ISSN 1683-4720 Труды ИПММ НАН Украины. 2009. Том 19

УДК 531.38

 О.С. Волкова

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕЦЕССИИ ТЯЖЕЛОГО ГИРОСТАТА ВОКРУГ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

В работе исследованы прецессии тела-носителя в задаче о движении гиростата с неподвижной точкой в поле силы тяжести. При этом предполагается, что направление переменного гиростатического момента постоянно в подвижном базисе. Приведено описание всех возможных регулярных прецессий относительно вертикали. Доказано, что центр масс системы находится на оси собственного вращения, которая вместе с направляющим вектором гиростатического момента лежит в одной главной, плоскости. При фиксированном значении скорости собственного вращения получены ограничения на угол отклонения оси вращения от вертикали. Выписаны явные решения уравнений, описывающих прецессионные движения гиростата в поле силы тяжести.

Введение. Гиростатом называют механическую систему, состоящую из теланосителя и закрепленных на нем тел, имеющих возможность совершать движения относительно несущего тела, если распределение масс всей системы не изменяется со временем [1]. Уравнения движения тяжелого гиростата вокруг неподвижной точки имеют вид

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}, \qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ – тензор инерции гиростата в главных осях, $\boldsymbol{\nu}$ – орт вертикали, $\boldsymbol{e}$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс системы, $\lambda = \lambda(t)$ и $\boldsymbol{\alpha}$ – соответственно модуль и направление гиростатического момента. Система (1) допускает первые интегралы

$$(J\boldsymbol{\omega} + \lambda\boldsymbol{\alpha}) \cdot \boldsymbol{\nu} = g, \qquad |\boldsymbol{\nu}|^2 = 1. \tag{2}$$

Уравнение, описывающее движение присоединенных тел, не приводится в предположении, что вдоль вектора $\boldsymbol{\alpha}$ направлен управляющий момент, позволяющий реализовать любую непрерывную, ограниченную вместе со своей производной функцию $\lambda(t)$. Например, в такой постановке были исследованы равномерные вращения твердого тела с маховиком [2, 3]. Условия допустимости маятниковых вращений уравновешенного гиростата с переменным гиростатическим моментом получены в [4]. В настоящей работе изучены регулярные прецессии, которые не являются маятниковыми или равномерными вращениями.

Пусть $\boldsymbol{\beta}$ – постоянный в подвижном базисе единичный вектор. Движение гиростата называют *прецессией* относительно вертикали [6, 7], если угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\beta}$ остается неизменным. Дифференцируя соотношение $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) =: \cos\mu \equiv \mathrm{const}$ в силу уравнений (1), получаем условие $(\boldsymbol{\omega},\ \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}) = 0$, откуда следует

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi}\boldsymbol{\nu} + \dot{\varphi}\boldsymbol{\beta}, \tag{3}$$

где $\dot{\psi}$ и $\dot{\varphi}$ – скорости прецессии и собственного вращения соответственно. Если эти скорости постоянны, т.е. $\dot{\psi} = m$, $\dot{\varphi} = n$; $m, n \equiv \text{const}$, то прецессия называется *регулярной* [5]. Известно [6], что твердое тело с неподвижной точкой может совершать регулярную прецессию относительно вертикали только в случае Лагранжа. Регулярные прецессии несимметричного твердого тела относительно наклонной оси впервые были изучены Гриоли [5]. Исследование регулярных прецессий гиростата с $\lambda(t) \equiv \text{const}$ изложено в [7]. Обычно решение выписывается в специальной системе координат: одну из координатных осей направляют вдоль $\boldsymbol{\beta}$. При этом тензор инерции, построенный для неподвижной точки, уже не будет диагональным. В данной работе используется матричная форма записи вектора $\boldsymbol{\nu}$ (см. далее), что позволяет продолжать исследование в главных осях.

1. Вспомогательные утверждения. Подставим $\boldsymbol{\omega} = m\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{\beta}$ в систему уравнений (1):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = n\,(\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}), \tag{4}$$

$$m\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\nu}} + \dot{\lambda}\boldsymbol{\alpha} = m^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu}) + mn(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{J}\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}) + n^2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}) + \lambda(\boldsymbol{\alpha} \times (m\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{\beta})) + \boldsymbol{e} \times \boldsymbol{\nu}.$$

Предположим, что $\beta_2^2 + \beta_3^2 \neq 0$. Вводим унитарную матрицу $\mathcal{U} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ и вектор $\boldsymbol{\xi}$:

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2} & 0 & \beta_1 \\ \frac{-\beta_1\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \frac{\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \beta_2 \\ \frac{-\beta_1\beta_3}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \frac{-\beta_2}{\sqrt{\beta_2^2+\beta_3^2}} & \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{\beta}}{\|(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i})\times\boldsymbol{\beta}\|} \\ \frac{\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i}}{\|\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{i}\|} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}^T, \ \boldsymbol{i} = (1,0,0)^T, \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\sin\mu \sin nt, \, \sin\mu\cos nt, \, \cos\mu)^T, \quad \cos\mu := (\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}). \tag{6}$$

Тогда из первого уравнения (4) находим $\boldsymbol{\nu} = \mathcal{U}\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$, и для произвольного $\boldsymbol{\eta}$ имеем $(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\eta}) = (\boldsymbol{\xi}, \mathcal{U}^T\boldsymbol{\eta})$. Пусть $\boldsymbol{\nu}(t) \neq \text{const}$. Сформулируем утверждения:

Предложение 1. Для постоянных векторов $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2$ и констант c_1, c_2: $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$

$$(c_1\boldsymbol{\eta}_1 + c_2\boldsymbol{\eta}_2, \, \boldsymbol{\nu}) \equiv \text{const} \implies (\boldsymbol{\eta}_1 \times \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\beta}) = 0. \tag{7}$$

Предложение 2. Выражение $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu})$ не содержит членов $\sin 2nt$, $\cos 2nt$ только при одновременном выполнении условий

$$(J_2 - J_3)\beta_1\beta_2\beta_3 = 0, \quad (J_2 - J_3)(\beta_2^2 - \beta_3^2)\beta_1^2 = (\beta_2^2 + \beta_3^2)\left((J_3 - J_1)\beta_2^2 + (J_2 - J_1)\beta_3^2\right). \tag{8}$$

При этом верно равенство $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu}) = 2(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\beta}) + \text{const}$.

Предложение 3. Выражение $(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\alpha})$ не содержит членов $\sin 2nt$, $\cos 2nt$ только при одновременном выполнении условий

$$2(J_2 - J_3)\alpha_1\beta_2\beta_3 = (\beta_2^2 + \beta_3^2)(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \tag{9}$$

$$(J_2 - J_3)(\beta_2^2 - \beta_3^2)\alpha_1\beta_1 = (\beta_2^2 + \beta_3^2)\left((J_3 - J_1)\alpha_2\beta_2 + (J_2 - J_1)\alpha_3\beta_3\right). \tag{10}$$

При этом справедливы соотношения

$$(\boldsymbol{J\nu},\, \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\alpha}) = ((\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{J\nu}\times\boldsymbol{\beta},\,\boldsymbol{\alpha}))\,(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}) + \mathrm{const}, \tag{11}$$

$$(\boldsymbol{J\nu},\,\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) - (\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\nu}) = (\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}) + \mathrm{const}. \tag{12}$$

2. Необходимые условия существования прецессий. Предположим сначала, что $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{\beta}$. Выпишем проекции второго уравнения системы (4) на $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$:

$$m(\boldsymbol{J\dot{\nu}},\boldsymbol{\alpha})+\dot{\lambda} = m^2(\boldsymbol{J\nu}\times\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\alpha})+mn(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{J\nu}\times\boldsymbol{\beta},\,\boldsymbol{\alpha})+n^2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})+(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\alpha}), \tag{13}$$

$$\dot{\lambda}n(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}) = m^2(\boldsymbol{J\nu},\,\boldsymbol{\dot{\nu}}) + \lambda m(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\dot{\nu}}) + (\boldsymbol{e},\,\boldsymbol{\dot{\nu}}), \tag{14}$$

$$\begin{aligned} m(\boldsymbol{J\dot{\nu}},\,\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}) = &-\{m(\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\alpha}) + n(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta})\}\,\{\lambda(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{J\beta},\,\boldsymbol{\nu})\} + \\ &+ \{n + m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})\}\,\{\lambda + m(\boldsymbol{J\nu},\,\boldsymbol{\alpha})\} - (mn\boldsymbol{J\beta} + \boldsymbol{e},\,\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\alpha}) + \\ &+ (mn\boldsymbol{J\beta} + \boldsymbol{e},\,\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\beta}) + n^2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \tag{15}$$

С учетом разложения $\boldsymbol{\omega}$ интеграл площадей (2) принимает вид

$$m(\boldsymbol{J\nu},\,\boldsymbol{\nu}) + \lambda(\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\alpha}) + n(\boldsymbol{J\beta},\,\boldsymbol{\nu}) = g. \tag{16}$$

Анализ формул (13) и (16) показывает, что должны выполняться условия Предложения 3 и не выполняться условия Предложения 2. При этом $\lambda(t)$ – линейная по $\sin nt$ и $\cos nt$ функция. Из (15) следует соотношение

$$\lambda(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{J\beta},\,\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{const}. \tag{17}$$

Используя (16) и (17), выпишем в (14) члены, содержащие только $\sin nt$ и $\cos nt$:

$$(\boldsymbol{e},\,\boldsymbol{\dot{\nu}}) = \{\,n + m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})\,\}\{\,\dot{\lambda}(\boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}) + m(\boldsymbol{J\beta},\,\boldsymbol{\dot{\nu}})\,\} = 0, \tag{18}$$

откуда заключаем, что $\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{\beta}$. Подстановка (17) в (16) дает условие

$$\lambda_0(\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\alpha}) + (\,n + m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})\,)(\boldsymbol{J\beta},\,\boldsymbol{\nu}) = \mathrm{const}, \tag{19}$$

где λ_0– постоянная составляющая $\lambda(t)$. Согласно Предложению 1, из (19) следует $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) = 0$ либо $\lambda_0 = n + m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}) = 0$. В последнем случае условие отсутствия свободного члена в правой части (13) приводит к равенству $(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta})^2(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) = 0$. Поскольку равномерные вращения не рассматриваются, снова получаем $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}) = 0$.

Если $(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \neq 0$, то из соотношения (17) следует, что λ выражается через $(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\nu})$. При $\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{J\beta}\parallel\boldsymbol{\beta}$ из (14) и (16) легко получить условие $(\lambda(t)/(\boldsymbol{\nu}(t),\boldsymbol{\alpha}))' = 0$. Исходя из компланарности векторов $\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, в любом случае $\lambda(t)$ можно представить в виде

$$\lambda = c_1(\boldsymbol{\nu},\,\boldsymbol{\alpha}) + c_2; \quad c_1, c_2 = \mathrm{const}. \tag{20}$$

Продифференцируем (15) и подставим $\dot\lambda$ из (13). Полученное равенство не может выполняться тождественно по t, если $[2n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{J\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})\neq 0$. Предположим, что $2n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})=0$. Подставим λ вида (20) в (13) и упростим с учетом всего вышеизложенного. Применяя Предложение 1, получаем условие $m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{J\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=0$. Значит, всегда выполняется $(\boldsymbol{J\alpha}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=0$, что в совокупности с условием $(\boldsymbol{J\beta}\times\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=0$ дает $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\parallel\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$, т.е. $\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ – главная ось.

Пусть теперь $\boldsymbol{\alpha}\parallel\boldsymbol{\beta}$. Полный набор скалярных уравнений получим, умножив (4) на $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}$ в соответствующем порядке:

$$\dot\lambda=m^2(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta})\implies n\lambda=m^2\frac{(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})}{2}+(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu})+\mathrm{const},\tag{21}$$

$$2m(\boldsymbol{J\nu},\dot{\boldsymbol{\nu}})+(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})\dot\lambda+n(\boldsymbol{J\beta},\dot{\boldsymbol{\nu}})=0\implies m(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})+(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})\lambda+n(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\nu})=g,\tag{22}$$

$$\begin{aligned}\frac{m}{n}(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\nu}},\dot{\boldsymbol{\nu}})+m(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta})^2\lambda=m[n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})](\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})+(n^2-m^2)(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\nu})+\\+(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})-n(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\beta})[m+n(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})]-(\boldsymbol{e},\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}\tag{23}$$

Покажем, что должны выполняться условия Предложения 2. Положим $(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})=(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})_{2n}+2(\boldsymbol{J\beta},\boldsymbol{\nu})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})+\mathrm{const}$, где $(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})_{2n}$ содержит только $\sin 2nt$ и $\cos 2nt$. Подставим (21) в (22) и выпишем члены второго порядка:

$$(2n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}))(\boldsymbol{J\nu},\dot{\boldsymbol{\nu}})_{2n}=0.\tag{24}$$

Несложно доказать равенство $(\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\nu}},\dot{\boldsymbol{\nu}})'=-n^2(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})'_{2n}$, позволяющее из (23) получить

$$((2n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}))^2-2mn(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta})-m^2)(\boldsymbol{J\nu},\dot{\boldsymbol{\nu}})_{2n}=0,\tag{25}$$

что в совокупности с равенством (24) и условием $|\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\beta}|\neq 0$ влечет за собой $(\boldsymbol{J\nu},\boldsymbol{\nu})_{2n}=0$. Аналогично, собирая в тех же выражениях члены первого порядка, получаем систему

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{J\beta},\dot{\boldsymbol{\nu}})(n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}))=-(\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{\nu}})/m\\&(\boldsymbol{J\beta},\dot{\boldsymbol{\nu}})(n+m(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}))^2=-(\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{\nu}})(\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\beta}).\end{aligned}\tag{26}$$

Поскольку $\boldsymbol{J\beta}\nparallel\boldsymbol{\beta}$ при $\lambda(t)\neq\mathrm{const}$, из системы (26) получаем $n+m\cos\mu=0$ и $\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{\beta}$. Таким образом, доказана следующая лемма:

Лемма. *Условия $\boldsymbol{e}\parallel\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha})\parallel\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{\alpha}$ являются необходимыми для существования регулярных прецессий тяжелого гиростата вокруг вертикали.*

3. Описание всех возможных прецессий относительно вертикали. Пусть сначала $\boldsymbol{\alpha}\nparallel\boldsymbol{\beta}$. Полученные в предыдущем пункте условия на векторы $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ и тензор инерции $\boldsymbol{J}$ совместны. Выпишем те из них, которые гарантируют существование $\lambda(t)\neq\mathrm{const}$, с точностью до перестановки индексов:

$$\boldsymbol{\alpha}\perp\boldsymbol{\beta},\ \ \boldsymbol{J\beta}\parallel\boldsymbol{\beta}:$$

$$\text{(I)}\qquad \alpha_1=\alpha_2=\beta_3=0,\ \ (J_1-J_2)\beta_1=0,\ \ J_1\neq J_3;\tag{27}$$

$$\boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta}, \;\; \boldsymbol{J\beta} \nparallel \boldsymbol{\beta}, \;\; (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \neq 0 :$$

$$\text{(II)} \quad \alpha_1 = \beta_1 = (J_3 - J_1)\alpha_2\beta_2 + (J_2 - J_1)\alpha_3\beta_3 = 0; \;\; \beta_2\beta_3(J_2 - J_3)(J_2\beta_3^2 + J_3\beta_2^2 - J_1) \neq 0. \quad (28)$$

Случаи, которые соответствующим выбором главных осей можно привести к предыдущим, не выписаны. Очевидно, что при $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{J\beta} \parallel \boldsymbol{\beta}$ выполняется также $\boldsymbol{J\alpha} \parallel \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{J\beta} \nparallel \boldsymbol{\alpha}$. Уравнения (13)–(15) обращаются в тождества при подстановке $\lambda(t)$ вида

$$\lambda = \frac{1}{(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta})^2} \left[(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{J\alpha} \times \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) \right] \left[m(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu}) + n(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \right], \qquad (29)$$

где $\boldsymbol{\nu}(t)$ задается формулами (5)–(6), а m и n удовлетворяют квадратному уравнению

$$m^2 \cos\mu \left[(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) \right] + mn(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) + (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha})^2 = 0. \qquad (30)$$

В случаях $(\mathrm{I}) + \{J_1 = J_2\}$ и $(\mathrm{II}) + \{\alpha_2 = 0, J_1 = J_2\}$ выполняется

$$(\boldsymbol{J\beta} \times \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) - (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha}) = 0, \quad mn = -(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})/J_1. \qquad (31)$$

Очевидно, что при $\boldsymbol{J\beta} \parallel \boldsymbol{\alpha} \nparallel \boldsymbol{\beta}$ вращение вокруг горизонтальной оси невозможно. Если $\boldsymbol{J\beta} \nparallel \boldsymbol{\alpha}$, то n однозначно выражается через m из уравнения (30). При фиксированном n условие $D \geq 0$ существования корней квадратного уравнения (30) дает ограничения на угол между осью собственного вращения и вертикалью.

Пример: При $n = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, $\alpha_2 = \beta_3 = \pm\dfrac{1}{2}$, $\alpha_3 = \beta_2 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $J_3 < J_2$ и $J_1 = \dfrac{(J_2 + J_3)}{2} > 4$ уравнение (30) разрешимо относительно m при всех $\cos\mu$, т.е. собственное вращение гиростата может происходить вокруг произвольной наклонной оси.

Теперь рассмотрим случай $\boldsymbol{\alpha} \parallel \boldsymbol{\beta}$. Условия существования $\lambda(t) \neq \mathrm{const}$ выполняются, только если

$$\text{(III)} \quad \beta_1 = 0, \;\; \beta_2^2 = \frac{J_2 - J_1}{J_2 - J_3}, \;\; \beta_3^2 = \frac{J_1 - J_3}{J_2 - J_3}, \;\; \boldsymbol{e} \parallel \boldsymbol{\beta}, \qquad (32)$$

т.е. центр масс лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции. Это соответствует условию Гриоли существования регулярной прецессии твердого тела вокруг наклонной оси [5]. Здесь J_1 лежит между J_2 и J_3, $n + m\cos\mu = 0$, а

$$\lambda(t) = -m(\boldsymbol{J\beta}, \boldsymbol{\nu}) - \frac{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})}{m} - n(J_2 + J_3). \qquad (33)$$

Поскольку $n \neq 0$, то и $\cos\mu \neq 0$. Зависимость постоянной площадей g от параметров задачи определяется подсчетом постоянной в левой части равенства (22):

$$g = mJ_1 - \frac{(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{\beta})\cos\mu}{m}. \qquad (34)$$

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Если гиростат совершает регулярную прецессию относительно вертикали, то его центр масс лежит на оси собственного вращения и выполняются условия*

$$\alpha_1 = \beta_1 = 0, \quad (J_3 - J_1)\alpha_2\beta_2 + (J_2 - J_1)\alpha_3\beta_3 = 0, \tag{35}$$

причем только в случаях (I)-(III) существует периодическая с периодом $\dfrac{2\pi}{n}$ *функция* $\lambda(t)$, *такая, что* $\boldsymbol{\omega} = m\boldsymbol{\nu} + n\boldsymbol{\beta}$ *удовлетворяет системе* (1).

1. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики: В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т.2, ч.2. – С.219.
2. *Kovaleva L.M.* Investigation of permanent rotations of the rigid body with fixed point, carrying one- and two-degree gyros // XXII Yugoslav congress of theoretical and applied mechanics. – Vrnjacka Banja, 1997. – P.61-64.
3. *Волкова О.С.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела, несущего маховик // Механика твердого тела. – 2008. – **38**.
4. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // ПММ – 1999. – **63**, вып.5 – С.825-826.
5. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico // Ann. mat. pura ed appl. Ser.4. – 1947. – T.26. – f.3-4. – P.271-281.
6. *Горр Г.В., Илюхин А.А., Ковалев А.М., Савченко А.Я.* Нелинейный анализ поведения механических систем. – Киев: Наукова думка, 1984. – 288с.
7. *Горр Г.В., Мазнев А.В., Щетинина Е.К.* Прецессионные движения в динамике твердого тела и в динамике систем связанных твердых тел. – Донецк: ДонНУ, 2009. – 222с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
techmech@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 04.11.09