УДК 517.54

 О.А. Очаковская

ТЕОРЕМЫ О ДВУХ РАДИУСАХ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Получены новые теоремы о среднем значении для некоторых дифференциальных уравнений. Рассмотрены интегралы от решений с полиномиальным весом по всем сферам с двумя фиксированными радиусами.

Введение. Пусть $\mathbb{R}^n$ – вещественное евклидово пространство размерности n с евклидовой нормой $|\cdot|$, G – непустое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, ∂G – граница G. Для непустых множеств $A, B \subset \mathbb{R}^n$ положим

$$\mathrm{dist}(A,B) = \inf\{|x-y| : x \in A,\ y \in B\}.$$

Для любого $r > 0$ обозначим $S_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$. Пусть также $\mu(S_r)$ – площадь сферы S_r и $d\omega$ – поверхностная мера на S_r. Как обычно, $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция, J_ν – функция Бесселя первого рода порядка ν.

Классическая теорема Гаусса о среднем для гармонических функций утверждает, что решение f уравнения Лапласа $\Delta f = 0$ в G характеризуется следующим условием

$$f(x) = \frac{1}{\mu(S_r)} \int\limits_{S_r} f(x+\sigma)d\omega(\sigma), \qquad (1)$$

которое предполагается выполненным для всех $x \in G$, $0 < r < \mathrm{dist}(x, \partial G)$. Позже Д.Дельсарт установил, что гармоничность на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ является следствием такого же условия, выполненного для всех сфер $S_r \subset \mathbb{R}^n$, радиусы которых могут принимать лишь два значения r_1 и r_2, таких, что

$$\frac{r_1}{r_2} \notin \left\{ \frac{\alpha}{\beta} : \frac{J_{n/2}(\alpha)}{\alpha^{n/2}} = \frac{J_{n/2}(\beta)}{\beta^{n/2}} = \frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2+1)}, \quad \alpha, \beta > 0 \right\} \qquad (2)$$

(см., например, [1, глава 5]). Отметим, что до сих пор неизвестно, содержит ли множество в (2) числа, отличные от 1 (проблема Дельсарта). Теорема о двух радиусах получила дальнейшее уточнение и развитие в ряде работ Л.Флатто, Л.Зальцмана, К.А.Беренстейна, Д.Смита, Р.Гэя, А.Ижера, В.В.Волчкова, Вит. В.Волчкова (см. [1]–[6] и библиографию к этим работам). Среди полученных результатов можно отметить локальные варианты теоремы о двух радиусах (см. [1], [5]), теоремы об одном радиусе, а также аналоги на симметрических пространствах (см. [1], [5], [6]).

В работе Л.Зальцмана [4] получен аналог теоремы о двух радиусах для решений уравнения в частных производных вида

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f = 0, \tag{3}$$

где P – однородный многочлен от n переменных с постоянными коэффициентами. К таким уравнениям относятся, например, классические уравнения Лапласа, Гельмгольца и Даламбера. Соответствующее интегральное уравнение, которое является аналогом (1), для данного случая имеет вид

$$\int_{B_r} f(x+y) d\mu_r(y) = 0, \tag{4}$$

где $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq r\}$ и $d\mu_r$ – мера с носителем в B_r, зависящая от r и уравнения (3). Аналогом множеств (2) в этих случаях являются множества отношений положительных корней некоторых целых функций, связанных с (3). Отметим, что для некоторых уравнений вида (3) (например, для уравнений Гельмгольца и Даламбера) аналоги множеств (2) содержат элементы, отличные от единицы.

Некоторые уточнения теоремы Л.Зальцмана для случая, когда многочлен P является гармоническим, получены В.В.Волчковым в [1, глава 5]. В этом случае аналогом условий (1), (4) является уравнение

$$\int_{S_r} f(x+\sigma) P(\sigma) dw(\sigma) = 0 \tag{5}$$

(см. [1, глава 5, теорема 5.5]).

В данной работе изучается уравнение (5) на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Основной результат работы обобщает и уточняет теорему Л.Зальцмана для гармонического P в следующем направлении: вместо условия (5) рассматривается подобное уравнение для двух функций f_1 и f_2 с $r = r_1, r_2$, соответственно, и при этом указываются различные оценки разности $f_1 - f_2$, позволяющие сделать вывод, что f_1 и f_2 удовлетворяют уравнению (3).

1. Формулировки основных результатов. Перейдем к формулировкам основных результатов данной работы. Всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$ и $r_1, r_2 > 0$ фиксированы. Обозначим $L^1_{loc}(U)$ (соответственно $L^1(U)$) множества всех локально суммируемых (соответственно суммируемых) функций в области $U \subset \mathbb{R}^n$. Пусть также $A_r(U)$ – множество всех функций $f \in C(U)$, удовлетворяющих (5) для всех $x \in U$ таких, что сфера S_r содержится во множестве $U - x = \{y \in \mathbb{R}^n : y + x \in U\}$. Далее будем предполагать, что P – однородный гармонический многочлен n переменных степени k с постоянными коэффициентами. Положим

$$\Lambda_{n,k} = \left\{\frac{\alpha}{\beta} : J_{n/2+k-1}(\alpha) = J_{n/2+k-1}(\beta) = 0, \quad \alpha, \beta > 0\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\frac{r_1}{r_2} \notin \Lambda_{n,k}$, $f \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in A_{r_2}(\mathbb{R}^n)$. *Пусть также существует последовательность* $\{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ *положительных чисел такая, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\inf_{q\geq m} M_q^{1/q}\right)^{-1} = +\infty, \tag{6}$$

и существует $\gamma > 0$ *такое, что неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1(x) - f_2(x)|(1 + |x_1| + ... + |x_{n-1}|)^q dx_1...dx_{n-1} \leq M_q e^{\gamma|x_n|} \tag{7}$$

выполнено при любом $q \in \mathbb{N}$ *для всех* $x_n \in \mathbb{R}^1$. *Тогда* $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_1 = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_2 = 0$ *в смысле распределений.*

Отметим, что условие (6) впервые возникло совсем по другому поводу в теории квазианалитических классов функций (см., например, [7, разд. 1.3], [8, гл. 1]. Оценка (7) вместе с условием (6) требует достаточно быстрого убывания $f_1 - f_2$ вдоль переменных $x_1, ..., x_{n-1}$.

Далее будет указана явная оценка для $f_1 - f_2$, из которой виден характер этого убывания (см. теорему 3 ниже). Следующий результат показывает точность условий теоремы 1.

Теорема 2. *Для любых* $r_1, r_2, \varepsilon > 0$ *и любой последовательности* $\{M_q\}_{q=1}^{\infty}$ *положительных чисел такой, что*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left(\inf_{q\geq m} M_q^{1/q}\right)^{-1} < +\infty,$$

существуют функции $f_1 \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *и* $f_2 \in A_{r_2}(\mathbb{R}^n) \cap C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ *такие, что* $\left|P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_1\right| + \left|P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_2\right| \neq 0$ *и*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |f_1(x) - f_2(x)|(1 + |x_1| + ... + |x_{n-1}|)^q dx_1...dx_{n-1} \leq M_q e^{\varepsilon|x_n|}$$

для всех $q \in N$ *и для всех* $x_n \in \mathbb{R}^n$.

Одним из следствий теорем 1, 2 является

Теорема 3. *Имеют место следующие утверждения.*

1) Пусть $\frac{r_1}{r_2} \notin \Lambda_{n,k}$, $f_1 \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in A_{r_2}(\mathbb{R}^n)$. *Пусть также существует возрастающая положительная функция* $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$ *и постоянные* $c_1, c_2 > 0$ *такие, что*

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t\varkappa(t)} = +\infty, \tag{8}$$

$$\varkappa(t) = o\left(\frac{t}{\ln t}\right), \quad t \to +\infty, \tag{9}$$

$$\varkappa(t) = O\left(\varkappa\left(\frac{t}{\varkappa(t)}\right)\right), \quad t \to +\infty, \tag{10}$$

$$t\varkappa'(t) = o(\varkappa(t)), \quad t \to +\infty, \tag{11}$$

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq c_1 \exp\left(-\frac{|x_1| + ... + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + ... + |x_{n-1}|)} + c_2|x_n|\right) \tag{12}$$

при всех $x \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_1 = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_2 = 0$ *в смысле распределений.*

2) Для любых $r_1, r_2, \varepsilon > 0$ *и любой возрастающей функции* $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ *такой, что*

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t\varkappa(t)} < +\infty \tag{13}$$

существуют функции $f_1 \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *и* $f_2 \in A_{r_2}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$, *для которых* $\left|P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_1\right| + \left|P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_2\right| \neq 0$ *и*

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq \exp\left(-\frac{|x_1| + ... + |x_{n-1}|}{\varkappa(|x_1| + ... + |x_{n-1}|)} + \varepsilon|x_n|\right)$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Условия (8)–(11) выполнены для многих медленно растущих функций $\varkappa$. Например, нетрудно видеть, что они выполнены для всякой положительной функции $\varkappa \in C^1[0, +\infty)$, совпадающей при достаточно больших t с функцией

$$\varkappa_m(t) = (\ln t)(\ln\ln t)...(\underbrace{\ln\ln ... \ln t}_{m})$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. С другой стороны, если $\varkappa : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ совпадает при больших t с функцией

$$\varkappa_m(t)(\underbrace{\ln\ln ... \ln t}_{m})^{1+\delta}$$

для некоторых $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, то выполнено условие 13.

Из второго утверждения теоремы 3 следует, что условия (8) и (12) в ее правом утверждении являются неулучшаемыми. В то же время вопрос о необходимости условий (9)–(11) остается открытым. Используя метод работы [9], можно показать, что первое утверждение теоремы 3 останется верным, если (9)–(11) заменить единственным условием

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varkappa(t)}{\varkappa(t/\varkappa(t))} = 1,$$

и при этом вместо гладкости функции $\varkappa$ на $[0, +\infty)$ требуется только ее непрерывность. Таким образом, если несколько усилить условие (10), то можно убрать условие (9) и (11). Кроме того, доказательство теоремы 2 в работе [9] показывает, что первое утверждение теоремы 3 остается верным, если вместо условия (9) и (11) потребовать выполнение равенства

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\varkappa(\alpha t)}{\varkappa(t)}=1$$

при любом фиксированном $\alpha>0$.

2. Доказательство основных результатов. Для доказательства теоремы 1 нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть $M_1, M_2, ...$ – последовательность положительных чисел и пусть $\gamma>0$. Обозначим $A(\gamma,\{M_q\}_{q=1}^{\infty})$ – множество всех непрерывных функций $f:\mathbb{R}^n\to C$ таких, что*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x_1,...,x_n)|(1+|x_1|+...|x_{n-1}|)^q dx_1...dx_{n-1}\leq M_q e^{\gamma|x_n|}$$

для всех $q\in\mathbb{N}$ и всех $x_n\in\mathbb{R}^1$. Пусть $f\in A(\gamma,\{M_q\}_{q=1}^{\infty})$. Тогда свертка $f*\varphi\in A(\gamma,\{M_q(1+(n-1)R)^q\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(x)|e^{\gamma|x_n|}dx\}_{q=0}^{\infty})$ для любой $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре B_R.

Доказательство леммы 1 см. в [10, с.130].

Обозначим $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ – множество всех распределений с компактным носителем в $\mathbb{R}^n$. Пусть также $\mathcal{E}'_*(\mathbb{R}^n)$ – множество радиальных распределений в $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. Для распределения $h\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ символом $\hat{h}$ обозначим его преобразование Фурье, то есть

$$\hat{h}(z_1,...,z_n)=\langle h(x),e^{-i(z_1x_1+...,z_nx_n)}\rangle,\quad (z_1,...,z_n)\in\mathbb{C}^n.$$

Лемма 2. *Пусть $r>0$ и распределение $h_r\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой*

$$\langle h_r,f\rangle=\int_{S_r}P(\sigma)f(\sigma)dw(\sigma),\quad \text{где}\;\; f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n). \tag{14}$$

Тогда существует $\varphi_r\in\mathcal{E}'_*(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре B_r такое, что

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x_1},...,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)\varphi_r=h_r. \tag{15}$$

Доказательство. Используя (14) и [1, формула (1.5.29)], получаем

$$\hat{h}(z_1,...,z_n)=a_rP(z_1,...,z_n)I_{n/2+k-1}\left(r\sqrt{z_1^2+...+z_n^2}\right),$$

где $I_{n/2+k-1}(z)=J_{n/2+k-1}(z)z^{1-k-n/2}$ и постоянная a_r не зависит от $z\in\mathbb{C}^n$. Это означает, что при некоторой постоянной b_r распределение $\varphi_r\in\mathcal{E}'_*(\mathbb{R}^n)$, определенное равенством

$$\hat{\varphi}_r(z_1,...,z_n)=b_rI_{n/2+k-1}\left(r\sqrt{z_1^2+...+z_n^2}\right),$$

удовлетворяет (15). $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Положим $f = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(f_1 - f_2)$. Из равенства (15) и условия теоремы 1 следует, что $f * \varphi_{r_2} * \varphi_{r_1} = 0$. Это означает, что при любой $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ с компактным носителем $f * \varphi_{r_2} * \varphi \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n)$. Из условий (6), (7) и леммы 1 вытекает, что $f * \varphi_{r_2} * \varphi \in A(\gamma, \{M'_q\}_{q=1}^\infty)$ для некоторой последовательности $\{M'_q\}_{q=1}^\infty$, удовлетворяющей (6) и зависящей от φ. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1 в [1], отсюда заключаем, что $f * \varphi_{r_2} * \varphi = 0$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда из определения f следует, что $f_1 * \varphi \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n) \cap A_{r_2}(\mathbb{R}^n)$. По теореме Л.Зальцмана [4] $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right)(f_1 * \varphi) = 0$, откуда в силу произвольности φ имеем $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f_1 = 0$ в $\mathbb{R}^n$ в смысле распределений. Меняя в этом рассуждении r_1 и r_2, получаем аналогичное равенство для f_2. Таким образом, теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала рассмотрим случай, когда $\frac{r_1}{r_2} \in \Lambda_{n,k}$. По теореме Л.Зальцмана [4] существует $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая (5) при $r = r_1, r_2$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$, такое, что $P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f \neq 0$. Полагая $f_1 = f_2 = f$, получим требуемое утверждение. Пусть теперь $\frac{r_1}{r_2} \notin \Lambda_{n,k}$. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2 в [11], получаем, что существует ненулевая функция $f_1 \in A_{r_1}(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$, принадлежащая $A(\mathcal{E}, \{M_q\}_{q=1}^\infty)$. Полагая $f_2 = 0$, имеем утверждение теоремы 2 в полном объеме.

Для доказательства теоремы 3 достаточно повторить рассуждения из [10, стр.131-132] и использовать теоремы 1 и 2.

1. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht/Boston/London. – 2003. – 454p.
2. *Flatto L.* The converse of Gauss theorem for harmonic functions // J.Different. Equat. – 1965. – N1. – P.483-490.
3. *Berenstein C.A., Zalcman L.* Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. Math. Helv. – 1980. – V.55. – P.593-621.
4. *Zalcman L.* Mean values and differential equations // Israel J.Math. – 1973. – V.14. – P.339-352.
5. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer-Verlag London Limited, 2009. – 671pp.
6. *Волчков В. В.* Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Матем. сб. – 2001. – Т.192. – № 9. – С.17-38.
7. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4-х т. Т.1. – М.: Мир, 1986.
8. *Бадалян Г. В.* Квазистепенной ряд и квазианалитические классы функций. – М.: Наука, 1990.
9. *Очаковская О.А.* Свойства Лиувилля для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Труды ИПММ НАН Украины. – 2008. – Т.16. – С.156-162.
10. *Очаковская О.А.* Теоремы о двух радиусах на неограниченных областях // Труды ИПММ НАН Украины. – 2006. – Т.13. – С.126-133.
11. *Очаковская О.А.* Точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевой функции с нулевыми шаровыми средними // Матем. сб. – Т.199. – №1. – С.48-67.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ochakov@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 16.09.09