УДК 531.38

©2009. **И.А. Болграбская, Н.Н. Щепин**

КОНЕЧНОМЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрена конечномерная модель упругого стержня. Стержень моделировался с помощью системы n гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами. Полагалось, что упругие шарниры допускают повороты на углы, принимающие произвольное значение. Получен общий вид для компонентов упругого момента с учетом произвольности углов вращения. Проанализированы возможные состояния равновесия замкнутой системы связанных тел при различных значениях крутки в упругом шарнире (отсутствие крутки, постоянная крутка и произвольная крутка).

Введение. В настоящее время большое число публикаций посвящено изучению положения равновесия и его устойчивости для упругих стержневых систем [1–5]. Интерес к этому направлению связан с использованием этих систем при моделировании третичной структуры молекул ДНК. Изучаемые стержневые системы, оставаясь физически линейными, позволяют учесть геометрическую нелинейность, т.е. учитывать большие прогибы. Это оказалось особенно важным при изучении замкнутых упругих систем. Изучению геометрии таких объектов, в частности, посвящены работы [6–8].

В работах [9, 10] упругие стержни моделировались с помощью системы гироскопов Лагранжа, связанных упругими сферическими шарнирами. При этом в [9] полагалось, что углы Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k \quad (k = \overline{1,n})$, определяющие положение связанной системы координат по отношению к неподвижной системе, могут быть и не малыми, однако их разности $\psi_k - \psi_{k-1}, \theta_k - \theta_{k-1}, \varphi_k - \varphi_{k-1}$ – малы. В работе [10] была рассмотрена более общая модель, учитывающая нелинейность и по разности углов, однако при изучени равновесных конфигураций был рассмотрен лишь частный случай, в котором все оси симметрии тел расположены в одной плоскости ($\theta_k = 0,\ k = \overline{1,n}$), а угол собственного вращения φ_k, либо равен нулю, либо $\varphi_k - \varphi_{k-1} = \mathtt{const}$.

В настоящей работе получен общий вид упругого момента в пространственном случае. Установлены условия, позволяющие находить все возможные равновесные конфигурации системы. Детально изучен случай плоской конфигурации, позволяющий определить ее вид при различных значениях крутки (разности углов $\varphi_k - \varphi_{k-1}$).

1. Момент в упругом шарнире. Рассмотрим изотропный однородный упругий стержень. Полагаем, что главные оси изгиба и кручения совпадают с главными осями инерции поперечного сечения стержня и в недеформированном состоянии ось стержня прямолинейна. Как известно [11], в этом случае упругий момент имеет вид

$$\mathbf{M}(s) = k_1[\varkappa_1 \mathbf{e}_1(s) + \varkappa_2 \mathbf{e}_2(s)] + k_2 \varkappa_3 \mathbf{e}_3(s), \tag{1}$$

где k_1, k_2 – соответственно изгибная и крутильная жесткости; $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)$ – ортогональный базис, ось $\mathbf{e}_3(s)$ которого направлена по касательной к осевой линии стержня, а векторы $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)$ – по главным центральным осям инерции поперечного сечения; s – дуговая координата; $\varkappa_i$ – компоненты вектора Дарбу в проекциях на оси $\mathbf{e}_i(s)$.

В [10] показано, что вектор $\boldsymbol{\varkappa}$ может быть представлен так

$$\boldsymbol{\varkappa}(s) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \mathbf{e}_i(s) \times \frac{d\mathbf{e}_i(s)}{ds}. \tag{2}$$

Введем конечномерную модель рассматриваемого стержня. Заменим его системой n гироскопов Лагранжа, связанных в точках O_k пересечения осей симметрии тел упругими сферическими шарнирами. Полагаем, что точки O_k лежат на осевой линии стержня и, если ее длина равна l, а длина оси симметрии тела S_k равна $h_k = O_kO_{k+1}$, то имеем $l = \sum\limits_{i=1}^{n} h_i$ и, очевидно, $s = \sum\limits_{i=1}^{k} h_i$.

Пусть $\varkappa_k^i$ $(k = \overline{1,n},\ i = 1,2,3)$ компоненты вектора $\boldsymbol{\varkappa}$ в точке O_k (обозначим его $\boldsymbol{\varkappa}_k$) на оси связанной системы координат $CX_kY_kZ_k$ (орты $\mathbf{e}_k^1, \mathbf{e}_k^2, \mathbf{e}_k^3$), в которой ось CZ_k направлена вдоль оси симметрии тела S_k. Тогда упругий момент (1) в этой точке может быть представлен так

$$\mathbf{M}_k = k_1(\varkappa_k^1\mathbf{e}_k^1 + \varkappa_k^2\mathbf{e}_k^2) + k_2\varkappa_k^3\mathbf{e}_k^3. \tag{3}$$

Как установлено в [10], для конечномерной модели формула (2) в точке O_k допускает аппроксимацию в виде

$$\boldsymbol{\varkappa}_k = \frac{1}{2h}\sum_{i=1}^{3}(\mathbf{e}_{k-1}^i \times \mathbf{e}_k^i), \tag{4}$$

где $ds = h = \min\limits_k h_k$.

Пусть на систему не действуют внешние силы и моменты. В этом случае ее центр масс неподвижен. Свяжем с ним инерциальную систему координат, полагая, что ось OZ направлена вдоль недеформированной оси стержня. Определим положение связанной системы координат, являющейся главной центральной системой координат, связанной с телом S_k, углами Крылова $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$. Тогда, учитывая выражения для направляющих косинусов [12], из (4) находим

$$\begin{gathered}
\varkappa_k^1 = \frac{1}{2h}\{\sin(\psi_k - \psi_{k-1})(\cos\theta_k \sin\varphi_{k-1} + \cos\theta_{k-1}\sin\varphi_k) + \\
+ \cos(\psi_k - \psi_{k-1})(\cos\theta_{k-1}\sin\theta_k\cos\varphi_k - \cos\theta_k\sin\theta_{k-1}\cos\varphi_{k-1}) + \\
+ \sin\theta_k\cos\theta_{k-1}\cos\varphi_{k-1} - \sin\theta_{k-1}\cos\theta_k\cos\varphi_k\}; \\
\varkappa_k^2 = \frac{1}{2h}\{\sin(\psi_k - \psi_{k-1})(\cos\theta_k\cos\varphi_{k-1} + \cos\theta_{k-1}\cos\varphi_k) + \\
+ \cos(\psi_k - \psi_{k-1})(\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k\sin\varphi_{k-1} - \sin\theta_k\cos\theta_{k-1}\sin\varphi_k) - \qquad (5)
\end{gathered}$$

$$-\sin\theta_k\cos\theta_{k-1}\sin\varphi_{k-1}+\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k\sin\varphi_k\};$$

$$\varkappa_k^3=\frac{1}{2h}\{\cos(\psi_k-\psi_{k-1})\sin(\varphi_k-\varphi_{k-1})(1+\sin\theta_k\sin\theta_{k-1})-$$

$$-\sin(\psi_k-\psi_{k-1})\cos(\varphi_k-\varphi_{k-1})(\sin\theta_k+\sin\theta_{k-1})+$$

$$+\cos\theta_k\cos\theta_{k-1}\sin(\varphi_k-\varphi_{k-1})\}.$$

Подставляя (5) в (3), получаем выражения для упругого момента в зависимости от углов $\psi_k, \theta_k, \varphi_k$, которые могут принимать произвольные значения. Нетрудно убедиться, что в случае малости разности углов $\psi_k-\psi_{k-1}, \theta_k-\theta_{k-1}, \varphi_k-\varphi_{k-1}$ в линейной постановке эти формулы совпадают с приведенными в работе [9].

2. Положение равновесия в замкнутой системе. Пусть, как и в [9], [10], наша система моделирует замкнутую конфигурацию. В этом случае начальная точка оси симметрии первого тела O_1 и конечная точка оси симметрии последнего тела O_{n+1} совпадают и при этом считаем, что по углу кручения система совершила полный оборот. Тогда имеем

$$\varphi_0=\varphi_n+2\pi,\quad \varphi_{n+1}=\varphi_1-2\pi,\quad \psi_0=\psi_n,\quad \psi_{n+1}=\psi_1,\quad \theta_0=\theta_n,\quad \theta_{n+1}=\theta_1.$$

Кроме того, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbf{O}_k\mathbf{O}_{k+1}=0$, то должны быть удовлетворены соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}h_k\sin\psi_k\cos\theta_k=0;\quad \sum_{k=1}^{n}h_k\sin\theta_k=0;\quad \sum_{k=1}^{n}h_k\cos\psi_k\cos\theta_k=0, \tag{6}$$

В положении равновесия сумма всех сил и моментов, действующих на тело S_k, равна нулю. Как и в [10], будем считать, что действие тела S_{k-1} на S_k характеризует сила $\mathbf{R}_k$ и упругий момент $\mathbf{M}_k$, приложенные в точке O_k, а действие тела S_{k+1} на S_k, соответственно, сила $-\mathbf{R}_{k+1}$ и момент $-\mathbf{M}_{k+1}$, приложенные в точке O_{k+1}. Тогда положение равновесия тела S_k $(k=\overline{1,n})$ может быть найдено из уравнений

$$\mathbf{R}_k=\mathbf{R}_{k+1}=\mathbf{R}, \tag{7}$$

$$\mathbf{M}_k-\mathbf{M}_{k+1}-\mathbf{h}_k\times\mathbf{R}_{k+1}=0. \tag{8}$$

Представим силу реакции связи в виде

$$\mathbf{R}=R_x\mathbf{e}_x+R_y\mathbf{e}_y+R_z\mathbf{e}_z, \tag{9}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z-$ орты осей неподвижной системы координат.

Проектируя уравнения (8), с учетом (7), (9) на неподвижные оси, получаем следующую систему уравнений

$$M_k^x-M_{k+1}^x+h_k(R_z\sin\theta_k+R_y\cos\psi_k\cos\theta_k)=0,$$

$$M_k^y-M_{k+1}^y+h_k\cos\theta_k(R_z\sin\psi_k-R_x\cos\psi_k)=0, \tag{10}$$

$$M_k^z - M_{k+1}^z - h_k(R_y \sin\psi_k \cos\theta_k + R_x \sin\theta_k) = 0.$$

Здесь $k = \overline{1,n}$, а проекции упругого момента $\mathbf{M}_k$ на оси неподвижного базиса M_k^x, M_k^y, M_k^z, с учетом (5), имеют следующий вид

$$M_k^x = \frac{k_1}{2h}\{\sin(\psi_k - \psi_{k-1})[\cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_k -$$
$$- \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\psi_k \cos\theta_k + \sin\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_{k-1}] +$$
$$+ \cos(\psi_k - \psi_{k-1})[-\cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\psi_k \cos\theta_k \sin\theta_{k-1} -$$
$$- \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\theta_{k-1} + \cos\psi_k \cos\theta_{k-1} \sin\theta_k] +$$
$$+ \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin\psi_k \sin^2\theta_k \cos\theta_{k-1} + \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_{k-1} -$$
$$- \cos\psi_k \sin\theta_{k-1} \cos\theta_k\} + \frac{k_2}{2h} \sin\psi_k \cos\theta_k \{\cos(\psi_k - \psi_{k-1}) \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})(1 +$$
$$+ \sin\theta_k \sin\theta_{k-1}) - \sin(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})(\sin\theta_k + \sin\theta_{k-1}) +$$
$$+ \cos\theta_k \cos\theta_{k-1} \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})\},$$
$$M_k^y = \frac{k_1}{2h} \cos\theta_k \{\sin(\psi_k - \psi_{k-1})[\cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\theta_k + \cos\theta_{k-1}] +$$
$$+ \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})[\sin\theta_k \cos\theta_{k-1} - \cos(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos\theta_k \sin\theta_{k-1}]\} -$$
$$- \frac{k_2}{2h} \sin\theta_k \{\cos(\psi_k - \psi_{k-1}) \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})(1 + \sin\theta_k \sin\theta_{k-1}) - \tag{11}$$
$$- \sin(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})(\sin\theta_k + \sin\theta_{k-1}) + \cos\theta_k \cos\theta_{k-1} \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})\},$$
$$M_k^z = \frac{k_1}{2h}\{\sin(\psi_k - \psi_{k-1})[\cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_k +$$
$$+ \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin\psi_k \cos\theta_k + \cos\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_{k-1}] +$$
$$+ \cos(\psi_k - \psi_{k-1})[\cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin\psi_k \cos\theta_k \sin\theta_{k-1} - \sin\psi_k \cos\theta_{k-1} \sin\theta_k -$$
$$- \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\theta_{k-1}] + \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \cos\psi_k \sin^2\theta_k \cos\theta_{k-1} -$$
$$- \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \sin\psi_k \sin\theta_k \cos\theta_{k-1} + \sin\psi_k \sin\theta_{k-1} \cos\theta_k\} +$$
$$+ \frac{k_2}{2h} \cos\psi_k \cos\theta_k \{\cos(\psi_k - \psi_{k-1}) \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})(1 + \sin\theta_k \sin\theta_{k-1}) -$$
$$- \sin(\psi_k - \psi_{k-1}) \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})(\sin\theta_k + \sin\theta_{k-1}) + \cos\theta_k \cos\theta_{k-1} \sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})\}.$$

Подставляя (11) в (10), получаем систему уравнений, которая, с учетом (6), позволяет определить углы $\varphi_k, \psi_k, \theta_k$ $(k = \overline{1,n})$ и найти пространственную конфигурацию моделируемой оси стержня в положении равновесия. Очевидно, найти ее в явном виде не представляется возможным, однако это осуществимо в ряде частных случаев. Так, в работах [6–8] при анализе положения равновесия упругого объекта, а в работах [9, 10, 13, 14], при аналогичном анализе с использованием конечномерной модели предполагалось, что упругая линия расположена в одной плоскости. Рассмотрим далее плоскую конфигурацию и проведем анализ положения равновесия системы в зависимости от величины крутки $\varphi_k - \varphi_{k-1}$.

3. Плоская конфигурация. Пусть $\theta_k = 0 \ \ (k = \overline{1, n})$, при этом все оси симметрии тел S_k лежат в одной плоскости OXZ. Кроме того, сила реакции также лежит в этой плоскости и $R_y = 0$. Подстановка этих величин в (6), (10), приводит к системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} h_k \cos\psi_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} h_k \sin\psi_k = 0. \tag{12}$$

$$\frac{k_1}{2h}\{\sin(\psi_k - \psi_{k-1})[1 + \cos(\varphi_k - \varphi_{k-1})] - \sin(\psi_{k+1} - \psi_k)[1+ \\ + \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k)]\} = h_k(R_x \cos\psi_k - R_z \sin\psi_k), \tag{13}$$

$$\frac{k_2}{2h}\{\sin(\varphi_k - \varphi_{k-1})[1 + \cos(\psi_k - \psi_{k-1})] - \sin(\varphi_{k+1} - \varphi_k)[1+ \\ + \cos(\psi_{k+1} - \psi_k)]\} = 0 \quad k = \overline{1, n}. \tag{14}$$

Рассмотрим три возможные варианта: крутка отсутствует, крутка постоянна и крутка произвольна.

1. Пусть в рассматриваемой системе крутка отсутствует, при этом $\varphi_k - \varphi_{k-1} = 0$. Тогда уравнения (14) удовлетворены, а из (13) следует

$$\sin(\psi_{k+1} - \psi_k) - \sin(\psi_k - \psi_{k-1}) = a_k(R_x \cos\psi_k - R_z \sin\psi_k), \tag{15}$$

где $a_k = h_k h / k_1$.

Из системы (12), (15) могут быть найдены различные конфигурации плоской кривой в этом случае. В частности, для конечномерной системы они были определены в работах [10, 13, 14].

2. Пусть крутка $\varphi_k - \varphi_{k-1} = \mathtt{const}$. Тогда, если $\psi_k - \psi_{k-1} = \mathtt{const}$, то система уравнений (12), (14), (15) удовлетворена при условии $R_x = R_z = 0$ и $\psi_k = 2k\pi/n$. Это случай круговой конфигурации, который получен в [9].

Если же в случае постоянной крутки $\psi_k - \psi_{k-1} \neq \mathtt{const}$, то из (14) следует

$$\cos(\psi_k - \psi_{k-1}) = \cos(\psi_{k+1} - \psi_k). \tag{16}$$

Очевидно, что (16) не может быть выполнено при условии $\psi_k - \psi_{k-1} \neq \mathtt{const}$.

3. Пусть крутка произвольна. Если при этом $\psi_k - \psi_{k-1} = \mathtt{const}$, то из (14) получаем, что и крутка должна быть постоянна, а этот случай, соответствующий круговой конфигурации, нами уже рассмотрен.

Итак считаем $\psi_k - \psi_{k-1} \neq const$. Одной из найденных нами в этом случае конфигураций является конфигурация типа "восьмерки". Посмотрим, какой может быть крутка в этом случае, полагая, что при этом углы ψ_k и длины осей h_k выбирались как и в [10]. В этой работе был изучен случай шести тел и ψ_k были выбраны так

$$\psi_1 = \psi_3 = \theta, \quad \psi_2 = -\psi, \quad \psi_4 = \psi_6 = \pi - \theta, \quad \psi_5 = \pi + \psi, \tag{17}$$

а длины осей симметрии тел равны

$$h_1 = h_3 = h_4 = h_6, \quad h_2 = h_5. \tag{18}$$

Здесь θ и $-\psi$, соответственно, углы между неподвижной осью Ox и осью симметрии тел S_1 и S_2.

Подставляя (17), (18) в (12), убеждаемся, что эта система удовлетворена в случае

$$2a \sin\theta = \sin\psi, \tag{19}$$

где $a = h_1/h_2$.

Из уравнений (15) при выборе решения в виде (17) следует, что крутка должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{gathered} \sin(\varphi_6 - \varphi_5) = \sin(\varphi_5 - \varphi_4) = \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \sin(\varphi_1 - \varphi_6) = \sin(\varphi_4 - \varphi_3) \end{gathered} \tag{20}$$

и при этом

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_6) = \frac{1 + \cos(\psi + \theta)}{1 - \cos 2\theta} \sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{21}$$

Обозначим $\varphi_2 - \varphi_1 = \alpha,\ \varphi_1 - \varphi_6 = \beta$ и будем считать, что крутка

$$0 < \varphi_k - \varphi_{k-1} < \pi/2,$$

тогда из (20) следует

$$\varphi_6 - \varphi_5 = \varphi_5 - \varphi_4 = \varphi_3 - \varphi_2 = \varphi_2 - \varphi_1 = \alpha, \quad \varphi_1 - \varphi_6 = \varphi_4 - \varphi_3 = \beta. \tag{22}$$

Подстановка решения (17) в (14) с учетом (18), (22), приводит к следующему уравнению

$$\frac{\sin 2\theta(1 + \cos\beta) - \sin(\theta + \psi)(1 + \cos\alpha)}{2\sin(\theta + \psi)(1 + \cos\alpha)} = a\frac{\cos\theta}{\cos\psi}, \tag{23}$$

Отметим, что в случае, когда крутка постоянна (при этом $\alpha = \beta$) или отсутствует $(\alpha = 0, \beta = 0)$, это уравнение совпадает с полученным в [10].

Кроме того, поскольку система замкнута и мы считали, что $\varphi_0 = \varphi_6 + 2\pi$, то

$$\sum_{k=1}^{6} (\varphi_k - \varphi_{k-1}) = 2\pi. \tag{24}$$

Из (22), (24) следует, что

$$\beta = \pi - 2\alpha. \tag{25}$$

Подставляя (25) в (21), получим

$$\cos\alpha = \frac{1 + \cos(\psi + \theta)}{2(1 - \cos 2\theta)}. \tag{26}$$

Таким образом, решение (17), описывающее конфигурацию типа "восьмерки" при условии, что крутка не постоянна и не равна нулю, а выбирается согласно (20), существует, если переменные $\psi, \theta, \alpha, \beta$ удовлетворяют соотношениям (19), (23), (25) и (26). Очевидно, что подстановка (25), (26) в (23) позволяет исключить α и β из уравнения (23) и из полученного уравнения и (19) определить область существования углов ψ, θ, определяющих вид искомой конфигурации, а затем из (25), (26) найти соответствующее значение крутки.

1. *Swigon D., Coleman B.D., Tobias I.* The Elastic Rod Model for DNA and Its Application to the Tertiary Structure of DNA Minicircles in Mononucleosomes // Biophysical Journal. – 1998. – **74**. – P.2515-2530.
2. *Bouchiat C., Mŕezard M.* Elastic rod model of a supercoiled DNA molecule // Eur. Phys. J. E. – 2000. – **2**. – P.377-402.
3. *Coleman B.D., Swigon D.* Theory of Supercoiled Elastic Rings with Self-Contact and Its Application to DNA Plasmids // Journal of Elasticity. – 2000. – **60**. – P.173-221.
4. *Hoffman K.A.* Methods for determining stability in continuum elastic-rod models of DNA// Phil. Trans. R. Lond. A. – 2004. – **362**. – P.1301-1315.
5. *Kai Hu* Writhe of DNA induced by a terminal twist // Bulletin of Mathematical Biology. – 2005. – **67**. – P.197-209.
6. *Wadati M., Tsuru H.* Elastic model of looped DNA // Physiica. – 1986. – 21D. – P.213-226.
7. *Бенхэм Дж.* Механика и равновесные состояния сверхспирализованной ДНК // В кн.: Математические методы для анализа последовательностей ДНК. – М.: Мир, 1999. – С.308-338.
8. *Starostin E.L.* Three-dimensional shapes of looped DNA// Colloquium EVROMECH 325 (19-22 September, 1994, L'Aquila, Italy). – 1994. – 23p.
9. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Конечномерная модель замкнутого упругого стержня // Механика твердого тела. – 2005. – Вып.35. – С.33-39.
10. *Болграбская И.А., Савченко А.Я., Щепин Н.Н.* Замкнутые системы связанных твердых тел // Механика твердого тела. – 2006. – Вып.36. – С.94-103.
11. *Илюхин А.А.* Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней. – Киев: Наук. думка, 1979. – 216с.
12. *Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А.* Устойчивость движения систем связанных твердых тел. – Киев: Наук. думка, 1991. – 168с.
13. *Болграбская И.А., Щепин Н.Н.* Положение равновесия замкнутых систем с самопересечением // Механика твердого тела. – 2007. – Вып.37. – С.145-151.
14. *Bolgrabskay I.A., Shchepin N.N.* Finite dimensional model of closed elastic systems // Proc. of the 9th conf. of dynamical systems – theory and applications (December 17-20, 2007, Lodz, Poland). – 2007. – V.2. – P.135-143.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
bolg@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 10.07.09