = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} \bar{b}_{ip} \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_i^{s-1} u_{k-s}^{(p)} \\ \sum_{i=1}^n c_{2i} \bar{b}_{ip} \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_i^{s-1} u_{k-s}^{(p)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{li} \bar{b}_{ip} \sum_{s=1}^k \bar{\lambda}_i^{s-1} u_{k-s}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n c_{1i} b_{ip} \frac{e^{T\lambda_i} - 1}{\lambda_i} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} \\ \sum_{i=1}^n c_{2i} b_{ip} \frac{e^{T\lambda_i} - 1}{\lambda_i} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n c_{li} b_{ip} \frac{e^{T\lambda_i} - 1}{\lambda_i} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Итак, при возбуждении лишь p -го входа идентифицируемой системы и нулевых значениях остальных входов, на каждом из ее q -х выходов будем наблюдать некоторый сигнал, детерминированная часть которого определяется выражением

$$y_k^{(q)} = \sum_{i=1}^n c_{qi} b_{ip} \frac{e^{T\lambda_i} - 1}{\lambda_i} \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)}, \quad (q = \overline{1, l}). \quad (4)$$

Как видно из полученной формулы, при возбуждении лишь p -го входа системы в структуру q -го выхода входят элементы q -й вектор-строки

$$c_{q\cdot} = (c_{q1} c_{q2} \dots c_{qn}) \text{ матрицы } C \text{ и } p\text{-го вектор-столбца } b_{\cdot p} = \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{2p} \\ \vdots \\ b_{np} \end{pmatrix} \text{ матрицы } B.$$

Для системы с n парами простых комплексно-сопряженных собственных чисел $(\lambda_1, \lambda_1^*), \dots, (\lambda_n, \lambda_n^*)$ имеем

$$b_{:,p} = \begin{pmatrix} b_{1p} \\ b_{1p}^* \\ \vdots \\ b_{np} \\ b_{np}^* \end{pmatrix}, \quad c_{q,:} = (c_{q1} \ C_{q1}^* \ \dots \ c_{qn} \ C_{qn}^*).$$

Введем следующие обозначения: $z_i = c_{qi} b_{ip} \frac{e^{\tau \lambda_i} - 1}{\lambda_i}, \forall i = \overline{1, n}$,

$$\begin{cases} \operatorname{Re} z_i = z_i^{(1)} \\ \operatorname{Im} z_i = z_i^{(2)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \lambda_i = \alpha_i \\ \operatorname{Im} \lambda_i = \beta_i \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{Re} b_{ip} = b_{ip}^{(1)} \\ \operatorname{Im} b_{ip} = b_{ip}^{(2)} \end{cases}, \quad \begin{cases} \operatorname{Re} c_{qi} = c_{qi}^{(1)} \\ \operatorname{Im} c_{qi} = c_{qi}^{(2)} \end{cases}.$$

Исходя из формулы (4),

$$\begin{aligned} y_k^{(q)} &= \sum_{i=1}^n z_i \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} + \sum_{i=1}^n z_i^* \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i^*} u_{k-s}^{(p)} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k \operatorname{Re} z_i e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} = \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\alpha_i} \left(z_i^{(1)} \cos((s-1)T\beta_i) - z_i^{(2)} \sin((s-1)T\beta_i) \right) u_{k-s}^{(p)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{cases} z_i^{(1)} = \operatorname{Re} z_i = \frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \left(e^{T\alpha_i} (\gamma_i^{(1)} \cos T\beta_i - \gamma_i^{(2)} \sin T\beta_i) - \gamma_i^{(1)} \right), \\ z_i^{(2)} = \operatorname{Im} z_i = \frac{1}{\alpha_i^2 + \beta_i^2} \left(e^{T\alpha_i} (\gamma_i^{(1)} \sin T\beta_i + \gamma_i^{(2)} \cos T\beta_i) - \gamma_i^{(2)} \right). \end{cases}$$

При этом

$$\begin{cases} \gamma_i^{(1)} = \operatorname{Re} \lambda_i^* c_{qi} b_{ip} = \alpha_i (c_{qi}^{(1)} b_{ip}^{(1)} - c_{qi}^{(2)} b_{ip}^{(2)}) + \beta_i (c_{qi}^{(2)} b_{ip}^{(1)} - c_{qi}^{(1)} b_{ip}^{(2)}), \\ \gamma_i^{(2)} = \operatorname{Im} \lambda_i^* c_{qi} b_{ip} = \alpha_i (c_{qi}^{(2)} b_{ip}^{(1)} - c_{qi}^{(1)} b_{ip}^{(2)}) + \beta_i (c_{qi}^{(1)} b_{ip}^{(1)} - c_{qi}^{(2)} b_{ip}^{(2)}). \end{cases}$$

$$\sqrt{(\gamma_i^{(1)})^2 + (\gamma_i^{(2)})^2} = |\lambda_i| |c_{qi}| |b_{ip}|.$$

Введя для каждой пары комплексно-сопряженных мод (λ_i, λ_i^*) вспомогательный параметр φ_i , удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{cases} \cos \varphi_i = \frac{\gamma_i^{(1)}}{\sqrt{(\gamma_i^{(1)})^2 + (\gamma_i^{(2)})^2}}, \\ \sin \varphi_i = \frac{\gamma_i^{(2)}}{\sqrt{(\gamma_i^{(1)})^2 + (\gamma_i^{(2)})^2}}, \end{cases}$$

получаем

$$\begin{cases} z_i^{(1)} = \frac{|c_{qi}||b_{ip}|}{|\lambda_i|} \left(e^{T\alpha_i} \cos(\varphi_i + T\beta_i) - \cos \varphi_i \right) \\ z_i^{(2)} = \frac{|c_{qi}||b_{ip}|}{|\lambda_i|} \left(e^{T\alpha_i} \sin(\varphi_i + T\beta_i) - \sin \varphi_i \right) \end{cases}$$

Исходя из приведенных выше формул, окончательно запишем следующее выражение отклика системы с простыми комплексно-сопряженными модами:

$$y_k^{(q)} = 2 \sum_{i=1}^n u^* \frac{|c_{qi}||b_{ip}|}{|\lambda_i|} \times \sum_{s=1}^k \left(e^{sT\alpha_i} \cos(\varphi_i + sT\beta_i) - e^{(s-1)T\alpha_i} \cos(\varphi_i + (s-1)T\beta_i) \right) \bar{u}_{k-s}^{(p)}, \quad (5)$$

где u^* — ограничение на максимально допустимую абсолютную величину управляющего воздействия $|u_k^{(p)}| \leq u^*$, которое часто возникает в практических задачах и обусловлено имеющимися в распоряжении экспериментатора ограниченными ресурсными возможностями по управлению, а также потенциальной возможностью возникновения нелинейных эффектов в системе вследствие нарушения допустимого порога по управлению, что приводит к невозможности описания динамики системы линейной аппроксимирующей моделью

$$\bar{u}_k^{(p)} = \frac{u_k^{(p)}}{u^*} \in [-1, 1].$$

Заметим, что формула (4) отклика системы с простыми действительными модами при $\beta_i = 0$, $\cos \varphi_i = \pm 1$ и отсутствии числового коэффициента 2 может рассматриваться в качестве частного случая формулы (5).

УСЛОВИЯ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ОТДЕЛЬНО РАССМАТРИВАЕМОЙ ПАРЫ КОМПЛЕКСНО-СОПРЯЖЕННЫХ МОД

Исследуем необходимые условия идентифицируемости i -й пары комплексно-сопряженных мод.

$$y_{i,k}^{(q)} = 2u^* \frac{|b_i||c_i|}{|\lambda_i|} \sum_{s=1}^k \left(e^{sT\alpha_i} \cos(\varphi_i + sT\beta_i) - e^{(s-1)T\alpha_i} \cos(\varphi_i + (s-1)T\beta_i) \right) \bar{u}_{k-s}^{(p)}.$$

При наличии ограниченной по абсолютной величине неопределенности и отсутствии дополнительной априорной информации о каких-либо ее вероятностных характеристиках полезными для идентификации являются, очевидно, лишь те участки суммарного отклика системы, в которых детерминированная часть сигнала по своей абсолютной величине существенно превосходит максимально допустимую величину неопределенности w^* . По-

этому слишком малая величина коэффициента $g = u^* \frac{|c_{qi}| |b_{ip}|}{|\lambda_i|}$, при которой отклик по своей абсолютной величине становится сравнимым с величиной шума w^* , приведет к физической невозможности восстановления i -й моды на q -м выходе.

Таким образом, необходимыми условиями идентифицируемости моды являются ее управляемость ($|b_{ip}| \neq 0$) и наблюдаемость ($|c_{qi}| \neq 0$).

Заметим, что мода, ненаблюдаемая на одном выходе, может оказаться наблюдаемой на другом.

Для системы с простыми действительными модами необходимые условия идентифицируемости аналогичны рассмотренному выше случаю комплексно-сопряженных мод.

Кроме того, идентифицируемость моды потенциально может быть улучшена за счет выбора информативного по отношению к ней управляющего воздействия, при котором отклик данной моды в суммарном отклике рассматриваемой системы существенно превысит по абсолютной величине максимально допустимый уровень неопределенности w^* .

В сущности, задача выбора информативного возбуждающего воздействия при ограничениях $|\bar{u}_k^{(p)}| \leq 1$ является задачей линейного программирования. Следовательно, максимум $|y_{ik}^{(q)}|$ может достигаться лишь на множестве угловых точек допустимого гиперкуба, когда выполняются условия

$$\forall s = \overline{1, k} \quad |u_s| = u^* .$$

Неравенство треугольника для выражения $y_{i,k}$ показывает, что наиболее благоприятным для максимизации отклика по абсолютной величине является лишь тот случай, когда последовательность косинусов, а значит, и управлений, являются знакопередающимися. Поскольку аргументы косинусов соседних слагаемых отличаются друг от друга на величину $T\beta_i$, для обеспечения чередования знаков косинусов период дискретизации T целесообразно выбирать из условия $T\beta_i = \pi$, т. е. $T = \frac{\pi}{\beta_i}$.

При этом в случае использования периодического знакопередающегося возбуждения достигается следующее абсолютное значение отклика:

$$Y_1 = |y_{i,k}^*| = 2u^* \frac{|b_i| |c_i|}{|\lambda_i|} |\cos \varphi_i| \left(\exp\left(\pi \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) + 1 \right) \frac{\left| \exp\left(k\pi \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) - 1 \right|}{\left| \exp\left(\pi \frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) - 1 \right|} .$$

При использовании же прямоугольного импульса достигается меньшее абсолютное значение отклика

$$Y_2 = 2u^* \frac{|b_i||c_i|}{|\lambda_i|} \left| \cos \varphi_i \right| \left| \exp \left(k\pi \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right) - 1 \right|, \quad Y_2 < Y_1.$$

Учитывая отрицательность величины α_i очевидно, что при плохой добротности колебаний, когда $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \gg 1$, получаем $Y_1 \approx Y_2$. Следовательно, применение периодического знакопеременного возбуждения не дает существенного выигрыша при низкой добротности колебаний.

В случае же действительной моды, когда $\beta_i = 0$ и $|\cos \varphi_i| = 1$, выбор величины T не влияет на знаки слагаемых отклика, и, следовательно, в случае чисто экспоненциальных систем наиболее информативным является прямоугольный импульс максимально допустимой в условиях идентификационного эксперимента амплитуды u^* и длительности k .

$$\begin{cases} (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{k-1}^*) = (u^*, u^*, \dots, u^*), \\ (u_0^*, u_1^*, \dots, u_{k-1}^*) = (-u^*, -u^*, \dots, -u^*). \end{cases}$$

Достижимое при этом максимальное значение модуля отклика определяется, очевидно, формулой

$$|y_{i,k}^*| = u^* \frac{|b_i||c_i|}{|\lambda_i|} \left| e^{kT\lambda_i} - 1 \right| \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} u^* \frac{|b_i||c_i|}{|\lambda_i|}.$$

Отметим, что хотя в случае высокой добротности колебаний наиболее информативным является периодическое возбуждение, на практике, тем не менее, использование его невозможно, ибо оно предполагает знание неизвестного априори параметра β_i . Таким образом, в любых случаях идентификационный эксперимент целесообразно начинать с применения прямоугольного импульса максимально возможной амплитуды и длительности. Далее, по мере уточнения оценок неизвестных параметров может применяться периодическое знакопеременное возбуждение.

Перейдем к исследованию проблемы идентифицируемости совокупности мод. Необходимость ее исследования обусловлена тем, что, даже если некоторые отдельно рассматриваемые моды исследуемой системы и удовлетворяют установленным выше условиям идентифицируемости, в общем отклике системы за счет его аддитивной структуры, моды с близкими собственными числами могут стать трудно различимыми и рассматриваться как одна мода.

В самом деле, сумма двух пар комплексно-сопряженных мод с близкими собственными числами представима в следующем виде:

$$\begin{aligned} y_k^q = & \left(z_1 \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} + z_1^* \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i^*} u_{k-s}^{(p)} \right) + \\ & + \left(z_2 \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T(\lambda_i + \Delta\lambda_i)} u_{k-s}^{(p)} + z_2^* \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T(\lambda_i + \Delta\lambda_i)^*} u_{k-s}^{(p)} \right) = \end{aligned}$$

$$= \left((z_1 + z_2) \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i} u_{k-s}^{(p)} + (z_1^* + z_2^*) \sum_{s=1}^k e^{(s-1)T\lambda_i^*} u_{k-s}^{(p)} \right) + 2 \sum_{s=1}^k (s-1)T \operatorname{Re} \left((\Delta\lambda_i) z_2 e^{(s-1)T\lambda_i} \left(1 + \frac{1}{2!} (s-1)T\Delta\lambda_i + \dots \right) \right) u_{k-s}^{(p)}.$$

Как видно из приведенного выражения, отклик двух пар комплексно-сопряженных мод представим в виде суммы двух сигналов. Первый сигнал соответствует паре мод (λ_i, λ_i^*) , а второй — приращениям собственных чисел и при малом значении величины $|\Delta\lambda_i|$ становится не различимым на фоне шума.

ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИТЕРАТИВНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В [1, 2] разработаны и обоснованы основные процедуры метода итеративной идентификации многомерных стационарных линейных систем с непрерывным временем. Основная идея предложенного метода состоит в восстановлении аппроксимирующей модели через последовательность субмоделей, составляющих отдельные части искомой модели. Метод итеративной идентификации предполагает восстановление матрицы A в блочно-диагональной жордановой форме. Если возбуждающие воздействия подаются отдельно на каждый r -й вход при нулевых значениях остальных, то отклик системы на m -м выходе можно представить в виде уравнения

$$y_m^{(\gamma)}(t) = \sum_{p=1}^P \sum_{j=1}^{n_p} \int_0^t \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} \left(f_{mpj}^{(r1)} \cos \beta_p(t-\tau) + f_{mpj}^{(r2)} \sin \beta_p(t-\tau) \right) e^{\alpha_p(t-\tau)} u_r(\tau) d\tau + \sum_{q=1}^Q \sum_{q=1}^{n_{p+q}} \frac{g_{mpj}^{(r)}}{(j-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{j-1} e^{\gamma_q(t-\tau)} u_r(\tau) d\tau + d_{mr} u_r(t) + w_m(t).$$

В данном выражении первый интеграл соответствует модам системы с комплексно-сопряженными собственными значениями $\alpha_p \pm i\beta_p$ кратности n_p , а второй — определяет моды с действительными собственными числами γ_q кратности n_{p+q} .

Процедура идентификации осуществляется в два этапа.

На первом этапе по экспериментальным данным следует найти приближенную точечную или множественную оценку первой группы параметров — собственных значений субмодели $(\alpha_p, \beta_p, \gamma_p)$ и их кратностей (n_p, n_{p+q}) . Эти параметры полностью определяют жорданову форму матрицы A . При этом каждое из $m \times r$ уравнений для $y_m^{(r)}(t)$ можно использовать независимо на основе данных последовательности экспериментов, в которых возбуждение системы производится отдельно на каждом входе при

нулевом сигнале на остальных. Поскольку параметры первой группы являются общими для всех уравнений, то могут применяться различные процедуры усреднения как при приближенной точечной, так и при множественной их оценке.

На втором этапе осуществляется восстановление второй группы параметров — коэффициентов разложения $f_{mpj}^{(r1)}, f_{mpj}^{(r2)}, g_{mpj}^{(r)}$ по собственным функциям ядра системы, а также коэффициента d_{mr} . Зная эти коэффициенты, с помощью легко устанавливаемых уравнений связи нетрудно вычислить матрицы B, C, D исходной модели, т.е. установить конкретную модель в пространстве состояний.

Благодаря жордановой форме, каждая клетка которой определяет свои временные характеристики объекта, появляется возможность независимого восстановления отдельных частей модели. Для конкретного объекта субмодель может содержать одну или несколько жордановых клеток. При простых собственных значениях субмодель может быть одномодовой или содержать кластер мод с близкими собственными характеристиками переходного процесса. Размерности субмоделей могут быть различными. Допускается также присутствие одних и тех же мод в разных субмоделях. Определение параметров субмодели означает идентификацию соответствующих блоков матриц A, B, C , а также отдельных элементов матрицы D .

Таким образом, из последовательности субмоделей можно восстановить модель, предельная сложность которой определяется средним уровнем возмущений и структурой входных сигналов, используемых для возбуждения системы. Подчеркнем, что итеративный подход позволяет получать регуляризованные решения задач идентификации, согласованные с точностью исходных данных. Это особенно важно при идентификации многомерной системы по приближенным данным, когда проявляется некорректность, существенно влияющая на точность оценивания параметров модели.

ПРИМЕНЕНИЕ 4SID-МЕТОДА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ СУБМОДЕЛИ И ЕЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Для выполнения первого этапа метода итеративной идентификации, т.е. определения размерности субмодели и ее собственных значений, можно воспользоваться подходом, широко применяемым в методах подпространства состояний (4SID-methods) [7], которые базируются на классической теории реализаций [5]. Суть 4SID-метода сводится к следующему.

Введем обозначения.

$$u(k) = \begin{pmatrix} u_k^T \\ u_{k+1}^T \\ \vdots \\ u_{k+\alpha-1}^T \end{pmatrix}, \quad y(k) = \begin{pmatrix} y_k^T \\ y_{k+1}^T \\ \vdots \\ y_{k+\alpha-1}^T \end{pmatrix},$$

где k — дискретное время; α — произвольное целое число, превышающее предполагаемый порядок системы n .

Тогда

$$y(k) = \Gamma_\alpha x_k + \Phi_\alpha u(k),$$

где Γ_α — матрица наблюдаемости

$$\Gamma_\alpha = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\alpha-1} \end{pmatrix};$$

Φ_α — нижняя блочно-треугольная теплицева матрица импульсных реакций системы

$$\Phi_\alpha = \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^{\alpha-2}B & \dots & CB & D \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что сигналы u_k и y_k при $k = \overline{1, N + \alpha - 1}$ могут быть описаны матричным уравнением

$$Y = \Gamma_\alpha X + \Phi_\alpha U,$$

где блочные ганкелевы матрицы входов и выходов имеют вид

$$U = (u(1) \ u(2) \ \dots \ u(N)),$$

$$Y = (y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N)),$$

и траектория состояния системы

$$X = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N).$$

Введем матрицу ортогонального проектирования на нуль-пространство матрицы U .

$$\Pi_{U^T}^\perp = I - U^T (UU^T)^{-1} U.$$

Поскольку $U \Pi_{U^T}^\perp = 0$, то $\hat{Y} \stackrel{\text{def}}{=} Y \Pi_{U^T}^\perp = \Gamma_\alpha X \Pi_{U^T}^\perp$, т.е., применив к матрице выходов Y преобразование ортогонального проектирования $\Pi_{U^T}^\perp$, мы фактически удаляем часть выхода, не связанную с состоянием системы.

Далее 4SID-метод предполагает использование сингулярного разложения (SVD-преобразования) матрицы \hat{Y} .

$$\hat{Y} = QSV^T,$$

где Q и V — ортогональные матрицы; S — диагональная матрица с невозрастающим порядком сингулярных чисел на диагонали.

Матрицу S следует рассматривать как блочно диагональную матрицу вида

$$S = \begin{pmatrix} S_s & 0 \\ 0 & S_n \end{pmatrix}$$

где матрица S_s имеет на своей диагонали существенные сингулярные числа, т.е. числа, соответствующие модам субмодели. Матрица S_n представляет моды, не вошедшие в субмодель, а также имеющиеся в системе шумы.

Соответствующее блочное разбиение выполняется также для матриц Q и V :

$$Q = (Q_s \ Q_n) \quad V = (V_s \ V_n)$$

В качестве критерия указанного разбиения используется, как правило, свойство значительного превосходства существенных сингулярных чисел над шумовыми.

Выполним разложение матрицы \hat{Y}_s в произведение двух любых полноранговых матриц, например,

$$\hat{Y}_s = (Q_s \ S_s^{1/2})(S_s^{1/2} \ V_s^T)$$

Поскольку в соответствии с теорией реализации любое разложение матрицы \hat{Y}_s в произведение двух полноранговых матриц первым множителем представляет матрицу наблюдаемости, а вторым — матрицу X для некоторого базиса пространства состояний, то в качестве оценки матрицы Γ можно взять выражение

$$\hat{\Gamma} = Q_s \ S_s^{1/2}$$

Из матрицы наблюдаемости легко получить систему уравнений для определения матрицы субмодели A_s

$$\hat{\Gamma}_{1:j-1} \hat{A}_s = \Gamma_{2:j}$$

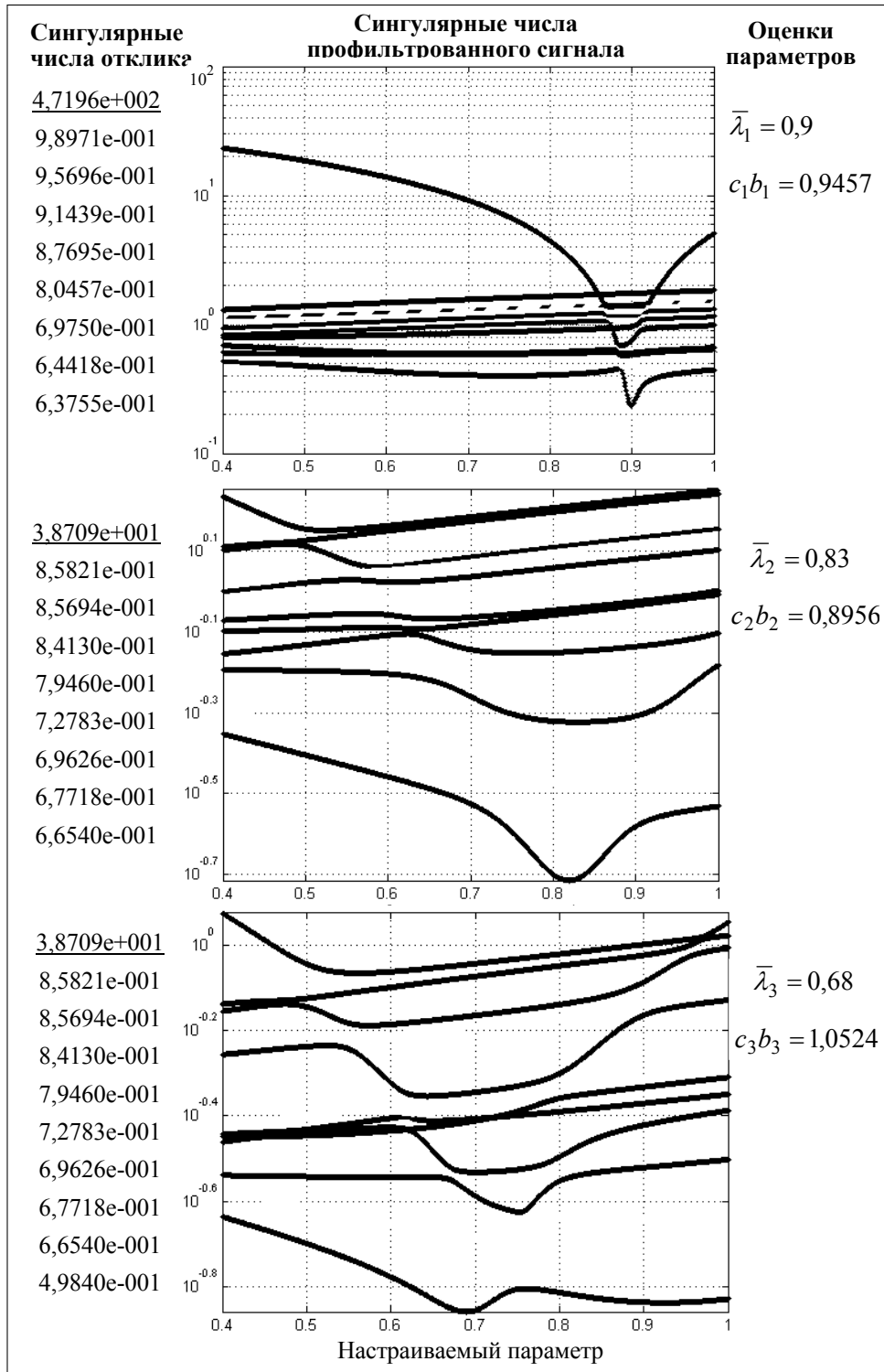
где $\hat{\Gamma}_{2:j}$ получено из $\hat{\Gamma}$ исключением первого блока, соответствующего матрице C ; матрица $\hat{\Gamma}_{1:j-1}$ формируется аналогично из $\hat{\Gamma}$ путем исключения последнего блока.

Пример. Пусть идентифицируемая система содержит три моды, характеризующиеся следующими параметрами:

Спектр системы с непрерывным временем	Спектр системы с дискретным временем	b_i	c_i
$\lambda_1 = -0,0953$	$\bar{\lambda}_1 = 0,9091$	1	1
$\lambda_2 = -0,1906$	$\bar{\lambda}_2 = 0,8264$	1	1
$\lambda_3 = -0,3812$	$\bar{\lambda}_3 = 0,6830$	1	1

Результат работы алгоритма при уровне шума $\varepsilon = 0,01$ приведен на рисунке.

Отметим, что применение преобразования ортогонального проектирования к матрице выходов осуществляет выделение переходного процесса из общего сигнала системы. Верификация данной гипотезы сводится к проверке возможности переупорядочивания строк и столбцов матрицы $R = Y \Pi_U^\perp$ таким образом, чтобы обеспечить монотонное убывание модулей элементов данной матрицы по строкам и столбцам.



Ход работы алгоритма итеративной идентификации

С данной целью проведем вычислительный эксперимент для системы с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0,1353 & 0 \\ 0 & 0,0498 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \bar{b} = \begin{pmatrix} 1,7293 \\ 1,5837 \end{pmatrix} c = (2 \ 1).$$

Пусть, например, ганкелева матрица управлений имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} -0,4571 & -0,4953 & 0,7515 & 0,4746 & -0,7270 & -0,9765 & 0,7878 & -0,6017 \\ -0,4953 & 0,7515 & 0,4746 & -0,7270 & -0,9765 & 0,7878 & -0,6017 & -0,4026 \\ 0,7515 & 0,4746 & -0,7270 & -0,9765 & 0,7878 & -0,6017 & -0,4026 & 0,3229 \\ 0,4746 & -0,7270 & -0,9765 & 0,7878 & -0,6017 & -0,4026 & 0,3229 & -0,4312 \\ -0,7270 & -0,9765 & 0,7878 & -0,6017 & -0,4026 & 0,3229 & -0,4312 & -0,0616 \end{pmatrix}$$

Тогда ганкелева матрица реакций системы примет вид

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -2,3049 & -2,7477 & 3,4876 & 2,7668 & -3,3603 & -5,2835 & 3,3943 \\ -2,3049 & -2,7477 & 3,4876 & 2,7668 & -3,3603 & -5,2835 & 3,3943 & -2,6746 \\ -2,7477 & 3,4876 & 2,7668 & -3,3603 & -5,2835 & 3,3943 & -2,6746 & -2,3152 \\ 3,4876 & 2,7668 & -3,3603 & -5,2835 & 3,3943 & -2,6746 & -2,3152 & 1,3731 \\ 2,7668 & -3,3603 & -5,2835 & 3,3943 & -2,6746 & -2,3152 & 1,3731 & -2,0292 \end{pmatrix}$$

R =

	4	6	8	2	7	3	1	5
1	-1,8561	0,8711	-0,0535	2,9621	-0,4436	-2,8029	-4,9781	1,5296
2	-0,2026	0,0941	-0,0064	0,3211	-0,0426	-0,3024	-0,5403	0,1566
3	-0,0250	0,0115	-0,0008	0,0395	-0,0049	-0,0371	-0,0665	0,0187
4	-0,0033	0,0015	-0,0001	0,0051	-0,0006	-0,0048	-0,0087	0,0024
5	-0,0004	0,0002	-0,0000	0,0007	-0,0001	-0,0006	-0,0012	0,0003

Или

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-4,9781	2,9621	-2,8029	-1,8561	1,5296	0,8711	-0,4436	-0,0535
2	-0,5403	0,3211	-0,3024	-0,2026	0,1566	0,0941	-0,0426	-0,0064
3	-0,0665	0,0395	-0,0371	-0,0250	0,0187	0,0115	-0,0049	-0,0008
4	-0,0087	0,0051	-0,0048	-0,0033	0,0024	0,0015	-0,0006	-0,0001
5	-0,0012	0,0007	-0,0006	-0,0004	0,0003	0,0002	-0,0001	-0,0000

Полученные результаты убедительно свидетельствуют в пользу того, что для возбуждения системы нецелесообразно применять управляющее воздействие в виде случайной последовательности, ибо после применения преобразования ортогонального проектирования на ядро матрицы U из общего сигнала системы выделяется сигнал, похожий на переходный процесс. Поэтому вместо применения случайного возбуждения значительно проще выделять переходный процесс путем возбуждения системы прямоугольным импульсом.

ВЫВОДЫ

1. В результате анализа выражения отклика дискретной линейной стационарной динамической системы с простыми модами, представленного в виде разложения по фундаментальной системе собственных функций ее яд-

ра, установлены общие условия идентифицируемости как для отдельно взятых мод, так и для совокупности нескольких мод исследуемого класса систем.

2. Показано, что самой плохой идентифицируемостью обладают моды, соответствующие малым абсолютным значениям коэффициентов управляемости и наблюдаемости, большим абсолютным значениям собственных чисел, а также моды с близкими собственными значениями и близкими по модулю, но противоположными по знаку коэффициентами разложения.

3. Доказано, что для возбуждения системы в качестве входного управляющего воздействия наиболее целесообразно применять не случайную последовательность типа белого шума, используемую в традиционных методах идентификации, а прямоугольный импульс для чисто экспоненциальных систем или осциллирующих систем с плохой добротностью колебаний, либо периодическое знакопеременное возбуждение для осциллирующих систем с хорошей добротностью колебаний.

4. Установлено, что жорданова структура матрицы A позволяет выделять переходный процесс без применения преобразования ортогонального проектирования, используемого в 4SID-методе, путем возбуждения системы прямоугольным импульсом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Губарев В.Ф., Тигунов П.А. Об особенностях идентификации многомерных непрерывных систем по данным с ограниченной неопределенностью // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 1–2. — С. 231–246.
2. Губарев В.Ф. Метод итеративной идентификации многомерных систем по неточным данным. Часть 1. Теоретические основы // Проблемы управления и информатики. — 2006. — № 5. — С. 16–31.
3. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. — Киев: Наук.думка, 2006. — 264 с.
4. Кунцевич В.М. О точности построения аппроксимирующих моделей при ограниченных помехах измерений // Автоматика и телемеханика. — 2005. — № 5. — С. 125–133.
5. Kailath T. Linear Systems. — N.J.: Prentice-Hall, 1980. — 270 p.
6. Ninness B., Goodwin G. Estimation of the model quality //Automatica. — 1995. — **31**, № 12. — P. 1771–1797.
7. Van Overschee P., De Moor B. Subspace identification for linear systems. — Dordrecht (Netherlands): Kluwer Academic Publishers, 1996. — 157 p.

Поступила 18.07.2007