УДК 517.988.6

©2010. **Э.Л. Газиев**

ЗАДАЧА СТАТИКИ ГИДРОСИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ–БАРОТРОПНЫЙ ГАЗ" В УСЛОВИЯХ, БЛИЗКИХ К НЕВЕСОМОСТИ

Для гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, построены математические модели, основанные на условиях гидростатики и вариационном принципе стационарности потенциальной энергии. В осесимметричном случае для исследуемой краевой задачи получены асимптотические разложения решения в окрестности особой точки, предложены алгоритмы и вычислительные схемы решения, приведены численные и графические решения для случаев произвольной осесимметричной поверхности, цилиндра и конуса.

Ключевые слова: *гидросистема, баротропный газ, математическая модель, вариационный принцип, потенциальная энергия, асимптотическое разложение, вычислительная схема.*

Введение. Задача об устойчивых равновесных поверхностях жидкости в условиях, близких к невесомости, возникает при движении свободно летящего космического аппарата, поступательное ускорение которого обусловлено гравитационными силами, при котором наряду с поверхностными силами важную роль играют и массовые силы. Общий подход к решению подобных задач был предложен в работах В.Г. Бабского, Н.Д. Копачевского, А.Д. Мышкиса, Л.А. Слобожанина, А.Д. Тюпцова [1-2]. Вопрос о форме равновесной поверхности границы раздела в задачах гидростатики для системы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, исследован недостаточно и является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о равновесной поверхности жидкости в твердом сосуде в гидросистеме "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости. Баротропный газ характеризуется зависимостью плотности от давления

$$P = P(\rho); \quad \nabla P = \left(\frac{dP}{d\rho}\right) \cdot \nabla \rho,$$

где P – давление в газе, ρ – плотность газа, а величина $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)$ равна a^2 – скорости звука в газе.

Пусть массовые силы являются гравитационными или инерционными, обусловленными равноускоренным поступательным движением сосуда; несжимаемая и однородная жидкость объемной плотности ρ_1 и баротропный газ объемной плотности ρ_2 полностью заполняют сосуд и занимают в нем связные области Ω_1 и Ω_2; материал стенки сосуда – однородный, а его поверхность – недеформируемая и гладкая. Введем систему координат, неподвижно связанную с сосудом. Поверхности контакта жидкости и газа между собой и со стенкой сосуда обозначим соответственно Γ, S_1, S_2, а коэффициенты поверхностного натяжения на этих поверхностях – соответственно σ, σ_1, σ_2. Пусть γ – линия контакта сред; $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{e}$ – единичные векторы

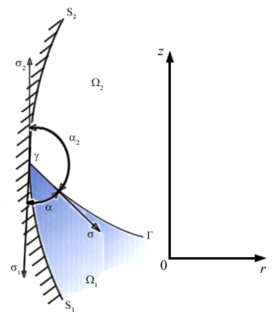

Рис. 1. Угол смачивания на границе сосуда и жидкости

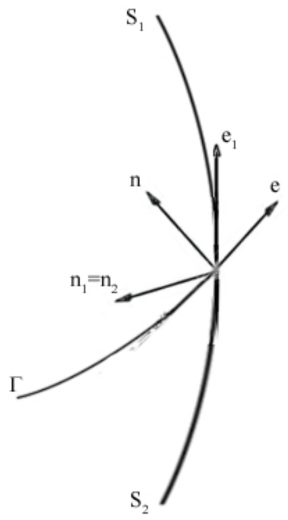

Рис. 2. Векторы нормали на линии смачивания

нормалей к Γ (в направлении из Ω_1) и к γ в касательной к Γ плоскости (в направлении из Γ); $\overrightarrow{e_1}$ – единичный вектор нормали к γ в касательной к S_1 плоскости (в направлении из S_1), α_2 и α – двугранные углы, образованные газом и жидкостью в точках линии (рис. 1, 2).

Для существования равновесных состояний жидкости, имеющей свободную поверхность [1, 2], должны быть выполнены следующие условия:

потенциальность и стационарность поля массовых сил , т.е.

$$F = -\nabla\Pi; \tag{1}$$

условие Эйлера:

$$\nabla p = \rho F \quad (\text{в } \Omega_1 \text{ и } \Omega_2); \tag{2}$$

условие Лапласа для перепада давлений на поверхности Γ:

$$p_2 - p_1 = \sigma(k_1 + k_2), \tag{3}$$

где p_1 и p_2 – давления в жидкости и газе соответственно, k_1 и k_2 – кривизны главных нормальных сечений поверхности Γ (кривизна считается положительной, если нормальное сечение выпукло в сторону области Ω_1);

условие Дюпре–Юнга на линии контакта γ:

$$\sigma \cos\alpha = \sigma_2 - \sigma_1. \tag{4}$$

Будем считать, что поведение баротропного газа описывается соотношением

$$\nabla p_2 = a^2 \nabla \rho_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{5}$$

где a – скорость звука в газе.

2. Математическая модель задачи, основанная на условиях гидростатики.

Условие покоя баротропного газа имеет вид

$$\nabla p_2 = -\rho_2(z) g \overrightarrow{k} \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{6}$$

где $\overrightarrow{k}$ – орт оси z, а g – ускорение свободного падения.

Из соотношений (5) и (6) следует, что

$$a^2 \nabla \rho_2 = -\rho_2(z) g \overrightarrow{k} \quad (\text{в } \Omega_2),$$

и плотность баротропного газа в статике описывается зависимостью

$$\rho_2(z) = \rho_2^0 \exp(-\frac{g}{a^2} z), \quad \rho_2(0) = \rho_2^0. \tag{7}$$

Введем обозначение $\varepsilon := gha^{-2} > 0$, где h – размер сосуда по оси z.

Учитывая выражение для плотности баротропного газа (7), из условия (6) получаем соотношение, описывающее изменение давления газа в области Ω_2:

$$p_2(z) = const - \int\limits_0^z g\rho_2^0 h \exp(-\varepsilon\xi) d\xi = const + \frac{g\rho_2^0 h}{\varepsilon} (\exp(-\frac{\varepsilon z}{h}) - 1). \tag{8}$$

Потенциал Π_2 объемных сил в баротропном газе определяется из условий (1), (2) и соотношения (8):

$$\Pi_2 = -a^2 \rho_2^0 \exp(-\frac{\varepsilon z}{h}) + const, \tag{9}$$

а потенциал объемных сил и давление в жидкости имеют вид

$$\Pi_1 = g\rho_1 z + c_1, \quad p_1(z) = c - g\rho_1 z. \tag{10}$$

Подставив соотношения (9), (10) в условие (3), имеем:

$$p_2(z) - p_1(z) = -\Pi_2 + \Pi_1 + const = a^2 \rho_2^0 \exp(-\frac{\varepsilon z}{h}) + g\rho_1 z + const = \sigma(k_1 + k_2). \tag{11}$$

Заметим, что краевая задача (2)–(4) эквивалентна задаче (11), (4).

Преобразуем условие (11) к виду

$$\begin{aligned} &\sigma(k_1 + k_2) = const + (\rho_1 - \rho_2^0) g z + g h \rho_2^0 f_\varepsilon\Big(\frac{z}{h}\Big), \\ &f_\varepsilon\Big(\frac{z}{h}\Big) := \frac{1}{\varepsilon}\Big(\exp\Big(-\frac{\varepsilon z}{h}\Big) - 1 + \frac{\varepsilon z}{h}\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

Переходя в соотношении (12) к безразмерным переменным $z \mapsto hz$, получаем условие равновесия системы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости

$$\frac{\sigma(k_1 + k_2)}{h} = const + (\rho_1 - \rho_2^0) g h z + g h \rho_2^0 f_\varepsilon\Big(\frac{z}{h}\Big).$$

Таким образом, для равновесия подобной системы "жидкость–баротропный газ" на свободной поверхности жидкости должно выполняться условие

$$(k_1 + k_2) = C + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z), \tag{13}$$

где

$$B_0 = \frac{(\rho_1 - \rho_2^0)}{\sigma} g h^2, \quad b_0 = \frac{\rho_2^0}{\sigma} g h^2, \quad f_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon}(\exp(-\varepsilon z) - 1 + \varepsilon z),$$

а также условие (4) на линии контакта сред.

Для определения формы равновесной поверхности жидкости необходимо решать краевую задачу для дифференциального уравнения (13) с граничным условием (4). Их конкретный вид зависит от выбранной формы представления искомой поверхности. При решении конкретных задач считается заданным объем жидкости, т.е.

$$\int\limits_{\Omega_1} d\Omega_1 = v. \tag{14}$$

3. Математическая модель задачи, основанная на вариационном принципе стационарности потенциальной энергии.

Известно, что полная потенциальная энергия $\mathcal{U}$ системы "жидкость–баротропный газ" , связанная с поверхностными и массовыми силами, в положении равновесия принимает стационарное значение [1, 2], что дает возможность для формально-математического вывода условий равновесия.

Определим потенциальную энергию исследуемой системы:

$$\mathcal{U} = \sigma|\Gamma| + \sigma_1|S_1| + \sigma_2|S_2| + \int\limits_{\Omega_1} \Pi_1 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \Pi_2 d\Omega_2, \tag{15}$$

где $|\Gamma|$, $|S_1|$, $|S_2|$ – площади поверхностей Γ, S_1, S_2. Подставив в (15) выражения для потенциалов объемных сил в газе (9) и жидкости (10), получим, что

$$\mathcal{U} = \sigma|\Gamma| + \sigma_1|S_1| + \sigma_2|S_2| + \int\limits_{\Omega_1} (g\rho_1 z + c_1) d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} (-a^2 \rho_2^0 \exp(-\frac{g}{a^2} z) + c_2) d\Omega_2. \tag{16}$$

В соответствии с вариационным принципом стационарности потенциальной энергии система может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда первая вариация функционала потенциальной энергии системы равна нулю, т.е. $\delta\mathcal{U} = 0$ для всех допустимых вариаций $\delta\Gamma$ поверхности Γ. Допустимыми вариациями поверхности Γ считаются такие изменения поверхности Γ, которые сохраняют объем жидкости, т.е. удовлетворяют условию (14), но могут сдвигать линию контакта γ вдоль поверхности сосуда.

Запишем выражение для первой вариации потенциальной энергии системы, используя ее представление в виде (16)

$$\delta\mathcal{U} = \sigma\delta|\Gamma| + \sigma_1\delta|S_1| + \sigma_2\delta|S_2| + \delta\int\limits_{\Omega_1} (g\rho_1 z + c_1) d\Omega_1 + \delta\int\limits_{\Omega_2} (-a^2 \rho_2^0 \exp(-\frac{g}{a^2} z) + c_2) d\Omega_2$$

и вычислим слагаемые в правой части. Если каждая точка поверхности Γ с радиус-вектором $\overrightarrow{x}$ сместится на малый вектор $\overrightarrow{\delta x}$, то по формуле Гаусса [1] получим, что

$$\delta|\Gamma| = -\int\limits_{\Gamma}(k_1+k_2)(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma+\oint\limits_{\gamma}(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\gamma, \quad \delta|S_1| = -\int\limits_{S_1}k_1(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})dS_1+\int\limits_{\gamma}(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\gamma.$$

Поскольку $\overrightarrow{n_1}$ является нормалью к поверхности S_1, то $(\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{\delta x}) = 0$ и

$$\delta|S_1| = \int\limits_{\gamma}(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\gamma, \quad \delta|S_2| = -\delta|S_1| = -\int\limits_{\gamma}(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\gamma.$$

В силу несжимаемости жидкости удовлетворяется условие (14) и

$$\delta\int\limits_{\Omega_1}(g\rho_1 z + c_1)d\Omega_1 = g\rho_1\int\limits_{\Gamma}z\,(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma.$$

Учитывая, что нормаль $\overrightarrow{n}$, являясь внешней по отношению к области Ω_1, по отношению к области Ω_2 является внутренней, получим, что

$$\delta\int\limits_{\Omega_2}(-a^2\rho_2^0\exp(-\frac{g}{a^2}z)+c_2)d\Omega_2 = a^2\rho_2^0\int\limits_{\Gamma}\exp(-\frac{g}{a^2}z)\,(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma.$$

Отсюда приходим к выражению для первой вариации функционала потенциальной энергии системы "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, и условию равновесия исследуемой системы

$$\begin{gathered}\delta\mathcal{U} = \int\limits_{\Gamma}[-\sigma(k_1+k_2)+g\rho_1 z+a^2\rho_2^0\exp(-\frac{g}{a^2}z)](\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma+\\ +\oint\limits_{\gamma}[\sigma(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\delta x})+(\sigma_1-\sigma_2)(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})]d\gamma = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

В силу непротекания жидкости через стенку сосуда и несжимаемости жидкости

$$(\overrightarrow{\delta x}\cdot\overrightarrow{n_1}) = 0 \quad (\text{на } \gamma), \quad \int\limits_{\Gamma}(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma = 0. \tag{18}$$

Применим правило неопределенных множителей Лагранжа по отношению к (18) и получим условие существования свободной равновесной поверхности жидкости

$$\begin{gathered}\int\limits_{\Gamma}[-\sigma(k_1+k_2)+g\rho_1 z+a^2\rho_2^0\exp(-\frac{g}{a^2}z)+const](\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\Gamma+\\ +\oint\limits_{\gamma}[\sigma(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\delta x})+(\sigma_1-\sigma_2)(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})]d\gamma = 0.\end{gathered}$$

Отсюда, используя основную лемму вариационного исчисления, заключаем, что для равновесия системы "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, должны удовлетворяться условие

$$-\sigma(k_1+k_2)+g\rho_1 z+a^2\rho_2^0\exp(-\frac{g}{a^2}z)+const=0 \quad (\text{на} \quad \Gamma)$$

и равенство

$$\oint\limits_{\gamma}[\sigma(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\delta x})+(\sigma_1-\sigma_2)(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})]d\gamma=0. \tag{19}$$

Из компланарности векторов $\overrightarrow{e}$, $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{n_1}$ в точках линии γ (рис. 2) следует, что $(\overrightarrow{e}\cdot\overrightarrow{\delta x})=(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_1})(\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x}) \quad (\text{на } \gamma)$, и условие (19) можно записать в виде

$$\oint\limits_{\gamma}[\sigma(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_1})+(\sigma_1-\sigma_2)](\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{\delta x})d\gamma=0,$$

откуда в силу произвольности вариации $\overrightarrow{\delta x}$ заключаем, что $\sigma(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_1})+(\sigma_1-\sigma_2)=0$. Очевидно, что последнее равенство совпадает с условием (4), так как $(\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n_1})=\cos\alpha$.

Таким образом, показано, что для решения задачи о равновесии гидросистемы "жидкость–баротропный газ", можно использовать любую из полученных математических моделей: основанную на вариационном принципе стационарности потенциальной энергии или полученную из условий гидростатики, поскольку они приводят к решению одной и той же краевой задачи.

4. Осесимметричный случай.

В осесимметричной задаче поверхность сосуда и поле внешних сил имеют общую ось симметрии. Введем цилиндрическую систему координат r, θ, z, причем ось z совместим с осью симметрии. Осесимметричная равновесная поверхность Γ определяется равновесной линией $L=\Gamma\cap(\theta=const)$. Примем в качестве параметра длину дуги s вдоль линии L, отсчитываемую от некоторой точки; тогда за координаты на поверхности Γ можно принять s и θ. Будем искать уравнение равновесной линии жидкости в виде $r=r(s), z=z(s)$. Учитывая условие равновесия (13), получаем краевую задачу для системы дифференциальных уравнений относительно $r(s)$ и $z(s)$

$$r''=-z'[(C+B_0z+b_0f_\varepsilon(z))-\frac{z'}{r}], \quad z''=r'[(C+B_0z+b_0f_\varepsilon(z))-\frac{z'}{r}] \tag{20}$$

с начальными условиями

$$r(0)=0,\ z(0)=z_0,\ r'(0)=1,\ z'(0)=0, \tag{21}$$

и соответствующими краевыми условиями в конечной точке, следующими из (4).

5. Алгоритмы и вычислительные схемы.

Заметим, что уравнения системы (20) имеют особенность в точке $s=0$, поэтому реализована следующая вычислительная схема решения:

1°. Решение краевой задачи (20), (21) в достаточно малой окрестности особой точки $(0, \tau)$ определяется в виде асимптотических разложений:

$$\begin{aligned}
&r = s - \frac{1}{24}\,C^2\,s^3 + (\frac{1}{1920}\,C^4 - \frac{1}{160}\,B_0\,C^2)\,s^5 + \\
&+ (-\frac{1}{322560}\,C^6 + \frac{1}{4480}\,C^4\,B_0 - \frac{1}{2688}\,b_0\,\varepsilon\,C^3 - \frac{5}{10752}\,B_0^2\,C^2)\,s^7 + O(s^9); \\
&z = \frac{1}{4}\,C\,s^2 + (-\frac{1}{192}\,C^3 + \frac{1}{64}\,B_0\,C)\,s^4 + (\frac{1}{1152}\,b_0\,\varepsilon\,C^2 + \frac{1}{23040}\,C^5 - \\
&- \frac{1}{720}\,C^3\,B_0 + \frac{1}{2304}\,B_0^2\,C)\,s^6 + (-\frac{1}{10321920}C(1010\,b_0\,\varepsilon\,C^3 + 2\,C^6 - \\
&- 305\,C^4\,B_0 + 1812\,B_0^2\,C^2 + 420\,\varepsilon^2\,C^2 - 70\,B_0^3 - 770\,b_0\,\varepsilon\,C\,B_0))\,s^8 + O(s^{10}),
\end{aligned} \tag{22}$$

т.е. в виде первых членов ряда по степеням переменной s (подсчет производился с помощью системы компьютерной алгебры MAPLE).

2°. Подстановкой значения $s = \tau > 0$ в полученные асимптотические разложения (22) вычисляем новые начальные условия

$$r_\tau = r(\tau),\; z_\tau = z(\tau),\; r'_\tau = r'(\tau),\; z'_\tau = z'(\tau). \tag{23}$$

3°. Используем полученные значения $r_\tau,\ z_\tau,\ r'_\tau,\ z'_\tau$ в качестве начальных для численного интегрирования уравнений краевой задачи (20), (23), уже не имеющей особенности в начальной точке.

Следует отметить, что значение τ определяется априорно из задаваемой точности вычислений, учитывая погрешность выбранного метода численного интегрирования. Применение метода Рунге-Кутта второго порядка точности позволяет (пренебрегая ошибками округления) для получения точности 10^{-2p} выбрать шаг интегрирования, равный 10^{-p}.

Для численных расчетов использовались следующие данные: шаг интегрирования, большое и малые числа Бонда, параметры модели C и ε. Для цилиндра задается также характерный размер сосуда R (по горизонтальной оси), а для конуса – радиус основания конуса R и угол δ, составленный образующей конуса с горизонтальной осью. В таблице 1 приведены значения угла смачивания для цилиндра и конуса.

Таблица 1. Углы смачивания для осесимметричных поверхностей.

Тип поверхности	R	δ	b_0	B_0	C	ε	угол смачивания
цилиндр	1	–	1	1	0,5	0,01	1,28
цилиндр	1	–	1	1	1	0,01	0,97
цилиндр	1	–	1	1	1,5	0,01	0,54
конус	1	0,5	1	1	0,5	0,01	0,21

На рис. 3 и 4 представлены равновесные линии для различных значений параметров гидросистемы. Анализ полученных численных и графических результатов показал, что на форму равновесных линий в гидросистеме "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости, преобладающее влияние оказывают значения двух параметров B_0 и C. Физический смысл имеют только начальные участки линий, являющиеся дугами равновесных линий. При этом для фиксированного C и увеличении B_0 кривизны линий увеличиваются, и равновесные линии приближаются к оси Oz. Аналогичные результаты получаются при фиксированном B_0 и увеличении C.

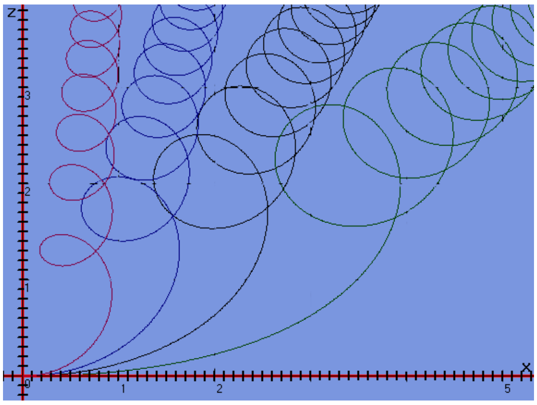

Рис. 3. Равновесные линии жидкости в осесимметричной задаче ($b_0 = 1; B_0 = 0,5; C = 0,2; 0,5; 1; 2; \varepsilon = 0,01$)

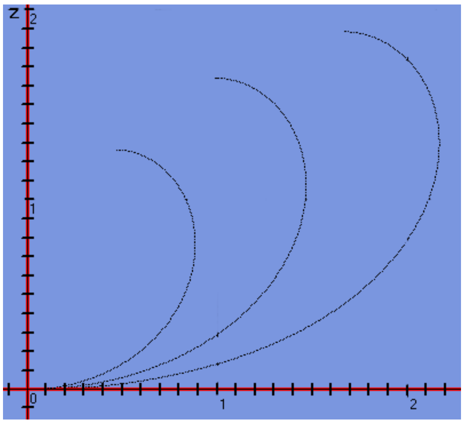

Рис. 4. Участки равновесных линий жидкости в цилиндре ($b_0 = 1; B_0 = 1; C = 0,5; 1; 2; \varepsilon = 0,01$)

Выводы. В работе рассмотрена общая задача статики для гидросистемы "жидкость-баротропный газ" в условиях, близких к невесомости. Сформулирована задача для осесимметричного случая и разработана методика нахождения формы равновесной поверхности границы раздела "жидкости – баротропный газ". Предложенная методика является обобщением методики, разработанной Бабским В.Г., Копачевским Н.Д., Мышкисом А.Д. для жидкости, и позволит в дальнейшем находить не только равновесные формы поверхности границы раздела сред, но и участки их устойчивости с применением второй вариации потенциальной энергии системы.

Автор благодарит Копачевского Н.Д. за руководство работой, а также С.Н. Судакова за внимание к работе и полезные замечания.

1. *Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д. и др.* Гидромеханика невесомости. – М.: Наука, 1976. – 504 с.
2. *Myshkis A.D., Babskii V.G., Kopachevskii N.D., Slobozhanin L.A., Tyuptsov A.D.* Low-gravity fluid mechanics. Mathematical theory of capillary phenomena.-Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987.-XIX+583 p.

E.L. Gaziev

The problem of statics for hydrosystem "fluid - barotropic gas"in conditions close to ungravidity.

For the hydrosystem "fluid – barotropic gas" in conditions close to ungravidity the mathematical models based on the hydrostatics conditions and the variational principle of stationary potential energy are constructed. In axisymmetrical case to solve the boundary problem under investigation asymptotic series expansions in the neighbourhood of the singular point are obtained, the algorithms and computing circuits are offered. The numerical and graphic results in the cases of arbitrary axisymmetrical surface, cylinder and cone are presented.

Keywords: *hydrosystem, barotropic gas, mathematical model, variational principle, potential energy, asymptotic series expansion, computing circuits.*

Е.Л. Газієв

Задача статики гідросистеми "рідина - баротропний газ" в умовах, близьких до невагомості

Для гідросистеми "рідина - баротропний газ" в умовах, близьких до невагомості, побудовано математичні моделі, що засновані на умовах гідростатики і варіаційному принципі стаціонарності потенційної енергії. В осесиметричному випадку для досліджуваної крайової задачі отримано асимптотичні розвинення розв'язку в околі особливої точки, запропоновано алгоритми та обчислювальні схеми розв'язку, наведено чисельні та графічні результати для випадків довільної осесиметричної поверхні, циліндра і конуса.

Ключові слова: *гідросистема, баротропний газ, математична модель, варіаційний принцип, потенційна енергія, асимптотичне розвинення, обчислювальна схема.*

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь
gilmor2004@mail.ru

Получено 28.02.09