

УДК 539.3

©2010. Е.В. Алтухов, А.В. Винник

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ТОРЦАМИ, ПОКРЫТЫМИ ДИАФРАГМОЙ

Рассмотрена трехмерная задача упругого равновесия анизотропной пластины, плоские грани которой покрыты диафрагмой. Для этого класса задач получены однородные решения. Проведены численные исследования напряженного состояния бесконечной пластины с эллиптической полостью, на боковой поверхности которой заданы постоянные по толщине внешние усилия.

Ключевые слова: *трехмерные однородные решения, анизотропные пластины, слой с эллиптической полостью.*

Введение. Развитию аналитических методов решения трехмерных задач теории упругости анизотропного тела и исследованию концентрации напряжений в элементах конструкций из композиционных материалов посвящены обзорные статьи [1 – 4]. Эффективным методом решения трехмерных задач статики упругих трансверсально-изотропных пластин является метод однородных решений [5, 6]. В работе [6] получены однородные решения уравнений трехмерной теории упругости для трансверсально-изотропных пластин, на плоских гранях которых нормальное напряжение и тангенциальные смещения равны нулю. На их основе получено точное решение задачи о напряженном состоянии слоя с цилиндрической полостью. В данной статье аналогичные исследования проведены для анизотропных пластин с одной плоскостью упругой симметрии.

Постановка задачи и построение однородных решений. Рассмотрим анизотропную пластину толщиной $2h$, которая отнесена к прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$. Пластина имеет плоскость упругой симметрии, совпадающую со срединной плоскостью Ox_1x_2 . Для решения задачи о напряженном состоянии рассматриваемой пластины необходимо проинтегрировать уравнения равновесия в перемещениях [3], которые представляются таким образом:

$$\begin{aligned} (L_{11} + A_{55}\partial_3^2)u_1 + (L_{12} + A_{54}\partial_3^2)u_2 + L_{13}\partial_3u_3 &= 0, \\ (L_{21} + A_{45}\partial_3^2)u_1 + (L_{22} + A_{44}\partial_3^2)u_2 + L_{23}\partial_3u_3 &= 0, \\ L_{31}\partial_3u_1 + L_{32}\partial_3u_2 + (L_{33} + A_{33}\partial_3^2)u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{11} &= A_{11}\partial_1^2 + 2A_{16}\partial_1\partial_2 + A_{66}\partial_2^2, & L_{12} &= A_{16}\partial_1^2 + (A_{12} + A_{66})\partial_1\partial_2 + A_{26}\partial_2^2, \\ L_{22} &= A_{66}\partial_1^2 + 2A_{26}\partial_1\partial_2 + A_{22}\partial_2^2, & L_{13} &= \alpha_{13}\partial_1 + \alpha_{45}\partial_2, \\ L_{33} &= A_{55}\partial_1^2 + 2A_{45}\partial_1\partial_2 + A_{44}\partial_2^2, & L_{23} &= \alpha_{45}\partial_1 + \alpha_{23}\partial_2, \\ L_{21} &= L_{12}, & L_{31} &= L_{13}, & L_{32} &= L_{23}, & \alpha_{13} &= A_{13} + A_{55}, & \alpha_{23} &= A_{23} + A_{44}, \\ & & \alpha_{45} &= A_{36} + A_{45}, & \partial_i &= \partial/\partial x_i, & A_{ij} &- \text{модули упругости.} \end{aligned}$$

Вводя следующие обозначения для напряжений $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$, $\sigma_4 = \sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sigma_{13}$, $\sigma_6 = \sigma_{12}$, уравнения обобщенного закона Гука [7] запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned}\sigma_i &= (A_{i1}\partial_1 + A_{i6}\partial_2)u_1 + (A_{i6}\partial_1 + A_{i2}\partial_2)u_2 + A_{i3}\partial_3u_3 \quad (i = 1, 2, 3, 6), \\ \sigma_i &= A_{i5}\partial_3u_1 + A_{i4}\partial_3u_2 + (A_{i5}\partial_1 + A_{i4}\partial_2)u_3 \quad (i = 4, 5).\end{aligned}\quad (2)$$

Решение системы (1) необходимо осуществлять с учетом граничных условий смешанного типа на плоских гранях пластины [5]

$$\sigma_{33}(x_1, x_2, \pm h) = 0, \quad u_i(x_1, x_2, \pm h) = 0 \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Решения системы (1), удовлетворяющие граничным условиям (3), называются однородными [8]. В случае симметричной деформации пластины относительно срединной плоскости представим компоненты вектора перемещений в виде [5, 6]

$$\begin{aligned}u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \cos(\beta_k x_3) \quad (i = 1, 2), \\ u_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \sin(\beta_k x_3), \quad \beta_k = (2k - 1)\pi/(2h).\end{aligned}\quad (4)$$

Аналогично при кососимметричном нагружении пластины имеем

$$\begin{aligned}u_i &= \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}(x_1, x_2) \sin(\delta_k x_3) \quad (i = 1, 2), \\ u_3 &= \sum_{k=0}^{\infty} u_{3k}(x_1, x_2) \cos(\delta_k x_3), \quad \delta_k = k\pi h^{-1}.\end{aligned}\quad (5)$$

Тогда граничные условия (3) будут удовлетворены, а из уравнений равновесия (1) получим системы дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций u_{ik} ($i = \overline{1, 3}$). Например, используя разложения (5), будем иметь

$$L_{33}u_{30} = 0 \quad k = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^3 D_{in}^{(k)} u_{nk} = 0 \quad (i = \overline{1, 3}) \quad k \geq 1, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}D_{11}^{(k)} &= A_{55} - \lambda_k^2 L_{11}, & D_{12}^{(k)} &= A_{54} - \lambda_k^2 L_{12}, & D_{13}^{(k)} &= \lambda_k L_{13}, \\ D_{21}^{(k)} &= A_{45} - \lambda_k^2 L_{21}, & D_{22}^{(k)} &= A_{44} - \lambda_k^2 L_{22}, & D_{23}^{(k)} &= \lambda_k L_{23}, \\ D_{31}^{(k)} &= \lambda_k L_{31}, & D_{32}^{(k)} &= \lambda_k L_{32}, & D_{33}^{(k)} &= \lambda_k^2 L_{33} - A_{33}, & \lambda_k &= (\delta_k)^{-1} = h/(k\pi).\end{aligned}$$

Общее решение уравнения (6) представим так

$$u_{30} = 2Re [\varphi_3(z_3)/(A_{45} + A_{44}\mu_3)]. \quad (8)$$

Здесь $\varphi_3(z_3)$ – произвольная аналитическая функция обобщенной комплексной переменной $z_3 = x_1 + \mu_3 x_2$; μ_3 – корень характеристического уравнения

$$A_{55} + 2A_{45}\mu + A_{44}\mu^2 = 0.$$

В результате, выражения для напряжений (2) становятся такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{40} &= 2Re\varphi_3'(z_3), \quad \sigma_{50} = -2Re [\mu_3\varphi_3'(z_3)], \quad \varphi_3'(z_3) = d\varphi_3/dz_3, \\ \sigma_{10} &= \sigma_{20} = \sigma_{30} = \sigma_{60} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Соотношения (8) и (9) можно использовать при решении задач типа антиплоской деформации для пластин с полостями. Пусть пластина деформируется усилиями, приложенными к боковым поверхностям полостей, и внешними усилиями $\sigma_5^\infty = t_5$, $\sigma_4^\infty = t_4$, заданными на бесконечности. Тогда граничные условия для определения комплексной функции $\varphi_3(z_3)$ на поверхности r -той полости имеют вид

$$\sigma_{50}n_{1r} + \sigma_{40}n_{2r} = -n_{1r}t_5 - n_{2r}t_4 + N_r(s), \quad (10)$$

где $N_r(s)$ – касательная составляющая внешних усилий, приложенных к боковой поверхности; $n_{1r} = \cos(n_r, x_1)$, $n_{2r} = \cos(n_r, x_2)$, n_r – нормаль к контуру L_r .

Решение системы уравнений (7) будем находить в виде разложения по параметру $\lambda_k = h/(k\pi)$

$$u_{nk} = \varphi_{nk} + \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_k^{p+1} u_{nkp}. \quad (11)$$

Подставляя разложения (11) в уравнения равновесия (7), получим

$$\begin{aligned} &A_{55}\varphi_{1k} + A_{54}\varphi_{2k} + \lambda_k(A_{55}u_{1k0} + A_{54}u_{2k0} + L_{13}\varphi_{3k}) + \\ &+ \lambda_k^2[A_{55}u_{1k1} + A_{54}u_{2k1} - L_{11}\varphi_{1k} - L_{12}\varphi_{2k} + L_{13}u_{3k0}] + \\ &+ \sum_{p=2}^{\infty} \lambda_k^{p+1}[A_{55}u_{1kp} + A_{54}u_{2kp} - L_{11}u_{1k,p-2} - L_{12}u_{2k,p-2} + L_{13}u_{3k,p-1}] = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &A_{45}\varphi_{1k} + A_{44}\varphi_{2k} + \lambda_k(A_{45}u_{1k0} + A_{44}u_{2k0} + L_{23}\varphi_{3k}) + \\ &+ \lambda_k^2[A_{45}u_{1k1} + A_{44}u_{2k1} - L_{21}\varphi_{1k} - L_{22}\varphi_{2k} + L_{23}u_{3k0}] + \\ &+ \sum_{p=2}^{\infty} \lambda_k^{p+1}[A_{45}u_{1kp} + A_{44}u_{2kp} - L_{21}u_{1k,p-2} - L_{22}u_{2k,p-2} + L_{23}u_{3k,p-1}] = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{33}\varphi_{3k} + \lambda_k(A_{33}u_{3k0} - L_{31}\varphi_{1k} - L_{32}\varphi_{2k}) + \\
 & + \lambda_k^2[A_{33}u_{3k1} - L_{31}u_{1k0} - L_{32}u_{2k0} - L_{33}\varphi_{3k}] + \\
 & + \sum_{p=2}^{\infty} \lambda_k^{p+1}[A_{33}u_{3kp} - L_{31}u_{1k,p-1} - L_{32}u_{2k,p-1} - L_{33}u_{3k,p-2}] = 0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Для системы уравнений (12)-(14) рассмотрим два способа ее решения.

1. Введем функции φ_k так, чтобы $\varphi_{1k} = \partial_2\varphi_k$, $\varphi_{2k} = -\partial_1\varphi_k$, а функцию φ_{3k} положим равной нулю. Уравнения (12)-(14) в этом случае запишутся в форме:

$$u_{1k0} = u_{2k0} = u_{3k1} = 0, \quad u_{3k0} = A_{33}^{-1}(L_{31}\partial_2 - L_{32}\partial_1)\varphi_k;$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{55}\partial_2 - A_{54}\partial_1)\varphi_k + \\
 & + \lambda_k^2[A_{55}u_{1k1} + A_{54}u_{2k1} - (L_{11}\partial_2 - L_{12}\partial_1 - A_{33}^{-1}L_{13}(L_{31}\partial_2 - L_{32}\partial_1))\varphi_k] = 0;
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 & (A_{45}\partial_2 - A_{44}\partial_1)\varphi_k + \\
 & + \lambda_k^2[A_{45}u_{1k1} + A_{44}u_{2k1} - (L_{21}\partial_2 - L_{22}\partial_1 - A_{33}^{-1}L_{23}(L_{31}\partial_2 - L_{32}\partial_1))\varphi_k] = 0;
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 A_{55}u_{1kp} + A_{54}u_{2kp} &= L_{11}u_{1k,p-2} + L_{12}u_{2k,p-2} - L_{13}u_{3k,p-1}, \\
 A_{45}u_{1kp} + A_{44}u_{2kp} &= L_{21}u_{1k,p-2} + L_{22}u_{2k,p-2} - L_{23}u_{3k,p-1}, \\
 u_{3kp} &= (L_{31}u_{1k,p-1} + L_{32}u_{2k,p-1} + L_{33}u_{3k,p-2})/A_{33} \quad p \geq 2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Выражения в квадратных скобках уравнений (15) и (16) представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_{55}u_{1k1} + A_{54}u_{2k1} - (L_{11}\partial_2 - L_{12}\partial_1 - A_{33}^{-1}L_{13}(L_{31}\partial_2 - L_{32}\partial_1))\varphi_k &= \\
 = -(A_{55}\partial_2 - A_{54}\partial_1)(a\partial_1^2 + b\partial_1\partial_2 + c\partial_2^2)\varphi_k;
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 A_{45}u_{1k1} + A_{44}u_{2k1} - (L_{21}\partial_2 - L_{22}\partial_1 - A_{33}^{-1}L_{23}(L_{31}\partial_2 - L_{32}\partial_1))\varphi_k &= \\
 = -(A_{45}\partial_2 - A_{44}\partial_1)(a\partial_1^2 + b\partial_1\partial_2 + c\partial_2^2)\varphi_k.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Для определения неизвестных a , b и c рассмотрим два случая.

1.1. Будем считать

$$\begin{aligned}
 a &= a_1 = (A_{54}b_1 + A_{11} - \alpha_{12} - (\alpha_{13}^2 - \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{45}^2)/A_{33})/A_{55}, \\
 b &= b_1 = (A_{54}c_1 + 2A_{16} - A_{26} - \alpha_{45}(2\alpha_{13} - \alpha_{23})/A_{33})/A_{55}, \\
 c &= c_1 = (A_{66} - \alpha_{45}^2/A_{33})/A_{55}.
 \end{aligned}$$

Тогда функции u_{1k1} и u_{2k1} определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 A_{55}u_{1k1} + A_{54}u_{2k1} &= (A_{54}a_1 + \alpha_{13}\alpha_{45}/A_{33} - A_{16})\partial_1^3\varphi_k, \\
 A_{45}u_{1k1} + A_{44}u_{2k1} &= (\beta_1\partial_2^3 + \beta_2\partial_2^2\partial_1 + \beta_3\partial_2\partial_1^2 + \beta_4\partial_1^3)\varphi_k,
 \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\begin{aligned}\beta_1 &= A_{26} - \alpha_{23}\alpha_{45}/A_{33} - A_{45}c_1, \\ \beta_2 &= \alpha_{12} - A_{22} - (\alpha_{13}\alpha_{23} + \alpha_{45}^2 - \alpha_{23}^2)/A_{33} - A_{45}b_1 + A_{44}c_1, \\ \beta_3 &= A_{16} - 2A_{26} - \alpha_{45}(\alpha_{13} - 2\alpha_{23})/A_{33} - A_{45}a_1 + A_{44}b_1, \\ \beta_4 &= \alpha_{45}^2/A_{33} - A_{66} + A_{44}a_1.\end{aligned}$$

Из соотношений (15) и (16) получим уравнения для функций $\psi_{1k} = \varphi_k$

$$\psi_{1k} - \lambda_k^2(a_1\partial_1^2 + b_1\partial_1\partial_2 + c_1\partial_2^2)\psi_{1k} = 0. \quad (21)$$

1.2. Возьмем теперь

$$\begin{aligned}a &= a_2 = (A_{66} - \alpha_{45}^2/A_{33})/A_{44}, \\ b &= b_2 = (A_{54}a_2 + 2A_{26} - A_{16} + \alpha_{45}(\alpha_{13} - 2\alpha_{23})/A_{33})/A_{44}, \\ c &= c_2 = (A_{54}b_2 + A_{22} - \alpha_{12} - (\alpha_{23}^2 - \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{45}^2)/A_{33})/A_{44}.\end{aligned}$$

Функции u_{1k1} и u_{2k1} в этом случае определяются из уравнений:

$$\begin{aligned}A_{45}u_{1k1} + A_{44}u_{2k1} &= -(A_{45}c_2 + \alpha_{23}\alpha_{45}/A_{33} - A_{26})\partial_2^3\varphi_k, \\ A_{55}u_{1k1} + A_{54}u_{2k1} &= (\gamma_1\partial_2^3 + \gamma_2\partial_2^2\partial_1 + \gamma_3\partial_2\partial_1^2 + \gamma_4\partial_1^3)\varphi_k,\end{aligned} \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= A_{66} - \alpha_{45}\alpha_{45}/A_{33} - A_{55}c_2, \\ \gamma_3 &= A_{11} - \alpha_{12} - (\alpha_{13}^2 - \alpha_{13}\alpha_{23} - \alpha_{45}^2)/A_{33} - A_{55}a_2 + A_{54}b_2, \\ \gamma_2 &= 2A_{16} - A_{26} - \alpha_{45}(2\alpha_{13} - \alpha_{23})/A_{33} - A_{55}b_2 + A_{54}c_2, \\ \gamma_4 &= \alpha_{13}\alpha_{45}/A_{33} - A_{16} + A_{54}a_2.\end{aligned}$$

Разрешающие для функций $\psi_{2k} = \varphi_k$ уравнения (15) и (16) примут вид

$$\psi_{2k} - \lambda_k^2(a_2\partial_1^2 + b_2\partial_1\partial_2 + c_2\partial_2^2)\psi_{2k} = 0. \quad (23)$$

2. Если положить $\varphi_{1k} = \varphi_{2k} = 0$, $\varphi_{3k} = \psi_{3k}$, $u_{1k0} = \partial_1\psi_{3k}$, $u_{2k0} = \partial_2\psi_{3k}$, то уравнения (12)-(14) становятся такими:

$$u_{1k1} = u_{2k1} = u_{3k0} = u_{3k1} = 0;$$

$$\begin{aligned}[(\alpha_{13} + A_{55})\partial_1 + (\alpha_{45} + A_{54})\partial_2]\psi_{3k} + \\ + \lambda_k^2[A_{55}u_{1k2} + A_{54}u_{2k2} - (L_{11}\partial_1 + L_{12}\partial_2)\psi_{3k}] = 0;\end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}[(\alpha_{45} + A_{45})\partial_1 + (\alpha_{23} + A_{44})\partial_2]\psi_{3k} + \\ + \lambda_k^2[A_{45}u_{1k2} + A_{44}u_{2k2} - (L_{21}\partial_1 + L_{22}\partial_2)\psi_{3k}] = 0;\end{aligned} \quad (25)$$

$$\psi_{3k} - \lambda_k^2 (a_3 \partial_1^2 + b_3 \partial_1 \partial_2 + c_3 \partial_2^2) \psi_{3k} = 0, \quad (26)$$

где $a_3 = (\alpha_{13} + A_{55})/A_{33}$, $b_3 = 2(\alpha_{45} + A_{45})/A_{33}$, $c_3 = (\alpha_{23} + A_{44})/A_{33}$;

$$\begin{aligned} A_{55}u_{1kp} + A_{54}u_{2kp} &= L_{11}u_{1k,p-2} + L_{12}u_{2k,p-2} - L_{13}u_{3k,p-1}, \\ A_{45}u_{1kp} + A_{44}u_{2kp} &= L_{21}u_{1k,p-2} + L_{22}u_{2k,p-2} - L_{23}u_{3k,p-1} \quad p \geq 3, \\ u_{3kp} &= (L_{31}u_{1k,p-1} + L_{32}u_{2k,p-1} + L_{33}u_{3k,p-2})/A_{33} \quad p \geq 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Система уравнений (24)-(25) приводится к уравнению (26), если функции u_{1k2} и u_{2k2} удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} A_{55}u_{1k2} + A_{54}u_{2k2} &= (\eta_1 \partial_1^3 + \eta_2 \partial_1^2 \partial_2 + \eta_3 \partial_1 \partial_2^2 + \eta_4 \partial_2^3) \psi_{3k}, \\ A_{45}u_{1k2} + A_{44}u_{2k2} &= (\delta_1 \partial_1^3 + \delta_2 \partial_1^2 \partial_2 + \delta_3 \partial_1 \partial_2^2 + \delta_4 \partial_2^3) \psi_{3k}, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\eta_1 = A_{11} - (\alpha_{13} + A_{55})a_3$, $\eta_3 = A_{66} + \alpha_{12} - (\alpha_{13} + A_{55})c_3 - (A_{45} + \alpha_{45})b_3$,
 $\eta_2 = 3A_{16} - (\alpha_{13} + A_{55})b_3 - (A_{45} + \alpha_{45})a_3$, $\eta_4 = A_{26} - (A_{54} + \alpha_{45})c_3$;
 $\delta_1 = A_{16} - (\alpha_{45} + A_{45})a_3$, $\delta_2 = A_{66} + \alpha_{12} - (\alpha_{23} + A_{44})a_3 - (A_{45} + \alpha_{45})b_3$,
 $\delta_3 = 3A_{26} - (\alpha_{23} + A_{44})b_3 - (A_{45} + \alpha_{45})c_3$, $\delta_4 = A_{22} - (A_{44} + \alpha_{23})c_3$.

Из полученных соотношений видно, что функции ψ_{1k} , ψ_{2k} , и ψ_{3k} находятся из решения обобщенных метагармонических уравнений (21), (23) и (26), которые имеют одинаковую структуру вида

$$[1 - \lambda_k^2 c_i (\partial_2^2 + b_i/c_i \partial_1 \partial_2 + a_i/c_i \partial_1^2)] \psi_{ik} = 0 \quad (i = \overline{1,3}). \quad (29)$$

Все остальные функции разложений (11) выражаются через ψ_{ik} при помощи введенных выше обозначений для ψ_{ik} , а также из формул (17) и (27).

Общее решение уравнения (29) представляется суперпозицией функций Бесселя мнимого аргумента

$$\psi_{ik}(z_i, \bar{z}_i) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z_i^n}{n!} + \frac{\bar{z}_i^n}{n!} \right) \rho_i^{-n/2} [C_{i1n} I_n(2q_{ik} \sqrt{\rho_i}) + C_{i2n} K_n(2q_{ik} \sqrt{\rho_i})],$$

где $z_i = x_1 + \mu_i x_2$, $\rho_i = z_i \bar{z}_i$, $q_{ik}^2 = 1/[\lambda_k^2 c_i (\mu_i - \bar{\mu}_i)^2]$, $\mu_i = -\frac{b_i}{2c_i} + \frac{1}{2} \sqrt{((\frac{b_i}{c_i})^2 - 4\frac{a_i}{c_i})}$.

Следует отметить, что после подстановки разложений (4) в уравнения (1) и проведения рассуждений, подобных приведенным выше, можно получить аналогичные разрешающие уравнения для случая симметричного нагружения пластины.

Численные исследования. В качестве примера исследуем напряженное состояние бесконечной пластины произвольной толщины $2h$. Пластина ослаблена эллиптической полостью, контур L которой задан уравнениями в параметрической форме

$$x_1 = a \cos \theta, \quad x_2 = b \sin \theta,$$

где a и b – полуоси эллипса; $0 \leq \theta \leq 2\pi$. К пластине приложены независимые от переменной x_3 внешние усилия, которые были описаны выше. При численной реализации будем использовать интегральную форму граничных условий (10) с учетом того, что при параметрическом задании контура

$$n_{1r} = dx_2/ds, \quad n_{2r} = -dx_1/ds, \quad ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}. \quad (30)$$

Тогда из выражений (9) и (10) с учетом (30) следует

$$2Re\varphi_3(z_3) = - \int_0^s N_r(s)ds + t_5x_2 - t_4x_1 + c_3. \quad (31)$$

Поскольку внешние усилия не зависят от переменной x_3 , то будем считать, что $N_r(s) = Pf(\theta)$. Подынтегральную функцию в (31) разложим на контуре L в ряд по степеням величины $\sigma = \exp(i\theta)$

$$F(\theta) = f(\theta)\sqrt{a^2 \sin^2(\theta) + b^2 \cos^2(\theta)} = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \sigma^{-k} + \bar{a}_k \sigma^k),$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N F(\theta_p), \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N F(\theta_p) \exp(i\theta_p k), \quad (N \geq 2n + 1).$$

Узлы θ_p равномерно расположены на интервале $(0, 2\pi]$: $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N = 2\pi$.

Интеграл в правой части условий (31) примет вид

$$- \int_0^s N_r(s)ds = -P \int_0^\theta F(\theta)d\theta = -P \left[a_0\theta + i \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{k} \sigma^{-k} - \frac{\bar{a}_k}{k} \sigma^k \right) \right].$$

Функция $\varphi_3(z_3)$ определена в области S_3 , получаемой из заданной области S аффинными преобразованиями [8]

$$x_{13} = x_1 + \gamma_3 x_2, \quad x_{23} = \beta_3 x_2, \quad \mu_3 = \gamma_3 + i\beta_3.$$

Эллиптический контур L перейдет в области S_3 в эллиптический контур L_3 , уравнение которого запишется так

$$t_3 = x_1 + \mu_3 x_2 = R_3 \sigma + m_3 / \sigma,$$

где $R_3 = (a - i\mu_3 b)/2$, $m_3 = (a + i\mu_3 b)/2$, $\sigma = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Отобразим конформно внешность единичной окружности $|\zeta_3| \geq 1$ на внешность эллипса L_3 в области S_3

$$z_3 = R_3 \zeta_3 + m_3 / \zeta_3.$$

Функцию $\varphi_3(z_3)$ представим в виде ряда

$$\varphi_3(z_3) = \alpha \ln \zeta_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k / \zeta_3^k. \quad (32)$$

Величины α , α_k определяются из граничного условия на поверхности полости.

Подставляя функцию (32) в граничные условия (31) и применяя метод рядов, получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов α и α_k . Из этой системы следует

$$i\alpha - i\bar{\alpha} = -Pa_0, \quad \alpha_k = -Pia_k/k \quad (k \geq 1). \quad (33)$$

Коэффициент α найдем из первого уравнения (33) и условия однозначности перемещений

$$\alpha/(A_{45} + A_{44}\mu_3) - \bar{\alpha}/(A_{45} + A_{44}\bar{\mu}_3) = 0.$$

Численные исследования были проведены для некоторой модельной ортотропной пластинки. Когда направления осей координат совпадают с главными направлениями упругости, комплексный параметр μ_3 возьмем равным $0.25i$. При повороте осей координат Ox_1 и Ox_2 на угол φ вокруг оси Ox_3 получаем срезы, обладающие свойствами пластинки, имеющей плоскость упругой симметрии. Например, для $\varphi = 30^\circ$ получим $\mu_3 = 0.5302 + 0.3265i$, для $\varphi = 60^\circ$ будем иметь $\mu_3 = 1.3674 + 0.8421i$, а для $\varphi = 90^\circ$ $\mu_3 = 4i$.

Исследования проводились для случая $N(s) = P = const$, $t_4 = t_5 = 0$ в зависимости от различных значений параметра φ и полуосей a , b эллиптической полости. Анализ значений напряжений $\sigma_{\theta x_3}/P = (\sigma_{40} \cos(n, x_1) - \sigma_{50} \cos(n, x_2))/P$ на контурах эллиптических и круговой полостей показали, что напряжения на контуре являются знакопеременными и для эллиптических полостей их значения существенно меняются в зависимости от угла φ (табл. 1). При этом для пластины с плоскостью упругой симметрии ($\varphi = 30^\circ$ и $\varphi = 60^\circ$) имеет место увеличение концентрации напряжений по сравнению с ортотропным случаем ($\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$). Для круговой полости максимальные по абсолютному значению напряжения остаются постоянными для любого среза, меняется лишь точка локализации этих значений.

Таблица 1.

θ	a=1, b=0.5				a=1, b=1				a=0.5, b=1			
	φ				φ				φ			
	0	30	60	90	0	30	60	90	0	30	60	90
0	0	-1.37	-0.53	0	0	-1.37	-0.53	0	0	-1.37	-0.53	0
15	1.19	-1.51	-1.51	-0.58	1.87	-1.87	-0.88	-0.25	1.91	-1.52	-0.65	-0.10
30	0.63	1.25	-2.72	-1.19	1.37	0	-1.37	-0.53	2.26	-1.41	-0.81	-0.21
45	0.37	1.02	-0.32	-1.81	0.88	1.87	-1.87	-0.88	1.81	0.32	-1.02	-0.37
60	0.21	0.81	1.41	-2.26	0.53	1.37	0	-1.37	1.19	2.72	-1.25	-0.63
75	0.10	0.65	1.52	-1.91	0.25	0.88	1.87	-1.87	0.58	1.51	1.51	-1.19
90	0	0.53	1.37	0	0	0.53	1.37	0	0	0.53	1.37	0
105	-0.10	0.41	1.17	1.91	-0.25	0.25	0.88	1.87	-0.58	-0.04	0.48	1.19
120	-0.21	0.29	0.95	2.26	-0.53	0	0.53	1.37	-1.19	-0.42	0.09	0.63
135	-0.37	0.13	0.71	1.81	-0.88	-0.25	0.25	0.88	-1.81	-0.71	-0.13	0.37
150	-0.63	-0.09	0.42	1.19	-1.37	-0.53	0	0.53	-2.26	-0.95	-0.29	0.21
165	-1.19	-0.48	0.04	0.58	-1.87	-0.88	-0.25	0.25	-1.91	-1.17	-0.41	0.10
180	0	-1.37	-0.53	0	0	-1.37	-0.53	0	0	-1.37	-0.53	0

В табл. 2 даны максимальные и минимальные значения напряжений $\sigma_{\theta x_3}/P$, возникающие на контурах различных эллиптических полостей. Вычисления проводились для пластин, обладающих разной степенью анизотропии. Исследованы три

вида ортотропных материалов с чисто мнимыми параметрами μ_3 и для каждого из этих материалов рассмотрены срезы, соответствующие углу поворота $\varphi = 45^\circ$. В табл. 2 также приведены напряжения для изотропной пластины, у которой $\mu_3 = i$.

Таблица 2.

№	μ_3	$a=1, b=0.1$	$a=1, b=0.5$	$a=1, b=1$	$a=0.5, b=1$	$a=0.1, b=1$
1	$0.25i$	0.950	1.570	1.875	2.288	4.013
		-0.950	-1.570	-1.875	-2.288	-4.013
	$0.882 + 0.471i$	0.954	1.318	1.875	2.607	4.836
		-4.836	-2.607	-1.875	-1.318	-0.954
2	$0.5i$	0.345	0.435	0.750	1.136	2.354
		-0.345	-0.435	-0.750	-1.136	-2.354
	$0.600 + 0.800i$	1.014	0.600	0.750	1.087	2.250
		-2.250	-1.087	-0.750	-0.600	-1.014
3	$0.707i$	0.723	0.037	0.354	0.720	1.730
		-0.723	-0.037	-0.354	-0.720	-1.730
	$0.333 + 0.943i$	1.070	0.414	0.354	0.601	1.551
		-1.551	-0.601	-0.354	-0.414	-1.070
4	i	1.195	0.348	0	0.348	1.195
		-1.195	-0.348	0	-0.348	-1.195

Из данных табл. 2 следует также, что расположение эллиптической полости относительно направлений упругости существенно влияет на величину напряжений. Так, при $\mu_3 = 0.25i$ максимальные напряжения меняются от значения 0.950 до 4.013, а при $\varphi = 45^\circ$ - от 0.954 до 4.836. Когда параметр μ_3 приближается к мнимой единице (ослабление анизотропии), т. е. свойства анизотропного материала стремятся к свойствам изотропного материала, различие между максимальными значениями напряжений при различном расположении полостей уменьшаются.

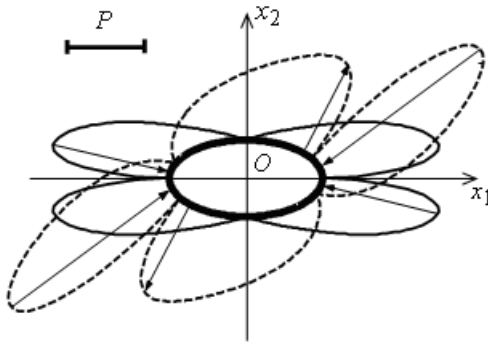


Рис. 1. Распределение напряжений $\sigma_{\theta x_3}/P$ около эллиптической полости в зависимости от параметра μ_3 . Сплошная кривая - $\mu_3 = 0.25i$; штриховая - $\mu_3 = 0.882 + 0.471i$; полуоси эллипса - $a = 1, b = 0.5$.

контура.

Выводы. Получены однородные решения уравнений трехмерной теории упругости для анизотропных пластин, на плоских гранях которых нормальное напряжение

На рисунке линии со стрелками у контура эллипса показывают зоны сжимающих напряжений, а со стрелками у линий напряжений — зоны растягивающих напряжений. Как видно из рисунка, наличие в материале более общего вида анизотропии приводит к существенно перераспределению напряжений вблизи

и тангенциальные перемещения равны нулю. Предложены способы интегрирования разрешающих уравнений. Найдено явное аналитическое решение задачи типа антиплоской деформации для пластины с эллиптической полостью в случае действия постоянной по толщине нагрузки. Проведенные исследования напряженного состояния пластины позволяют сделать выводы о том, что расположение полости относительно направлений упругости существенно влияет на места возникновения концентрации напряжений на контуре и на величину напряжения в этих местах, а усиление анизотропии, как правило, приводит к увеличению максимальных по абсолютному значению напряжений.

1. *Космодамианский А.С.* Концентрация внутренней энергии в многосвязных телах // Прикл. механика. — 2002. — 38, №4. — С. 21–48.
2. *Космодамианский А.С.* Постранственные задачи теории упругости для многосвязных пластин: Обзор // Прикл. механика. — 1983. — 19, №12. — С. 3–21.
3. *Немиш Ю.Н.* Развитие аналитических методов в трехмерных задачах статики анизотропных тел (обзор) // Прикл. механика. — 2000. — 36, №2. — С. 3–38.
4. *Подильчук Ю.Н.* Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально – изотропного тела в канонической форме (обзор) // Прикл. механика. — 1997. — 33, №10. — С. 3–30.
5. *Алтухов Е.В.* Статические трехмерные задачи для трансверсально – изотропных пластин // Механика композитов: В 12 т; Т 7: Концентрация напряжений / Под ред. А.Н. Гузя, А.С. Космодамианского, В.П. Шевченко. — К.: А.С.К., 1998. — С. 114–137.
6. *Алтухов Е.В.* Напряженное состояние трансверсальных пластин с торцами, покрытыми диафрагмой // Теорет. и прикл. механика. — 1996. — Вып. 26. — С. 3–12.
7. *Лезницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. — М.: Наука, 1977. — 415 с.
8. *Лурье А.И.* Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955. — 491 с.

E.V. Altukhov, A.V. Vinnik

Anisotropic plates' stressed state in case the flat edges are covered with a diaphragm.

The three-dimensional problem of an elastic equilibrium of an anisotropic plate which flat edges are covered with a diaphragm is considered. For this class of problems homogeneous solutions are obtained. Numerical researches of a stress state of an infinite plate with an elliptic cavity on which lateral surface exterior efforts are set fixed on width carried out.

Keywords: *three-dimensional homogeneous solutions, anisotropic plates, layer with an elliptic cavity.*

Є.В. Алтухов, А.В. Вінник

Напружений стан анізотропних пластин з торцями, що покриті діафрагмою.

Розглянуто тривимірну задачу пружної рівноваги анізотропної пластини, плоскі грані якої покриті діафрагмою. Для цього класу задач одержано однорідні розв'язки. Проведено чисельні дослідження напруженого стану нескінченної пластини з еліптичною порожниною, на бічній поверхні якої завдано постійні по товщині зовнішні зусилля.

Ключові слова: *тривимірні однорідні розв'язки, анізотропні пластини, шар з еліптичною порожниною.*