ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2010. Том 20

УДК 517.5

©2010. **Вит.В. Волчков**

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены новые теоремы единственности для решений уравнения Дарбу и волнового уравнения.

Ключевые слова: *сферическое преобразование Радона, волновое уравнение, уравнение Дарбу, теоремы единственности.*

Различные теоремы единственности для решений дифференциальных уравнений изучались многими авторами (см., например, [1, гл. 5], [2, гл. 5], [3, часть 5] и библиографию к этим работам). В недавнее время появился ряд результатов в этом направлении, основанных на изучении инъективности локального сферического преобразования Радона (см. [3, часть 5]). В частности, были получены теоремы единственности для решений уравнения Дарбу и волнового уравнения, связанные с изучением сферически симметричных множеств инъективности для преобразования Радона на сферах в $\mathbb{R}^n$. В данной работе доказаны новые теоремы единственности для решений уравнения Дарбу и волнового уравнения. Их особенность состоит в том, что соответствующие множества единственности существенно связаны с коническими множествами инъективности для сферического преобразования Радона в $\mathbb{R}^n$.

Для $\nu \in \mathbb{C}$ положим

$$\psi_{\nu,k}(\theta) = (\sin\theta)^{1-\frac{n}{2}} P^{-\frac{n}{2}-k+1}_{\nu+\frac{n}{2}-1}(\cos\theta), \quad \theta \in (0,\pi),$$

где $P^{-\frac{n}{2}-k+1}_{\nu+\frac{n}{2}-1}$ – функция Лежандра первого рода на $(-1,1)$ (см. [4, формула 3.4 (6)]). Обозначим

$$\mathcal{N}_k(r) = \{\nu > k \colon \psi_{\nu,k}(r) = 0\},$$

$$\mathcal{N}_k(r_1,r_2) = \mathcal{N}_k(r_1) \cap \mathcal{N}_k(r_2), \quad \mathcal{N}(r_1,r_2) = \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{N}_k(r_1,r_2).$$

Пусть $0 < \alpha < \pi$,

$$K_\alpha = \{x = (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_{n+1} > (\operatorname{ctg}\alpha)\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\}, \quad \alpha \neq \pi,$$

$$K_\pi = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \colon x_1 = \ldots = x_n = 0, x_{n+1} \le 0\},$$

∂K_α – граница K_α, $\overline{K}_\alpha$ – замыкание K_α, $\operatorname{dist}(x,\partial K_\alpha)$ – расстояние от точки $x \in K_\alpha$ до границы K_α. При $0 < r < R \le \pi$ обозначим через $W_r(K_R)$ класс функций $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(K_R)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам из K_R с центрами на ∂K_r.

Пусть $G_R = \{(x,\rho) \in \mathbb{R}^{n+1} \times [0,+\infty) \colon x \in K_R, 0 \leq \rho < \mathrm{dist}(x, \partial K_R)\}$. Рассмотрим уравнение Дарбу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{n}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \Delta_x u, \quad u = u(x,\rho), \quad (x,\rho) \in G_R, \tag{1}$$

где Δ_x – оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_{n+1}$.

Теорема 1. *Пусть $u \in C^2(G_R)$ – решение уравнения (1). Предположим, что $r_1, r_2 \in (0,\pi)$ фиксированы, $\max\{r_1, r_2\} < R \leqslant \pi$ и $u(x,\rho) = 0$ при $x \in \partial K_{r_1} \cup \partial K_{r_2}$, $0 < \rho < \mathrm{dist}(x, \partial K_R)$. Тогда, если $r_1 + r_2 \leqslant R$ и $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \varnothing$, то $u = 0$ в G_R. Для $r_1 + r_2 > R$ или $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \varnothing$ это утверждение неверно.*

Для доказательства теоремы 1 будем использовать следующий результат (см. [5]).

Теорема А. *Пусть $r_1, r_2 \in (0,\pi)$, $\max(r_1, r_2) < R \leq \pi$. Тогда:*

1) если $f \in W_{r_1}(K_R) \cap W_{r_2}(K_R)$, $r_1 + r_2 \leq R$ и $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \varnothing$, то $f = 0$;

2) если $r_1 + r_2 > R$ или $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \varnothing$, то существует ненулевая бесконечно дифференцируемая в K_R функция $f \in W_{r_1}(K_R) \cap W_{r_2}(K_R)$.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $U(x,y) = u(x,|y|)$ при $x \in K_R$, $y \in \mathbb{R}^{n+1} : 0 \leqslant |y| < \mathrm{dist}(x, \partial K_R)$. Тогда

$$\triangle_y U(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}(x,|y|) + \frac{n}{|y|}\frac{\partial u}{\partial \rho}(x,|y|) = \triangle_x U(x,y).$$

По теореме Асгейрссона [6, гл. 2, п. 5.6]

$$\int_{S_\rho(x_0)} U(x,0) d\omega_{norm}(x) = \int_{S_\rho(0)} U(x_0,y) d\omega_{norm}(y) =$$

$$= \int_{S_\rho(0)} u(x_0,|y|) d\omega_{norm}(y) = u(x_0,\rho).$$

Отсюда

$$u(x,\rho) = \int_{S_\rho(x)} u(\xi,0) d\omega_{norm}(\xi).$$

Теперь из условия и теоремы А получаем $u(\xi,0) = 0$ и $u(x,\rho) = 0$.

Пусть $r_1 + r_2 > R$ или $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \varnothing$. Рассмотрим ненулевую, гладкую в K_R функцию $f \in W_{r_1}(K_R) \cap W_{r_2}(K_R)$ (см. теорему А). Положим

$$v(x,\rho) = \mathcal{R}f(x,\rho) = \int_{S_\rho(x)} f d\omega_{norm}.$$

Тогда v удовлетворяет уравнению Дарбу [6, гл. 1, п. 2.3]. Если $v(x,\rho) \equiv 0$, то f имеет нулевые интегралы по всем сферам, лежащим в K_R. Из непрерывности f имеем

$$\mathcal{R}f(x,\rho) = f(x) + o(1)$$

при $\rho \to 0$. Отсюда $f = 0$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Аналогично, используя [5, теорема 1], получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $u \in C^2(G_R)$ – решение уравнения (1). Предположим, что $r \in (0, R)$, $u(x, 0) = 0$ в области $K_r \setminus \overline{K}_{2r-R}$ и $u(x, \rho) = 0$ при $x \in \partial K_r$, $0 < \rho < \mathrm{dist}(x, \partial K_R)$. Тогда $u = 0$ в области $\{(x, \rho) \in \mathbb{R}^{n+1} \times [0, +\infty) \colon x \in K_R \setminus \overline{K}_{2r-R}, 0 < \rho < \min\{\mathrm{dist}(x, \partial K_R), \mathrm{dist}(x, \partial K_{2r-R})\}\}$.*

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta_x u, \quad u = u(x, t), \quad (x, t) \in G_R \tag{2}$$

с начальными данными

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = f(x), \quad x \in K_R. \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть u – решение задачи (2), (3), где $f \in C^m(K_R)$, $m = \left[\frac{n+3}{2}\right]$. Предположим, что $r_1, r_2 \in (0, \pi)$, $\max\{r_1, r_2\} < R \leqslant \pi$ и $u(x, t) = 0$ при $x \in \partial K_{r_1} \cup \partial K_{r_2}$, $0 < t < \mathrm{dist}(x, \partial K_R)$. Тогда, если $r_1 + r_2 \leqslant R$ и $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \varnothing$, то $u = 0$ в G_R. Для $r_1 + r_2 > R$ или $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \varnothing$ это утверждение неверно.*

Для доказательства теоремы 3 потребуется одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть $f \in C^m(K_R)$, $m = \left[\frac{n+3}{2}\right]$. Тогда*

$$\{x \in K_R : \mathcal{R}f(x, r) = 0, r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial K_R))\} =$$

$$= \{x \in K_R : u(x, t) = 0, t \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial K_R))\},$$

где u – решение задачи (2), (3).

Доказательство. Пусть $y \in K_R$ и $\mathcal{R}f(y, r) = 0$ для $r \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial K_R))$. Пусть $\tau \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial K_R))$. Функция u удовлетворяет волновому уравнению при (x, t) : $|x - y| < \tau + \varepsilon$, $0 < t < \tau + \varepsilon - |x - y|$ и начальным данным при $|x - y| < \tau + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. По формуле Кирхгофа

$$u(x, t) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-2)/2} r\, \mathcal{R}f(x, r) dr \right)$$

в области (x, t) : $|x - y| < \tau + \varepsilon$, $0 < t < \tau + \varepsilon - |x - y|$. Отсюда $u(y, \tau) = 0$. Обратно, пусть $y \in K_R$ и $u(y, t) = 0$ для $t \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial K_R))$. Зафиксируем $\rho \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial K_R))$. Как и выше,

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}} \left(\int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-2)/2} r\, \mathcal{R}f(y, r) dr \right) = 0$$

при $t \in (0, \rho + \varepsilon)$. Поэтому функция

$$F(y, t) = \int_0^t (t^2 - r^2)^{(n-2)/2} r\, \mathcal{R}f(y, r) dr$$

является полиномом по t степени не выше $n-2$. Далее имеем

$$F(y,t) = t^n \int_0^1 (1-r^2)^{(n-2)/2} r\, \mathcal{R}f(y,rt)dr.$$

Отсюда $F(y,t) = O(t^n),\ t \to 0$. Но тогда $F \equiv 0$. Последнее равенство эквивалентно интегральному уравнению Абеля (см. [6, гл. 1, доказательство теоремы 2.6]). Следовательно, $\mathcal{R}f(y,r) = 0$ для $r \in (0, \mathrm{dist}(y, \partial K_R))$ и лемма 1 доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 3. Пусть $r_1 + r_2 \leq R$, $\mathcal{N}(r_1, r_2) = \varnothing$, $x \in \partial K_{r_1} \cup \partial K_{r_2}$. Используя условие теоремы 3 и лемму 1, получаем равенство $\mathcal{R}f(x,r) = 0$ для $r \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial K_R))$. Теперь согласно теореме A, $f = 0$ в K_R. Тогда по формуле Кирхгофа $u = 0$ в G_R. Обратно, пусть $r_1 + r_2 > R$ или $\mathcal{N}(r_1, r_2) \neq \varnothing$. Пусть u – решение задачи Коши (2), (3), где f – ненулевая гладкая в K_R функция из $W_{r_1}(K_R) \cap W_{r_2}(K_R)$. Тогда u ненулевая и по формуле Кирхгофа $u(x,t) = 0$ при $x \in \partial K_{r_1} \cup \partial K_{r_2}$, $0 < t < \mathrm{dist}(x, \partial K_R)$. Теорема 3 доказана.

Относительно других теорем о двух радиусах и их приложений см. [7].

1. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. – М: Мир, 1965. – 379 с.
2. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. – М: Мир, 1964. – 830 с.
3. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454 pp.
4. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М: Наука, 1973. – Т. 1. – 294 с.
5. *Волчков Вит.В.* Аналоги локального преобразования Помпейю на сфере // Доп. НАН України. – 2004. – № 2. – С. 18–22.
6. *С. Хелгасон* Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. – 735 с.
7. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. – London: Springer, 2009. – 671 pp.

Vit.V. Volchkov

Uniqueness theorems for solutions of differential equations.

New uniqueness theorems for solutions of the Darboux equation and the wave equation are obtained.

Keywords: *spherical Radon transform, the wave equation, the Darboux equation, uniqueness theorems.*

Віт.В. Волчков

Теореми єдиності для розв'язків диференціальних рівнянь.

Одержано нові теореми єдиності для розв'язків рівняння Дарбу і хвильового рівняння.

Ключові слова: *сферичне перетворення Радона, хвильове рівняння, рівняння Дарбу, теореми єдиності.*

Донецкий национальный университет
v.volchkov@mail.donnu.edu.ua

Получено 31.05.10