

УДК 531.38, 531.36

©2009. Ю.Б. Коносевиц

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ СКОРОСТИ УХОДА СИНХРОННОГО ГИРОСКОПА В КАРДАНОВОМ ПОДВЕСЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ ДВИГАТЕЛЯ

Изучается статически уравновешенный гироскоп в кардановом подвесе с неаксиально насаженным на вал ротором. Прибор установлен на неподвижном основании, трение на осях подвеса отсутствует, внутренняя карданова рамка и ротор образуют вместе синхронный электродвигатель. В работе проведено исследование зависимости скорости ухода такого гироскопа от параметров двигателя.

Введение. В работе [1] изучалось влияние малой динамической несимметрии ротора на равномерные вращения статически уравновешенного гироскопа в кардановом подвесе, установленного на неподвижном основании. Задача о гироскопе в кардановом подвесе рассматривалась в обобщенной постановке П.В.Харламова [2]. Лагранжевыми координатами такой системы являются углы α , β , φ , где α – угол поворота наружной "рамки" относительно основания, β – угол поворота внутренней "рамки" относительно наружной, φ – угол поворота ротора относительно внутренней "рамки". Предполагалось, что трение на осях подвеса отсутствует, а внутренняя карданова рамка и ротор образуют вместе электродвигатель синхронного типа. Предполагалось также, что для рассматриваемого семейства равномерных вращений выполнены условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения приведенной системы, линеаризованной в окрестности соответствующего равномерного вращения. На основании результатов статьи [3] было показано, что при малой динамической несимметрии ротора и малых начальных возмущениях возмущенное движение асимптотически стремится к псевдорегулярной прецессии вокруг наружной оси подвеса, то есть к регулярной прецессии, сопровождающейся периодическими колебаниями. Была получена общая формула угловой скорости псевдорегулярной прецессии (или, как говорят, угловой скорости ухода).

В качестве важного частного случая в [1] найдена формула угловой скорости ухода для гироскопа в кардановом подвесе, который отличается от обычно рассматриваемой модели только тем, что один из центробежных моментов инерции ротора отличен от нуля. Такая ситуация реализуется при неаксиальной насадке ротора на вал, когда ось динамической симметрии ротора составляет с осью вала малый угол δ .

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы с помощью этой формулы исследовать зависимость угловой скорости ухода от параметров, характеризующих вращающий момент двигателя и момент диссипативных сил относительно оси ротора.

1. Формула угловой скорости ухода. Алгебраическая сумма вращающего момента синхронного двигателя и момента диссипативных сил относительно оси

ротора представляется в виде

$$L = -\lambda_{p1}\gamma - \lambda_{d1}\dot{\gamma} + \lambda_{p2}\gamma^2 + \lambda_{d2}\dot{\gamma}^2 + \dots \quad (\lambda_{p1} > 0, \lambda_{d1} > 0), \quad (1)$$

где $\gamma = \varphi - \omega t - \varphi^0$, $\dot{\gamma} = \dot{\varphi} - \omega$, $\omega > 0$ – угловая скорость вращения магнитного поля в статоре электродвигателя.

Пусть C , A – осевой и экваториальный моменты инерции ротора относительно его центра масс (совпадающего с центром подвеса), A_1 , B_1 , C_1 – моменты инерции внутренней рамки, относительно внутренней оси подвеса, оси ротора и относительно перпендикуляра к плоскости внутренней рамки, проведенного через центр подвеса, C_2 – момент инерции наружной рамки, относительно наружной оси подвеса, E – центробежный момент инерции ротора.

В том случае, когда динамическая несимметрия ротора относительно оси его вращения во внутренней рамке, вызвана неаксиальной насадкой ротора на эту ось, приближенно имеем $E = \delta(A - C)$, где δ – малый угол между осью динамической симметрии ротора и осью его вращения.

При любом значении $\beta = \beta^0$ внутреннего карданова угла уравнения движения рассматриваемой системы допускают решение

$$\dot{\alpha} = 0, \beta = \beta^0, \varphi = \omega t + \varphi^0, \quad (2)$$

которое описывает равномерные вращения ротора вокруг неподвижной оси. Кинетический момент данной системы относительно наружной оси подвеса является интегралом движения. Постоянную этого интеграла обозначим через p , а ее значение на решении (2) – через p^0 .

Предположим, что для решения (2) выполнены условия отрицательности действительных частей корней характеристического уравнения приведенной системы, линеаризованной в окрестности соответствующего режима равномерного вращения. При $\beta \in [-\pi/2, 3\pi/2]$ эти условия сводятся к неравенствам $\beta^0 \neq \pm\pi/2$, $\beta^0 \neq 0, \pi$. Тогда для значений постоянной p , близких к p^0 , условие существования равномерных вращений определяет β как непрерывную функцию $\beta = \beta^*(p)$ ($\beta^0 = \beta^*(p^0)$), и решение (2) включается в семейство равномерных вращений

$$\dot{\alpha} = 0, \beta = \beta^*(p), \varphi = \omega t + \varphi^0,$$

зависящих от p как от параметра. В [1] показано, что зависимость $\beta^*(p)$ выражается через арксинус.

Пусть $J(\beta)$ – определитель квадратичной формы переменных $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\varphi}$, выражающей кинетическую энергию рассматриваемой системы при $E = 0$, $J_1(\beta)$ – главный минор второго порядка в этом определителе. Значения этих величин при $\beta = \beta^*(p)$ обозначим через J_*, J_{1*} .

С помощью введенных обозначений полученная в [1] формула угловой скорости ухода синхронного гироскопа в кардановом подвесе с динамически несимметричным ротором записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle \dot{\alpha} \rangle = & -\frac{\omega E^2 (A_1 + A + C)^2}{2CD_*} \left[\left(\left(\frac{\lambda_{p1}}{\omega^2} - C \right)^2 + \frac{\lambda_{d1}^2}{\omega^2} \right) (C_2 + B_1 + C) + \right. \\ & \left. + C^2 \left(\frac{\lambda_{p1}}{\omega^2} - C \right) \right] \sin \beta^*, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$D_* = \left[J_* - C^3 \cos^2 \beta^* - \frac{\lambda_{p1}}{\omega^2} (J_{1*} - C^2 \cos^2 \beta^*) \right]^2 + \frac{\lambda_{d1}^2}{\omega^2} (J_{1*} - C^2 \cos^2 \beta^*)^2. \quad (4)$$

Положительные параметры λ_{p1} и λ_{d1} , входящие в равенства (3), (4), определены разложением (1). Первый из них характеризует жесткость магнитной связи между вращающимся магнитным полем статора и магнитным полем ротора синхронного электродвигателя, а второй характеризует момент сил трения относительно оси ротора при отклонении его угловой скорости от ω .

2. Исследование зависимости скорости ухода от параметров двигателя.

Изучим характер зависимости (3), (4) скорости ухода $\langle \dot{\alpha} \rangle$ от параметров двигателя $\lambda_{p1}, \lambda_{d1}$. В частном случае, когда $J_{1*} - C^2 \cos^2 \beta^* = 0$, величина D_* в знаменателе формулы (3) не содержит параметров $\lambda_{p1}, \lambda_{d1}$, поэтому зависимость скорости ухода $\langle \dot{\alpha} \rangle$ от этих параметров является квадратичной и изображается в виде кругового параболоида.

Далее будем рассматривать общий случай, когда $J_{1*} - C^2 \cos^2 \beta^* \neq 0$. В этом случае при стремлении одного или обоих параметров $\lambda_{p1}, \lambda_{d1}$ к бесконечности величина $\langle \dot{\alpha} \rangle$ стремится к конечному пределу

$$\langle \dot{\alpha} \rangle_{\infty} = - \frac{\omega E^2 (A_1 + A + C)^2 (C_2 + B_1 + C)}{2C (J_{1*} - C^2 \cos^2 \beta^*)^2} \sin \beta^*. \quad (5)$$

В статье [4] вместо учета характера взаимодействия магнитных полей статора и ротора электродвигателя принято условие $\dot{\varphi} = \omega$, и при этом условии для угловой скорости ухода гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально насаженным на вал ротором получена формула (5).

Полагаем

$$x_0 = \frac{J_* - C^3 \cos^2 \beta^*}{C (J_{1*} - C^2 \cos^2 \beta^*)}, \quad \varkappa = \frac{C}{C_2 + B_1 + C} \quad (6)$$

и вводим безразмерные параметры двигателя

$$x = \frac{\lambda_{p1}}{C\omega^2}, \quad y = \frac{\lambda_{d1}}{C\omega}. \quad (7)$$

Так как $\lambda_{p1}, \lambda_{d1} > 0$, то $x, y > 0$. Из определения параметра \varkappa следует, что $0 < \varkappa < 1$. Параметр x_0 может принимать любые значения.

Введем относительную угловую скорость ухода $v = \langle \dot{\alpha} \rangle / \langle \dot{\alpha} \rangle_{\infty}$. Пользуясь обозначениями (6), (7), получаем из (3), (4) следующую формулу для величины v

$$v = v(x, y) = \frac{(x - 1)^2 + y^2 + \varkappa(x - 1)}{(x - x_0)^2 + y^2}. \quad (8)$$

Изучим зависимость $v = v(x, y)$ и в пространстве параметров x, y, v построим поверхность, заданную формулой (8). Непосредственно из выражения (8) следует асимптотическое свойство данной поверхности: $v(x, y) \rightarrow 1$ при $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$. Кроме того, $v(x, y) = 0$ на окружности

$$(x - 1)^2 + y^2 + \varkappa(x - 1) = 0 \quad (9)$$

радиуса $\varkappa/2$ с центром в точке $(x, y) = (1 - \varkappa/2, 0)$.

Чтобы изучить строение поверхности $v = v(x, y)$, рассмотрим ее сечения плоскостями $y = \text{const}$ и $x = \text{const}$.

2.1. Сечения поверхности $v = v(x, y)$ плоскостями $y = \text{const}$. Несмотря на то, что значение $y = 0$ не принадлежит области определения $x, y > 0$ функции $v(x, y)$, свойства этой функции в значительной мере определяются ее поведением при $y = 0$. Поэтому сначала проанализируем и построим кривую, определенную формулой (8) при $y = 0$:

$$v = v_0(x) = v(x, 0) = \frac{(x-1)^2 + \varkappa(x-1)}{(x-x_0)^2}. \quad (10)$$

Эта кривая имеет особую точку при $x = x_0$, и ее вид существенно зависит от того, принадлежит ли особая точка области определения $x > 0$ данной кривой, и если принадлежит, то в каком из интервалов $(0, 1 - \varkappa)$, $(1 - \varkappa, 1)$, $(1, +\infty)$ знаменателя в формуле (10) находится точка x_0 . В первом и третьем из этих интервалов знак бесконечного предела функции $v_0(x)$ при $x \rightarrow x_0$ положителен, а во втором – отрицателен. Таким образом, при классификации возможных типов кривой (10) в зависимости от параметров \varkappa, x_0 необходимо включить точки $0, 1 - \varkappa, 1$ в число разделяющих значений параметра x_0 .

Изучим теперь поведение функции $v_0(x)$ с помощью ее производной

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{-(2x_0 + \varkappa - 2)x + (2 - \varkappa)x_0 - 2(1 - \varkappa)}{(x - x_0)^3}. \quad (11)$$

Знаменатель в формуле (11) обращается в ноль и меняет знак при $x = x_0$. Поведение числителя, а вместе с ним и самой функции $v_0(x)$ существенно зависит от того, равно ли нулю выражение $2x_0 + \varkappa - 2$. В невырожденном случае, когда $x_0 \neq 1 - \varkappa/2$, числитель в формуле (11) обращается в ноль при $x = x_1(\varkappa, x_0)$, где

$$x_1(\varkappa, x_0) = \frac{(2 - \varkappa)x_0 - 2(1 - \varkappa)}{2x_0 + \varkappa - 2}. \quad (12)$$

При $x = x_1(\varkappa, x_0)$ функция $v_0(x)$ имеет экстремум. При данном значении $\varkappa \in (0, 1)$ зависимость (12) координаты точки экстремума x_1 функции $v_0(x)$ от координаты x_0 ее особой точки изображается гиперболой на плоскости x_0, x_1 . Эта гипербола имеет горизонтальную асимптоту $x_1 = 1 - \varkappa/2$ и вертикальную асимптоту $x_0 = 1 - \varkappa/2$. Координата x_1 точки экстремума терпит разрыв при переходе параметра x_0 через значение $x_0 = 1 - \varkappa/2$. Поэтому его необходимо включить в число разделяющих значений параметра x_0 , определяющих тип кривой $v_0(x)$.

Вид кривой $v_0(x)$ зависит еще и от того, принадлежит ли точка экстремума x_1 области ее определения $(0, +\infty)$. Согласно (12), равенство $x_1 = 0$ имеет место при $x_0 = x_{0*}(\varkappa)$, где

$$x_{0*}(\varkappa) = \frac{2(1 - \varkappa)}{2 - \varkappa}. \quad (13)$$

Нетрудно проверить, что

$$1 - \varkappa < x_{0*}(\varkappa) < 1 - \varkappa/2.$$

При данном $\varkappa \in (0, 1)$ функция $v_0(x)$ имеет экстремум в области своего определения, если выполнено одно из неравенств

$$x_0 \leq x_{0*}(\varkappa), \quad x_0 > 1 - \varkappa/2.$$

Из проведенного анализа производной dv_0/dx следует, что при классификации типов кривой $v = v_0(x)$ следует рассматривать еще два разделяющих значения параметра x_0 , равные $x_{0*}(\varkappa)$, $1 - \varkappa/2$.

Итак, при данном значении $\varkappa \in (0, 1)$ для параметра x_0 установлены пять разделяющих значений, расположенных в следующем порядке

$$0, 1 - \varkappa, x_{0*}(\varkappa), 1 - \varkappa/2, 1. \quad (14)$$

Им соответствуют пять особых типов кривой $v = v_0(x)$. Точки (14) делят множество значений параметра x_0 на шесть интервалов, которым соответствуют шесть основных типов кривой $v = v_0(x)$.

Изучим теперь кривые, изображающие зависимость величины $v(x, y)$ от x при фиксированных $y > 0$, то есть сечения поверхности $v = v(x, y)$ плоскостями $y = \text{const} > 0$. Для этого рассмотрим поведение частной производной $\partial v(x, y)/\partial x$ в зависимости от x . В соответствии с (8) имеем

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2x_0 + \varkappa - 2}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2} \left[y^2 - \left(x - \frac{x_0^2 + \varkappa - 1}{2x_0 + \varkappa - 2} \right)^2 + \frac{(x_0 - 1)^2(x_0 + \varkappa - 1)^2}{(2x_0 + \varkappa - 2)^2} \right].$$

Отсюда следует, что частная производная $\partial v(x, y)/\partial x$ обращается в нуль на кривой

$$\left(x - \frac{x_0^2 + \varkappa - 1}{2x_0 + \varkappa - 2} \right)^2 - y^2 = \frac{(x_0 - 1)^2(x_0 + \varkappa - 1)^2}{(2x_0 + \varkappa - 2)^2}. \quad (15)$$

В случаях, когда $x_0 \neq 1 - \varkappa, 1$ эта кривая является гиперболой с центром $(x, y) = (x', 0)$ и асимптотами $y = \pm(x - x')$. Абсцисса x' центра гиперболы выражается формулой

$$x'(\varkappa) = \frac{x_0^2 + \varkappa - 1}{2x_0 - 2 + \varkappa} \quad (16)$$

и совпадает с абсциссой точки пересечения кривой $v = v_0(x)$ с ее горизонтальной асимптотой $v = 1$. Вершинами гиперболы являются точки оси абсцисс с координатами $x_1(\varkappa, x_0), x_0$. Здесь величина x_1 определена формулой (12) и совпадает с координатой точки экстремума кривой $v = v_0(x)$. Гипербола (15) делит плоскость x, y на три области, в каждой из которых производная $\partial v(x, y)/\partial x$ сохраняет знак.

Итак, при переходе от сечения поверхности $v = v(x, y)$ плоскостью $y = 0$ к ее сечениям плоскостями $y = \text{const}$ вместо кривой $v = v_0(x)$, имеющей одну особую

точку и одну точку экстремума, получаем кривые $v = v(x, y)$, которые имеют две точки экстремума, лежащие на гиперболе (15). При данном значении y две точки экстремума разделяют три интервала монотонности рассматриваемых кривых. При $x \rightarrow \infty$ эти кривые асимптотически приближаются к горизонтальной прямой $y = 1$, а при $0 < y < \kappa/2$ они пересекают ось абсцисс в двух точках, лежащих на окружности (9). Таким образом, при фиксированных $y > 0$ кривые $v = v(x, y)$ имеют такой же вид, что и кривая $v = v_0(x)$, с той разницей, что вместо особой точки появляется точка экстремума. Проведенный качественный анализ позволяет построить все возможные типы эти кривых.

В качестве примера они изображены на рис.1 для случая, когда $x_0 > 1$.

2.2. Сечения поверхности $v = v(x, y)$ плоскостями $x = \text{const}$. Чтобы построить в пространстве x, y, v поверхность $v = v(x, y)$, осталось изучить ее сечения плоскостями $x = \text{const} > 0$, то есть проанализировать зависимость $v(x, y)$ от y при фиксированных $x > 0$. С этой целью рассмотрим частную производную

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{2(2x_0 - 2 + \kappa)(x - x')y}{[(x - x_0)^2 + y^2]^2}. \tag{17}$$

Здесь величина $x' = x'(\kappa, x_0)$ определена формулой (16).

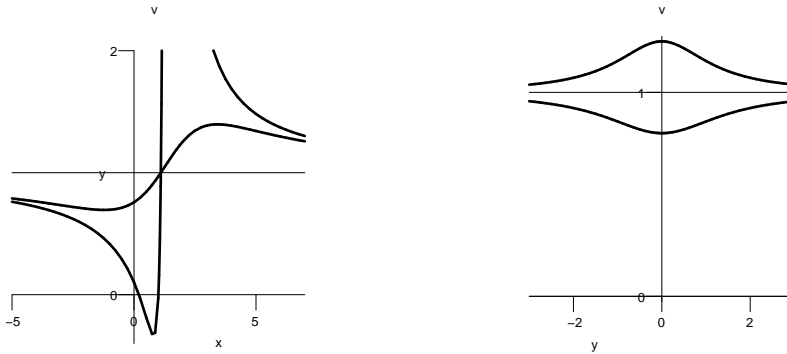


Рис. 1. Кривые $v = v_0(x)$, $v = v(x, y)$ при $x_0 > 0$. Рис. 2. Два типа кривой $v = v(0, y)$.

Из равенства (17) следует, что величина $v(x, y)$ как функция y является строго монотонной на каждой из полуосей $y < 0$ и $y > 0$. При $y = 0$ эта функция имеет экстремум, а при $y \rightarrow \infty$ монотонно стремится к 1. Следовательно, при $x \neq x'$ зависимость $v(x, y)$ от y может быть только одного из двух типов а), б), показанных на рис.2. Верхней кривой соответствует тип а), нижней – тип б). При $x = x'$ имеем $v(x', y) = 1$ для всех y . Тип зависимости $v(x, y)$ от y меняется только при переходе величины x через значение x' . Поэтому для того, чтобы при построении поверхности $v = v(x, y)$ определить тип ее сечения плоскостью $x = \text{const}$, достаточно установить исходный тип такого сечения при $x = 0$. Если $x' < 0$, то этот же тип будут иметь все сечения при $x > 0$. Если же $x' > 0$, то исходный тип будут иметь все сечения при $x \in (0, x')$, а при $x > x'$ они будут иметь другой тип.

Исходный тип кривой $v(0, y)$, являющейся сечением поверхности $v = v(x, y)$ плоскостью $x = 0$, определяется знаком разности $\Delta = v(0, 0) - 1$: если $\Delta > 0$, то кривая имеет тип а), а если $\Delta < 0$ – то тип б). В соответствии с (8), имеем

$$\Delta = \Delta(\kappa, x_0) = \frac{1 - \kappa - x_0^2}{x_0^2}.$$

Следовательно, полагая

$$x_{01}(\kappa) = -\sqrt{1 - \kappa}, \quad x_{02}(\kappa) = \sqrt{1 - \kappa}, \tag{18}$$

при $x_0 \in (x_{01}, x_{02})$ получаем $\Delta > 0$, а при $x_0 < x_{01}$ и $x_0 > x_{02}$ будет $\Delta < 0$.

Таблица. Характеристики сечений поверхности $v = v(x, y)$.

№	Интервал для особой точки x_0	Предел $v_0(x)$ при $x \rightarrow x_0$	Интервал для точки x_1 экстремума $v_0(x)$	Знак Δ
1	$(1, +\infty)$	$+\infty$	$(1 - \kappa/2, 1)$	-
2	$(1 - \kappa/2, 1)$	$-\infty$	$(1, +\infty)$	-
3	$(x_{02}(\kappa), 1 - \kappa/2)$	$-\infty$	$(-\infty, x_{01}(\kappa))$	-
4	$(x_{0*}(\kappa), x_{02}(\kappa))$	$-\infty$	$(x_{01}(\kappa), 0)$	+
5	$(1 - \kappa, x_{0*}(\kappa))$	$-\infty$	$(0, 1 - \kappa)$	+
6	$(0, 1 - \kappa)$	$+\infty$	$(1 - \kappa, x_{0*}(\kappa))$	+
7	$(x_{01}(\kappa), 0)$	$+\infty$	$(x_{0*}(\kappa), x_{02}(\kappa))$	+
8	$(-\infty, x_{01}(\kappa))$	$+\infty$	$(x_{02}(\kappa), 1 - \kappa/2)$	-

2.3. Построение поверхности $v = v(x, y)$. Чтобы получить классификацию поверхностей $v = v(x, y)$ по типам их сечений плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, присоединим два значения (18) к найденным ранее пяти разделяющим значениям параметра x_0 . Из определений (18), (13) вытекает двойное неравенство

$$x_{0*}(\kappa) < x_{02}(\kappa) < 1 - \kappa/2.$$

Поэтому при $\kappa \in (0, 1)$ семь полученных разделяющих значений упорядочены по возрастанию следующим образом

$$x_{01}(\kappa), 0, 1 - \kappa, x_{0*}(\kappa), x_{02}(\kappa), 1 - \kappa/2, 1.$$

Они делят множество значений параметра x_0 на восемь открытых промежутков. Занумеруем эти промежутки слева направо цифрами 1-8 и получим нумерацию восьми основных типов поверхности $v = v(x, y)$.

Рассмотренные выше свойства сечений поверхности $v = v(x, y)$ сведены в таблицу. В ее первых двух столбцах указаны номер типа поверхности $v = v(x, y)$ и соответствующий ему промежуток для параметра x_0 . В третьем и четвертом столбцах даны характеристики сечений этой поверхности плоскостями $y = \text{const}$, а в последнем столбце указан знак величины Δ , который определяет структуру сечений этой поверхности плоскостями $x = \text{const}$. С учетом установленного асимптотического свойства данной поверхности таблица позволяет качественно построить ее в каждом из восьми основных случаев. Пользуясь для построения пакетом Maple, получим рис.3.

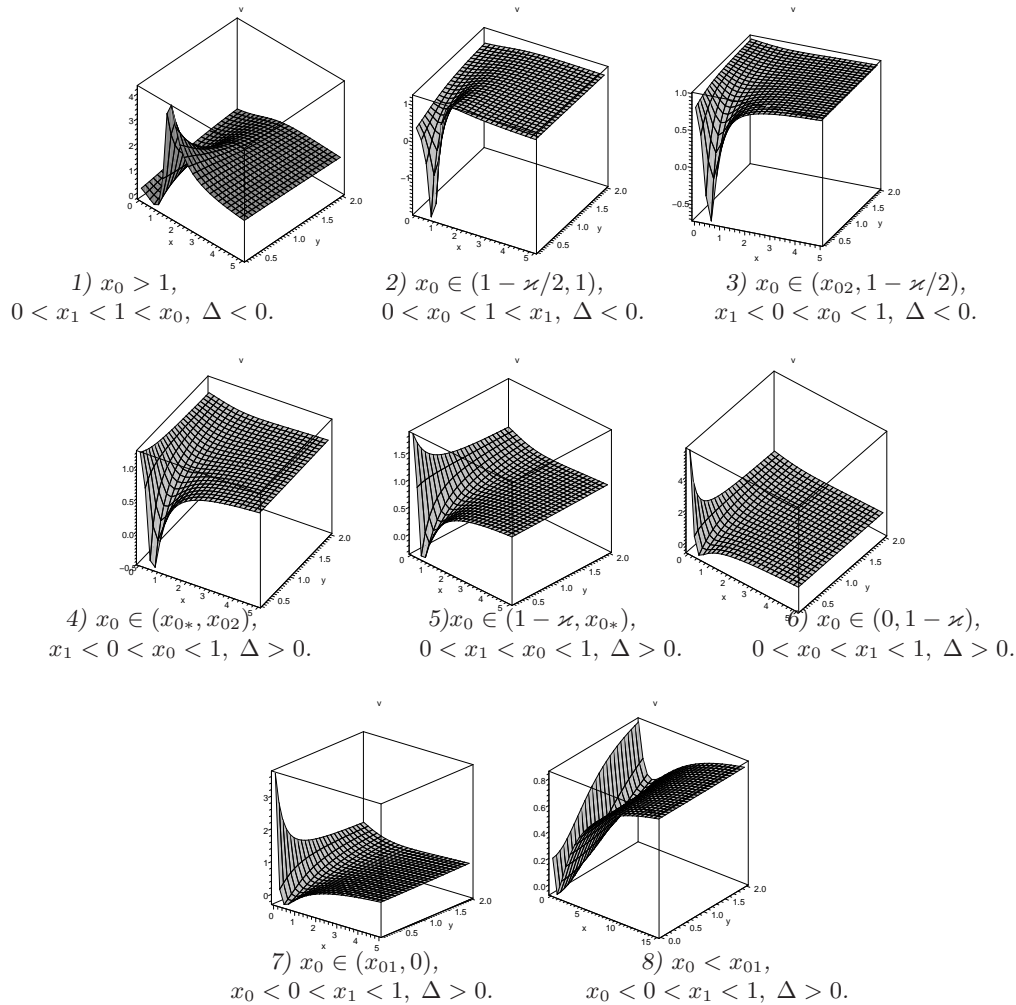


Рис. 3. Зависимость относительной скорости ухода от параметров двигателя.

1. Коносевиц Ю.Б. Скорость ухода динамически несимметричного синхронного гироскопа в кардановом подвесе // Механика твердого тела. – 2009. – Вып.39. – С.94-105.
2. Харламов П.В. Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. – 1972. – Вып.4. – С.73-82.
3. Болграбская И.А., Коносевиц Ю.Б. Устойчивость псевдорегулярных прецессий синхронного гироскопа в кардановом подвесе, имеющего динамически несимметричный ротор // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – Том 14. – С.30-40.
4. Климов Д.М. О движении астатического гироскопа в кардановом подвесе с неаксиально установленным ротором // Доклады АН СССР. – 1959. – 124, №3. – С.29-32.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
konos@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 20.10.09