УДК 517.5

©2009. **В.В. Волчков, Вит.В. Волчков**

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА НА СФЕРАХ В ДВУХТОЧЕЧНО-ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Получено описание класса функций, имеющих нулевые интегралы по всем шарам с центрами на фиксированной сфере в двухточечно-однородном пространстве

Введение. В работе [1] В.В.Волчков решил проблему описания ядра преобразования Радона на сферах относительно множеств со сферической симметрией в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Это позволило, в частности, охарактеризовать все множества инъективности указанного вида, а также получить другие точные результаты, связанные со сферическими средними: новые теоремы о двух радиусах, теоремы единственности и др. (см. [1], [2, часть 3, гл.1]). Методика доказательства этих фактов была основана на описании функций $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$, у которых

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x + r\sigma) d\sigma = 0 \tag{1}$$

для всех $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ и почти всех $r \in (0, R-1)$. (Здесь $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $R > 1$, $L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ – класс функций, локально суммируемых в B_R, $d\sigma$ – элемент поверхности сферы $\mathbb{S}^{n-1}$). Позже были получены аналоги этих результатов для различных двухточечно-однородных пространств (см. [3–5]). Вместе с тем, прежние методы не позволяли получить описание функций с условием вида (1) для произвольного двухточечно-однородного пространства. Данная работа посвящена решению этой задачи.

Обозначения и формулировка основного результата. Пусть X – двухточечно-однородное пространство. Этот класс пространств естественным образом возникает в дифференциальной геометрии и определяется как класс римановых многообразий со следующим свойством (см. [6, гл.1]): для любых двух пар точек (x_1, x_2), (y_1, y_2) из X, удовлетворяющих равенству

$$d(x_1, x_2) = d(y_1, y_2),$$

где $d(\cdot, \cdot)$ – расстояние на X, существует изометрия X, переводящая x_1 в y_1 и x_2 в y_2.

Согласно [6, гл.1, § 4, п.2, 3] класс двухточечно-однородных пространств X состоит из: 1) вещественных евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$; 2) гиперболических пространств $\mathbb{H}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K}$ обозначает поля $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, или тело кватернионов $\mathbb{Q}$); 3) гиперболической плоскости Кэли $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$; 4) евклидовых сфер $\mathbb{S}^n$; 5) проективных пространств $\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$; 6) проективной плоскости Кэли $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$. Далее считаем, что $X \neq \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathfrak{X}_1$ – класс некомпактных пространств X, отличных от $\mathbb{R}^n$, а $\mathfrak{X}_2$ – класс компактных X. Если $X \in \mathfrak{X}_1$, условимся, что максимум секционной кривизны X

равен -1, а в случае $X \in \mathfrak{X}_2$ предположим, что минимум секционной кривизны X равен 1. Кроме того, будем считать, что вещественная размерность a_X пространства X не меньше 2. Определим

$$\mathcal{X} = \{x \in X : d(o,x) < \operatorname{diam} X\},$$

где o – фиксированная точка (начало) в X,

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y \in X} d(x,y).$$

Тогда $\mathcal{X}$ можно рассматривать как риманово многообразие $(\mathcal{D}, ds^2)$, где область $\mathcal{D}$ и риманова метрика ds^2 задаются следующим образом (см. [7–9]):

1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$,

$$ds^2 = (1-|x|^2)^{-2}|dx|^2;$$

2) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$,

$$ds^2 = (1-|z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1-|z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_1(z,dz),$$

где

$$\mathfrak{F}_1(z,dz) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i z_j dz_i d\overline{z}_j;$$

3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$: $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}^{2n} : |z| < 1\}$,

$$ds^2 = (1-|z|^2)^{-1}|dz|^2 + (1-|z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_2(z,dz),$$

где
$$\mathfrak{F}_2(z,dz) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\big(\overline{z}_i z_j + z_{n+i}\overline{z}_{n+j}\big)dz_i d\overline{z}_j +$$

$$\big(\overline{z}_i z_{n+j} - z_{n+i}\overline{z}_j\big)dz_i d\overline{z}_{n+j} + \big(\overline{z}_{n+i} z_j - z_i\overline{z}_{n+j}\big)dz_{n+i} d\overline{z}_j + \big(z_i\overline{z}_j + \overline{z}_{n+i} z_{n+j}\big)dz_{n+i} d\overline{z}_{n+j}\Big);$$

4) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$: $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^{16} : |x| < 1\}$,

$$ds^2 = (1-|x|^2)^{-1}|dx|^2 + 2^{-1}(1-|x|^2)^{-2}\mathfrak{F}_3(x,dx),$$

где

$$\mathfrak{F}_3(x,dx) = \sum_{i,j=1}^{16} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\big(\Phi(x,y)\big)dx_i dx_j,$$

$$\Phi(x,y) = 2\big(p_1(x)p_1(y) + \dots + p_8(x)p_8(y)\big) + p_9(x)p_9(y) + p_{10}(x)p_{10}(y),$$

$$p_1(x) = x_1x_2 - x_3x_4 - x_5x_6 - x_7x_8 - x_9x_{10} - x_{11}x_{12} - x_{13}x_{14} - x_{15}x_{16},$$

$$p_2(x) = x_1x_4 - x_9x_{12} - x_5x_8 - x_{13}x_{16} + x_3x_2 + x_{11}x_{10} + x_7x_6 + x_{15}x_{14},$$

$$p_3(x) = x_1x_6 - x_9x_{14} + x_5x_2 + x_{13}x_{10} + x_3x_8 + x_{11}x_{16} - x_7x_4 - x_{15}x_{12},$$

$$p_4(x) = x_1x_8 + x_9x_{16} + x_5x_4 - x_{13}x_{12} - x_3x_6 + x_{11}x_{14} + x_7x_2 - x_{15}x_{10},$$

$$p_5(x) = x_1x_{10} + x_9x_2 + x_5x_{14} - x_{13}x_6 + x_3x_{12} - x_{11}x_4 - x_7x_{16} + x_{15}x_8,$$

$$p_6(x) = x_1x_{12} + x_9x_4 - x_5x_{16} + x_{13}x_8 - x_3x_{10} + x_{11}x_2 - x_7x_{14} + x_{15}x_6,$$

$$p_7(x) = x_1x_{14} + x_9x_6 - x_5x_{10} + x_{13}x_2 + x_3x_{16} - x_{11}x_8 + x_7x_{12} - x_{15}x_4,$$

$$p_8(x) = x_1x_{16} - x_9x_8 + x_5x_{12} + x_{13}x_4 - x_3x_{14} - x_{11}x_6 + x_7x_{10} + x_{15}x_2,$$

$$p_9(x) = x_1^2 + x_3^2 + \cdots + x_{15}^2, \quad p_{10}(x) = x_2^2 + x_4^2 + \cdots + x_{16}^2.$$

Отметим, что многочлены $p_1, \ldots, p_8$ и форма $\Phi(x, y)$ наглядно интерпретируются в терминах чисел Кэли (см. [7]).

5) $X = \mathbb{S}^n$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$,

$$ds^2 = (1 + |x|^2)^{-2}|dx|^2;$$

6) $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$,

$$ds^2 = (1 + |x|^2)^{-1}|dx|^2 - (1 + |x|^2)^{-2} \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j dx_i dx_j;$$

7) $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$: $\mathcal{D} = \mathbb{C}^n$,

$$ds^2 = (1 + |z|^2)^{-1}|dz|^2 - (1 + |z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_1(z, dz);$$

8) $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$: $\mathcal{D} = \mathbb{C}^{2n}$,

$$ds^2 = (1 + |z|^2)^{-1}|dz|^2 - (1 + |z|^2)^{-2}\mathfrak{F}_2(z, dz);$$

9) $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$: $\mathcal{D} = \mathbb{R}^{16}$,

$$ds^2 = (1 + |x|^2)^{-1}|dx|^2 - 2^{-1}(1 + |x|^2)^{-2}\mathfrak{F}_3(x, dx).$$

Расстояние на X в указанных выше моделях определяется равенством

$$d(0, x) = \begin{cases} \operatorname{arth}|x|, & X \in \mathfrak{X}_1 \\ \operatorname{arctg}|x|, & X \in \mathfrak{X}_2 \end{cases} \tag{2}$$

и условием инвариантности d относительно группы изометрий G пространства X. Соотношение (2) показывает, что геодезический шар

$$B_R = \big\{x \in X : d(0, x) < R\big\}$$

совпадает с открытым евклидовым шаром из $\mathbb{R}^{a_X}$ с центром в нуле и соответствующим радиусом. Здесь и всюду в дальнейшем мы считаем, что $0 < R \leqslant \mathrm{diam}X$.

Пусть $\mathfrak{X}_3$ – класс двухточечно-однородных пространств X постоянной кривизны, т.е. $\mathfrak{X}_3 = \{\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}, \mathbb{S}^n, \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}\}$. Возьмём $k \in \mathbb{Z}_+$ и $m \in \big\{0, \ldots, M_X(k)\big\}$, где

$$M_X(k) = \begin{cases} 0, & X \in \mathfrak{X}_3 \\ [k/2], & X \notin \mathfrak{X}_3. \end{cases}$$

Положим
$$\varepsilon_X = \begin{cases} -1, & X \in \mathfrak{X}_1 \\ 1, & X \in \mathfrak{X}_2, \end{cases}$$
а
$$\beta_X = n/2 - 1, -1/2, 0, 1, 3,$$
соответственно, в каждом из следующих пяти случаев: 1) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, $X = \mathbb{S}^n$; 2) $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{R}}$; 3) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$, $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$; 4) $X = \mathbb{H}^n_{\mathbb{Q}}$, $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Q}}$; 5) $X = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}a}$, $X = \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}a}$. Определим
$$\mathcal{H}^{k,m}_X = \mathcal{H}^k_{a_X}$$
в случае $X \in \mathfrak{X}_3$ и
$$\mathcal{H}^{k,m}_X = \left\{ f \in \mathcal{H}^k_{a_X} : (Lf)(x) = 4\varepsilon_X (m - \beta_X)(k - m)(1 + \varepsilon_X |x|^2) f(x) \right\}$$
в случае $X \notin \mathfrak{X}_3$, где $\mathcal{H}^k_{a_X}$ – пространство однородных гармонических многочленов степени k в $\mathbb{R}^{a_X}$. Обозначим через $\mathrm{O}(a_X)$ ортогональную группу в $\mathbb{R}^{a_X}$. После отождествления $\mathcal{H}^{k,m}_X$ с пространством сужений его элементов на сферу $\mathbb{S}^{a_X - 1} = \{x \in \mathbb{R}^{a_X} : |x| = 1\}$, $\mathcal{H}^{k,m}_X$ становится инвариантным подпространством квазирегулярного представления $\mathfrak{T}(\tau)$ группы $K = G \cap \mathrm{O}(a_X)$ на $L^2\left(\mathbb{S}^{a_X-1}\right)$. Если $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ – сужение $\mathfrak{T}(\tau)$ на $\mathcal{H}^{k,m}_X$, то $\mathfrak{T}(\tau)$ является ортогональной прямой суммой попарно неэквивалентных неприводимых унитарных представлений $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \left\{0, \dots, M_X(k)\right\}$ (см. [9, часть 1]).

Произвольная точка $x \in \mathbb{R}^{a_X} \setminus \{0\}$ представима в виде $x = \varrho\sigma$, где $\varrho = |x|$, $\sigma = x/|x|$. Всякой функции $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ соответствует ряд Фурье вида
$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d^{k,m}_X} f_{k,m,j}(\varrho) Y^{k,m}_j(\sigma), \tag{3}$$
где
$$d^{k,m}_X = \dim \mathcal{H}^{k,m}_X,$$
$\{Y^{k,m}_j\}$ – фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{k,m}_X$ относительно поверхностной меры $d\omega$ на $\mathbb{S}^{a_X-1}$ и
$$f_{k,m,j}(\varrho) = \int_{\mathbb{S}^{a_X-1}} f(\varrho\sigma) \overline{Y^{k,m}_j(\sigma)} d\omega(\sigma). \tag{4}$$
Пусть $\{t^{k,m}_{i,j}(\tau)\}$, $i, j \in \{1, \dots, d^{k,m}_X\}$ – матрица представления $\mathfrak{T}^{k,m}(\tau)$ в базисе $\{Y^{k,m}_j\}$, $d\tau$ – мера Хаара на K общей массы 1. Разложение (3) можно продолжить на распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ следующим образом:
$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_X(k)} \sum_{j=1}^{d^{k,m}_X} f^{k,m,j}, \tag{5}$$

где ряд (5) сходится к f в $\mathcal{D}'(B_R)$ и распределение $f^{k,m,j}$ действует на пространстве основных функций $\mathcal{D}(B_R)$ по правилу

$$\langle f^{k,m,j}, \psi\rangle = \left\langle f, d_X^{k,m} \int_K \psi(\tau^{-1}x) t_{j,j}^{k,m}(\tau) d\tau \right\rangle = \langle f, \overline{\left(\overline{\psi}\right)_{k,m,j}(\varrho)\ \overline{Y_j^{k,m}(\sigma)}}\rangle, \tag{6}$$

где $\psi \in \mathcal{D}(B_R)$ (см. доказательство формулы (5.19) в [2, часть 1, раздел 5.2] и предложения 2.7 в [10, гл.1].

Для $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{-1, -2, \ldots\}$, $\beta, \lambda \in \mathbb{C}$, $t \in (0, \operatorname{diam} X)$ и компактного X обозначим

$$\varphi(\lambda, \alpha, \beta, t) = F\big((\alpha+\beta+1+\lambda)/2, (\alpha+\beta+1-\lambda)/2; \alpha+1; \sin^2 t\big),$$

где $F(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция Гаусса. Если X – некомпактно, положим

$$\varphi(\lambda, \alpha, \beta, t) = F\big((\alpha+\beta+1+i\lambda)/2, (\alpha+\beta+1-i\lambda)/2; \alpha+1; -\operatorname{sh}^2 t\big). \tag{7}$$

Зафиксируем $\alpha \in [0, +\infty)$, $\beta \in \mathbb{R}$ и $t \in (0, \operatorname{diam} X)$. Тогда функция $\varphi(\lambda, \alpha, \beta, t)$ имеет бесконечно много нулей λ, причём все эти нули являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $\lambda = 0$ (см. [9, часть 2]). Кроме того,

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{N}(\alpha,\beta,t)} \lambda^{-1-\varepsilon} < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$, где

$$\mathcal{N}(\alpha, \beta, t) = \big\{\lambda > 0 : \varphi(\lambda, \alpha, \beta, t) = 0\big\}.$$

При $x = \varrho\sigma$, $\sigma \in \mathbb{S}^{a_X - 1}$, положим

$$\Phi(\lambda, k, m, j, x) =$$

$$\varrho^k (1 \pm \varrho^2)^{m+1-N_X(k+1)} \varphi(\lambda, \alpha_X + k, \beta_X + 2N_X(k+1) - k - 2m - 2, d(0, x)) Y_j^{k,m}(\sigma),$$

где положительный (отрицательный) знак выбирается для компактных (соответственно, некомпактных) пространств X,

$$\alpha_X = -1 + a_X/2,$$

$N_X(k) = (k+1)/2$, если $X = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$, и $N_X(k) = k$, если $X \neq \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^n$.

Преобразование Радона на сферах в X (или оператор среднего значения) определяется равенством

$$(M^r f)(x) = \frac{1}{A(r)} \int_{S_r(x)} f(s) d\omega(s), \quad r \geqslant 0,$$

где $d\omega$ – элемент площади на сфере $S_r(x) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$ и $A(r)$ – полная площадь этой сферы. Для фиксированных $0 < R \leqslant \operatorname{diam} X$ и $r \in (0, R)$ обозначим через $\mathcal{V}_r(B_R)$ класс функций $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ таких, что $(M^t f)(x) = 0$ при всех $x \in S_r = S_r(0)$ и почти всех $t \in (0, R-r)$. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$. Тогда для того, чтобы $f \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы для любых $k \geq 0$, $0 \leq m \leq M_X(k)$ и $j \in \{1, \dots, d_X^{k,m}\}$ имело место равенство*

$$f^{k,m,j}(x) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}(\alpha(k), \beta(k,m), r)} c_{\nu,k,m,j} \Phi(\nu, k, m, j, x), \quad x \in B_R, \tag{8}$$

где

$$\alpha(k) = \alpha_X + k, \quad \beta(k,m) = \beta_X + 2N_X(k+1) - k - 2m - 2,$$

$c_{\nu,k,m,j} \in \mathbb{C}$ *и ряд* (8) *сходится в пространстве распределений* $\mathcal{D}'(B_R)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть X – компактное двухточечно-однородное пространство. Докажем необходимость. Предположим, что $f \in (\mathcal{V}_r \cap C^\infty)(B_R)$. Из [8, формула (3.6)] имеем $f^{k,m,j} \in (\mathcal{V}_r \cap C^\infty)(B_R)$. Положим

$$\Phi_{\lambda,0,k,m}(\varrho) = \varrho^k (1+\varrho^2)^{m+1-\mathcal{N}_X(k+1)}.$$

$$F(\nu_X(\lambda) + \mathcal{N}_X(k+1) - m - 1, \nu_X(-\lambda) + \mathcal{N}_X(k+1) - m - 1; k + \alpha_X + 1; \varrho^2/(1+\varrho^2)),$$

где

$$\nu_X(\lambda) = (\gamma_X + \lambda + 1)/2, \quad \gamma_X = \alpha_X + \beta_X.$$

Проверим, что справедливо разложение (8), где

$$c_{\nu,k,m,j} = (\xi(\nu,\nu))^{-1} \int_0^{\operatorname{tg} r} \frac{\varrho^{2\alpha_X+1}}{(1+\varrho^2)^{\gamma_X+2}} \Phi_{\nu,0,k,m}(\varrho) f_{k,m,j}(\varrho) d\varrho, \tag{9}$$

$$\xi(\lambda,\mu) = \int_0^{\operatorname{tg} r} \frac{\varrho^{2\alpha_X+1}}{(1+\varrho^2)^{\gamma_X+2}} \Phi_{\lambda,0,k,m}(\varrho) \Phi_{\mu,0,k,m}(\varrho) d\varrho.$$

(При этом $c_{\nu,k,m,j} = O(\nu^{-c})$, $\nu \to +\infty$ для любого $c > 0$ и ряд (8) сходится в пространстве $C^\infty(B_R)$). Обозначим через σ_r дельта-функцию, сосредоточенную на сфере S_r. Зафиксируем $q \in B_R$. Теорема Винера-Пэли и [8, оценка (4.12)] показывают, что равенство

$$(\Lambda^{k,m} \sigma_{d(0,q)})\hat{}(\lambda) = \Phi_{\lambda,0,k,m}(|q|), \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

корректно определяет распределение $\Lambda^{k,m} \sigma_{d(0,q)} \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^1)$ и

$$\operatorname{supp} \Lambda^{k,m} \sigma_{d(0,q)} \subset [-d(0,q), d(0,q)].$$

Далее мы используем трансмутационный оператор $\mathfrak{A}_{k,m,j}$, определенный и изученный в [8, раздел 5], [9, часть 2]. Из его свойств получаем непосредственно соотношение

$$\mathfrak{A}_{0,0,1}\left((f^{k,m,j} \times \sigma_{d(0,\cdot)})(q) \right)(t) =$$

$$\left(\mathfrak{A}_{k,m,j}(f^{k,m,j}) * \Lambda^{k,m} \sigma_{d(0,q)} \right)(t) Y_j^{k,m}(q/|q|), \quad |t| < R - d(0,q), \tag{10}$$

где $\mathfrak{A}_{0,0,1}$ действует по переменной $\cdot$, символом $\times$ обозначается свертка распределений в X, а значок "$*$" используется для свертки в $\mathbb{R}^1$. Поскольку $(f^{k,m,j} \times \sigma_{d(0,p)})(q) = 0$ при $q \in S_r$, $p \in B_{R-r}$, равенство (10) влечет, что

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(f^{k,m,j}) * \Lambda^{k,m}\sigma_r = 0$$

на $(r-R, R-r)$. Отсюда (см. [2, часть 3, теорема 1.3])

$$\mathfrak{A}_{k,m,j}(f^{k,m,j})(t) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}(\alpha(k),\beta(k,m),r)} \alpha_\nu \cos(\nu t) \quad t \in (-R, R).$$

Применяя теперь [8, теорема 5.1 (iv)], приходим к (8). Формула (9) для коэффициентов следует из соотношений ортогональности для функций $\Phi_{\lambda,0,k,m}$ (см. [7, формула (16)]). Для $f \in L^{1,\mathrm{loc}}(B_R)$ разложение (8) получается стандартным приемом сглаживания. Достаточность легко установить с помощью теоремы о среднем для собственных функций лапласиана.

Для некомпактных двухточечно-однородных пространств доказательство проводится аналогично. Таким образом, теорема 1 полностью доказана.

1. *Волчков В.В.* О множествах инъективности преобразования Радона на сферах // Изв. РАН. Сер. матем. – 1999. – Т.63, №3. – С.63-76.
2. *Volchkov V.V.* Integral Geometry and Convolution Equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. – 454p.
3. *Волчков В.В.* Локальная теорема о двух радиусах на симметрических пространствах // ДАН. – 2001. – Т.381, №6. – С.727-731.
4. *Волчков В.В.* Шаровые средние на симметрических пространствах // Доповіді НАН України. – 2002. – №3. – С.15-19.
5. *Волчков Вит.В.* Аналоги локального преобразования Помпейю на сфере // Доповіді НАН України. – 2004. – №2. – С.18-22.
6. *Helgason S.* Groups and Geometric Analysis. – New York: Academic Press, 1984. – 735pp.
7. *Волчков Вит.В.* О функциях с нулевыми шаровыми средними на компактных двухточечно-однородных пространствах // Мат. сборник. – 2007. – Т.198. – №4. – С.21-46.
8. *Волчков В.В., Волчков Вит.В.* Экстремальные задачи, связанные с теоремой единственности Ф.Йона // Алгебра и анализ. – 2009. – Т.21. – №5. – С.37-69.
9. *Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. – Springer-Verlag London Limited, 2009. – 671p.
10. *Helgason S.* Geometric Analysis on Symmetric Spaces. – Rhode Island: Amer. Math. Soc., Providence, 1994. – 611p.

Донецкий национальный ун-т
`volchkov@univ.donetsk.ua`

Получено 10.09.09