УДК 531.38

©2009. **Д.Е. Прокопюк**

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ НЕАВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С НЕГОЛОНОМНЫМИ СВЯЗЯМИ

Рассматривается задача стабилизации для нелинейных управляемых систем. Получено условие, при котором частное нетривиальное решение можно стабилизировать с помощью управления с обратной связью. Получено условие на норму отклонения от частного решения, при котором сохраняется свойство асимптотической устойчивости.

Введение. Проблема стабилизации нелинейных динамических систем занимает важное место в современной теории управления. Для линейных систем известно такое соотношение между качественными свойствами управляемости и стабилизируемости: если система управляема, то она стабилизируема. В связи с этим результатом возникает вопрос: является ли свойство локальной управляемости нелинейной системы достаточным условием для ее стабилизируемости? Из результатов, полученных R.Brockett [1] следует, что в отличие от линейных систем, для нелинейных систем свойство управляемости не является достаточным условием для асимптотической стабилизируемости.

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos\Theta; \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin\Theta; \\ \dot{\Theta} = u_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $\zeta(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \Theta(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ – фазовый вектор,

$u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ – вектор управления.

Предположим, что $\zeta^0(t) = \big(x_1^0(t);\, x_2^0(t);\, \Theta^0(t)\big)$ – частное решение системы (1), $\big(u_1^0(t);\, u_2^0(t)\big)$ – соответствующее управление.

Далее будет изучена задача стабилизации решения $\zeta^0(t) = \big(x_1^0(t);\, x_2^0(t);\, \Theta^0(t)\big)$, которая состоит в следующем: нужно определить функции управления $u_i = u_i(\zeta(t), t)$ так, чтобы решение $\zeta^0(t)$ было асимптотически устойчиво по Ляпунову.

В системе (1) введем замену переменных фазового вектора ([2]):

$$\begin{cases} z_1 = \Theta; \\ z_2 = x_1 \cos\Theta + x_2 \sin\Theta; \\ z_3 = x_1 \sin\Theta - x_2 \cos\Theta. \end{cases} \tag{2}$$

Введем управления ν_1, ν_2:

$$\begin{cases} \nu_1 = u_1 - z_3 u_2; \\ \nu_2 = u_2. \end{cases} \tag{3}$$

Пользуясь формулами (2) и (3), систему (1) запишем следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \nu_2; \\ \dot{z}_2 = \nu_1; \\ \dot{z}_3 = z_2 \nu_2. \end{cases} \tag{4}$$

Якобиан преобразования, которое связывает компоненты фазового вектора x_1, x_2, Θ и управления u_1, u_2 с соответствующими значениями z_1, z_2, z_3, ν_1, ν_2, отличен от нуля. Система (1) эквивалентной заменой (2), при соответствующем управлении (3), приводится к виду (4).

1. Исследование управляемости системы и устойчивости ее решения. Предположим, что

$$z^0(t) = \big(z_1^0(t);\, z_2^0(t);\, z_3^0(t)\big) \tag{5}$$

является решением системы (4), с соответствующим управлением

$$\big(\nu_1^0(t); \nu_2^0(t)\big) \tag{6}$$

для $t \in [0; +\infty)$.

Введем замену:

$$\begin{cases} z_1 = z_1^0 + \Delta z_1; \\ z_2 = z_2^0 + \Delta z_2; \\ z_3 = z_3^0 + \Delta z_3; \end{cases} \qquad \begin{cases} \nu_1 = \nu_1^0 + \Delta \nu_1; \\ \nu_2 = \nu_2^0 + \Delta \nu_2. \end{cases} \tag{7}$$

Тогда система уравнений возмущенного движения имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta \dot{z}_1 = \nu_2^0 + \Delta \nu_2 - \dot{z}_1^0; \\ \Delta \dot{z}_2 = \nu_1^0 + \Delta \nu_1 - \dot{z}_2^0; \\ \Delta \dot{z}_3 = z_2^0 \nu_2^0 + z_2^0 \Delta \nu_2 + \nu_2^0 \Delta z_2 + \Delta z_2 \Delta \nu_2 - \dot{z}_3^0. \end{cases} \tag{8}$$

Запишем систему линейного приближения в окрестности частного решения (5):

$$\begin{cases} \Delta \dot{z}_1 = \Delta \nu_2; \\ \Delta \dot{z}_2 = \Delta \nu_1; \\ \Delta \dot{z}_3 = \nu_2^0 \Delta z_2 + z_2^0 \Delta \nu_2. \end{cases} \tag{9}$$

Система (9) в матричном виде:

$$\Delta \dot{z} = A \Delta z + B \Delta \nu, \tag{10}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2^0(t) & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & z_2^0(t) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим вопрос об управляемости системы (10). Воспользуемся следующей теоремой:

Теорема 1. *([3]) Пусть для некоторого* $t \in [0;T]$ $\operatorname{Span}\{B_i(t)\nu;\ \nu \in \mathbb{R}^m, i \geq 0\} = \mathbb{R}^n$, *где* $B_i\left(\frac{d}{dt} - A\right)^i B$, *тогда линейная система* $\dot{y} = A(t)y + B(t)\nu$ *управляема на* $[0,T]$. *Если при выполнении этих условий матрицы* A *и* B *аналитичны на* $[0,T]$,*тогда* $\operatorname{Span}\{B_i(t)\nu;\ \nu \in \mathbb{R}^m, i \geq 0\} = \mathbb{R}^n$ *для всех* $t \in [0,T]$.

Запишем соответствующие матрицы B_i для системы (10):

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & z_2^0(t) \end{pmatrix}; \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & z_2^0(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \nu_2^0(t) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\nu_2^0(t) & z_2^0(t) \end{pmatrix};$$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2^0(t) & -\nu_2^0(t) & z_2^0(t) \end{pmatrix},$$

при условии $\nu_2^0(t) \neq 0$.

Таким образом, по теореме 1 система (10) управляема при $\nu_2^0 \neq 0$.

Рассмотрим задачу стабилизации системы (10).

Пусть управление системы (10) линейно зависит от фазовых координат, т.е. $\Delta\nu = K\Delta z$, где $K = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, тогда система (10) имеет вид:

$$\Delta\dot{z} = (A + BK)\Delta z. \tag{11}$$

Для проверки условий асимптотической устойчивости решения $\Delta z = 0$ системы (11) с постоянными коэффициентами воспользуемся теоремой Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевого решения линейной системы.

Утверждение 1. *Пусть* $\nu_2^0 = \text{const} \neq 0$, *тогда управление* $\Delta\nu = K\Delta z$ *вида*

$$\Delta\nu = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{1}{\nu_2^0} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Delta z \tag{12}$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (11) *с постоянными коэффициентами.*

Доказательство. Характеристическое уравнение для системы (11) имеет вид:

$$P(\lambda) = \det(\lambda E - A - BK) = \begin{vmatrix} \lambda - d & -e & -f \\ -a & \lambda - b & -c \\ -z_2^0 d & -(ez_2^0 + \nu_2^0) & \lambda - fz_2^0 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

т.е. $P(\lambda) = \lambda^3 + (-d - b - fz_2^0)\lambda^2 + (db + fz_2^0(d+b) - dfz_2^0 - c(ez_2^0 + \nu_2^0) - ae)\lambda +$
$+ fdbz_2^0 + cd(ez_2^0 + \nu_2^0) + aefz_2^0 - af(ez_2^0 + \nu_2^0) - ecdz_2^0 - dbfz_2^0 = 0.$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни (13): $\forall i = 1,2,3,\ \alpha_i \in \mathbb{R}_- = \{\beta \in \mathbb{R} : \beta < 0\}$. Для нахождения значений корней (13) воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} -d - b - fz_2^0 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3; \\ bd + (d+b)fz_2^0 - fdz_2^0 - c(ez_2^0 + \nu_2^0) - ae = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3; \\ \nu_2^0(cd - af) = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3. \end{cases} \tag{14}$$

Для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$ следующие значения элементов матрицы K удовлетворяют (14):

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -\frac{1}{\nu_2^0} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

т.е. управление с обратной связью $\Delta\nu = K\Delta z$ решает данную задачу стабилизации. В результате подстановки (15) в (10) получаем:

$$\Delta\dot{z} = A_0 \Delta z, \tag{16}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{\nu_2^0} \\ -z_2^0 & \nu_2^0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

□

2. Построение функции Ляпунова. Рассмотрим линейную неавтономную систему:

$$\Delta\dot{z} = A_1(t)\Delta z, \tag{18}$$

где $A_1(t) = A_0 + R(t)$, $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{\nu_2^0} \\ -z_2^0 & \nu_2^0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{const}.$

Утверждение 2. *Пусть* $\gamma = \mathrm{const}$, $\gamma \in (0,1)$, *и пусть элементы матрицы*

$$Q = \begin{pmatrix} 1/4\left(4 + 6.5(z_2^0)^2) + 1.5\left(\frac{z_2^0}{\nu_2^0}\right)^2\right) & -1/4\left(3.5\nu_2^0 z_2^0 + \frac{z_2^0}{2\nu_2^0}\right) & -1/4\left(6.5z_2^0 + 1.5\frac{z_2^0}{(\nu_2^0)^2}\right) \\ -1/4\left(3.5\nu_2^0 z_2^0 + \frac{z_2^0}{2\nu_2^0}\right) & 1/2(1 + (\nu_2^0)^2) & \nu_2^0 \\ -1/4\left(6.5z_2^0 + 1.5\frac{z_2^0}{(\nu_2^0)^2}\right) & \nu_2^0 & 2.5 + \frac{1}{2(\nu_2^0)^2} \end{pmatrix}$$

такие, что Q определенно положительна. Пусть также выполняется следующая оценка $\|R(t)\| \le \frac{\gamma}{2\|Q\|}$. Тогда решение $\Delta z = 0$ системы (18) *асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Пусть существует $Q \in \mathrm{mat}(3\times 3)$: $(q_{ij}) = (q_{ji})$, $(Q\Delta z, \Delta z) > 0$, $\forall \Delta z \neq 0$. Введем функцию $w(\Delta z) = 1/2\Delta z^T Q\Delta z$, тогда производная w в силу системы $\Delta\dot{z} = A_0\Delta z$ имеет вид

$$\dot{w}(\Delta z)|_{(16)} = 1/2((A_0\Delta z)^T Q\Delta z + \Delta z^T QA_0\Delta z) = -\|\Delta z\|^2. \tag{19}$$

Т.к. в системе (18) матрица $A_1(t) = A_0 + R(t)$, тогда

$$\dot{w}(\Delta z)|_{(18)} = -\|\Delta z\|^2 + r(t). \tag{20}$$

Элементы матрицы $Q = \begin{pmatrix} M & D & E \\ D & N & F \\ E & F & T \end{pmatrix}$, которые удовлетворяют системе (19) имеют вид:

$$\begin{cases} N = 1/2(1 + (\nu_2^0)^2); \\ T = 2.5 + \dfrac{1}{2(\nu_2^0)^2}; \\ D = -1/4\left(3.5\nu_2^0 z_2^0 + \dfrac{z_2^0}{2\nu_2^0}\right); \\ E = -1/4\left(6.5 z_2^0 + 1.5\dfrac{z_2^0}{(\nu_2^0)^2}\right); \\ M = 1/4\left(4 + 6.5(z_2^0)^2 + 1.5(\dfrac{z_2^0}{\nu_2^0})^2\right); \\ F = \nu_2^0. \end{cases} \tag{21}$$

Считаем, что параметры ν_2^0; z_2^0 такие, что матрица Q положительно определена. Для системы $\Delta\dot{z} = A_0\Delta z$ построена функция $w(\Delta z) = 1/2\Delta z^T Q\Delta z$, которая удовлетворяет теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости. Теперь найдем условия, при которых функция $w(\Delta z) = 1/2\Delta z^T Q\Delta z$ будет функцией Ляпунова для системы $\Delta\dot{z} = A_1(t)\Delta z$. Будем искать условия на отклонение по норме матрицы $A_1(t)$ от матрицы A_0, при которых выполняется оценка $\|r(t)\| \leq \gamma\|\Delta z\|^2$, $\gamma \in (0,1)$,

$$r(t) = 1/2((R(t)\Delta z)^T Q\Delta z + \Delta z^T QR(t)\Delta z); \tag{22}$$

$$\|r(t)\| \leq \|R^T Q + QR\|\|\Delta z\|^2 \leq (\|R^T Q\| + \|QR\|)\|\Delta z\|^2 \leq 2\|Q\|\|R\|\|\Delta z\|^2 \leq \gamma\|\Delta z\|^2, \tag{23}$$

т.е.

$$\|R\| \leq \frac{\gamma}{2\|Q\|}. \tag{24}$$

При выполнении условия (23) производная функции Ляпунова удовлетворяет неравенство

$$\dot{w}(\Delta z)|_{(18)} < 0, \qquad \forall \Delta z \neq 0, \tag{25}$$

т.е. $w(\Delta z) = 1/2\Delta z^T Q\Delta z$ удовлетворяет теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости для системы (18). $\square$

Замечание. Существуют значения параметров ν_2^0; z_2^0, при которых матрица Q не является определенно положительной. Например: при $\nu_2^0 = -1$; $z_2^0 = 1$ главные миноры матрицы имеют значения: $M_1 = -1$; $M_2 = 2$; $M_3 = 3$.

Рассмотрим коэффициенты матрицы Q при $z_2^0 = 0$, $\nu_2^0 \neq 0$:

$$\begin{cases} N = 1/2(1 + (\nu_2^0)^2); \\ T = 2.5 + \dfrac{1}{2(\nu_2^0)^2}; \\ D = 0; \\ E = 0; \\ M = 1; \\ F = \nu_2^0. \end{cases}$$

При таких значениях коэффициентов матрица квадратичной формы $w(\Delta z)$ положительно определена. Тогда класс систем, для которых матрица Q положительно определена – это системы вида (18) с матрицей

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -\frac{1}{\nu_2^0} \\ 0 & \nu_2^0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Оценка области притяжения. Обозначим через

$$G = \{x: \ \dot{w}(x) \leq 0\}, \tag{26}$$

$$G_c = \{x: \ w(x) \leq c\}. \tag{27}$$

Будем искать максимальное $c > 0: \ G_c \subseteq G$.

Квадратичная форма $w(\Delta z) = 1/2 \Delta z^T Q \Delta z$ линейным невырожденным преобразованием

$$\begin{pmatrix} \Delta z_1 \\ \Delta z_2 \\ \Delta z_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \text{ где } P = \begin{pmatrix} 1 & -F/M & \frac{F^2}{(NM-E^2)} - \frac{D}{M} \\ 0 & 1 & -\frac{FM}{NM-E^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

приводится к виду

$$w(y) = My_1^2 + \left(N - \frac{E^2}{M}\right) y_2^2 + \left(T - \frac{D^2}{M} - \frac{MF^2}{NM - E^2}\right) y_3^2. \tag{29}$$

Функция $w(y)$ ограничена в эллипсоиде

$$My_1^2 + \left(N - \frac{E^2}{M}\right) y_2^2 + \left(T - \frac{D^2}{M} - \frac{MF^2}{NM - E^2}\right) y_3^2 \leq c. \tag{30}$$

Обозначим

$$a_1^2 = c/M; \qquad a_2^2 = \frac{c}{N - E^2/M}; \qquad a_3^2 = \frac{c}{T - \frac{D^2}{M} - \frac{MF^2}{NM - E^2}}. \tag{31}$$

Тогда из неравенства (30) следует

$$\min \|y\|^2 \leq \sum_{i=1}^{3} \frac{y_i^2}{a_i^2} \leq 1. \tag{32}$$

Из выражения (32) следует оценка:

$$\|y\| \leq \frac{1}{\sqrt{\min\left(\frac{1}{a_1^2}; \frac{1}{a_2^2}; \frac{1}{a_3^2}\right)}}. \tag{33}$$

Используя формулы (28), (33), получим выражение

$$\|x\| \leq \|P\|\|y\| \leq \|P\| \frac{1}{\sqrt{\min\left(\frac{1}{a_1^2}; \frac{1}{a_2^2}; \frac{1}{a_3^2}\right)}} = \|P\| \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\min\left(M; N - \frac{E^2}{M}; T - \frac{D^2}{M} - \frac{MF^2}{NM - E^2}\right)}}, \tag{34}$$

но $\|x\| \leq \frac{\gamma}{2\|Q\|}$, тогда искомая константа имеет вид:

$$c_{\max} = \frac{\gamma}{2\|Q\|\|P\|} \sqrt{\min\left(M; N - \frac{E^2}{M}; T - \frac{D^2}{M} - \frac{MF^2}{NM - E^2}\right)}. \tag{35}$$

Таким образом, построена область притяжения, которая имеет вид

$$G_c = \{x : \ w(x) \leq c_{\max}\}.$$

4. Результаты вычислений. На основании полученных результатов исследовано частное решение системы (1):

$$\begin{cases} x_1 = R \sin t; \\ x_2 = -R \cos t; \\ \Theta = t, \end{cases} \tag{36}$$

которое соответствует управлению:

$$\begin{cases} u_1 = R; \\ u_2 = 1. \end{cases} \tag{37}$$

Решению (6) системы (1) соответствует такое решение системы (2):

$$\begin{cases} z_1^0 = t; \\ z_2^0 = 0; \\ z_3^0 = R. \end{cases} \tag{38}$$

Управление системы (2):

$$\begin{cases} \nu_1^0 = 0; \\ \nu_2^0 = 1. \end{cases} \tag{39}$$

Поскольку $\nu_2^0 = const \neq 0$, то мы можем воспользоваться утверждением 1, из которого следует, что тривиальное решение системы

$$\Delta \dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta z$$

является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Из формул (21), (38), (39) следует, что

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|Q - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(3-\lambda) - 1) = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 1;$$

$$\max \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = 2 + \sqrt{2} = \|Q\|.$$

Матрица Q симметрична и положительно определена.

Решение (6) асимптотически устойчиво по Ляпунову (удовлетворяет утверждению 1). Областью притяжения функции Ляпунова является множество

$$G_c = \left\{ x : w(x) \leq \frac{\gamma}{2(2+\sqrt{2})} \right\}.$$

Из утверждения 2 следует, что для любых решений $z(t)$ системы (2): $\|z - z_0\| \leq \frac{\gamma}{2\|Q\|}$ следует, что $\Delta z = 0$ системы (4) асимптотически устойчиво.

Таким образом, для решений $x(t)$ системы (1) при следующих отклонениях по норме от частного решения $x^0(t)$ будет выполнено свойство асимптотической устойчивости:

$$\|x - x_0\| \leq \|z - z_0\| \|\dot{x}(\zeta)\| \leq \frac{\gamma \|\dot{x}(\zeta)\|}{Q}.$$

Выводы. В работе рассмотрена математическая модель движения неголономной механической системы с управлением. Получены такие основные результаты:

1. Исследована система дифференциальных уравнений, получены условия, при которых система является управляемой и ее невозмущенное движение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

2. Для системы с переменными коэффициентами получены условия, при которых решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

3. Исследовано возмущенное движение системы в окрестности частного решения, которое соответствует определенному программному управлению. Получены условия асимптотической устойчивости решения и построена область допустимых отклонений в фазовом пространстве.

1. *Brockett R.W.* Asymptotic sstability and feedback stabilization // Differential Geometric Control Theory (Brockett R.W., Millman R.S. and Sussmann H.J. eds.). – Boston: Birkhauser, 1983. – P.181-191.
2. *Sontag E.D.* Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances // Nonlinear analysis, differential equations and control (Montreal, QC, 1998). – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1999. – P.551-598
3. *Silverman L.M., Meadows H.E.* Controllability and observability in time variable linear systems // SIAM J. On Control and Optimization. – 1967. – V.5. – P.64-73.

Донецкий национальный ун-т
denis4321@ukr.net

Получено 30.10.09