УДК 517.984+517.988

©2009. **О.В. Иванова**

МНОГООБРАЗИЕ К. УЛЕНБЕК И ЕГО ПОДМНОГООБРАЗИЯ

В работе определены многообразия собственных значений и нормированных собственных векторов для различных семейств симметрических операторов, а также их подмногообразия, порожденные собственными значениями фиксированной конечной кратности.

Введение. K.Uhlenbeck [1] рассмотрела множество Q троек (симметрический эллиптический оператор A, собственное значение λ, нормированная собственная функция y) и показала, что это множество является аналитическим многообразием. Также она установила, что по свойствам этого многообразия можно восстановить некоторые спектральные свойства операторов и наоборот. Абстрактный аналог многообразия Uhlenbeck для случая вещественных компактных самосопряженных операторов был рассмотрен Я.М.Дымарским [2].

Здесь, опираясь на результаты итальянских математиков D.Lupo, A.M.Micheletti [3], мы заново восстанавливаем результаты Uhlenbeck для семейств абстрактных фредгольмовых операторов. Также мы доказываем наличие гладкой структуры у подмножеств многообразия Q, точки которых характеризуются фиксированной кратностью соответствующих собственных значений.

Автор благодарит Я.М.Дымарского за постановку задачи и постоянную поддержку в работе.

Основные понятия и обозначения. Обозначим: H_1, H_2 – вещественные сепарабельные гильбертовы пространства со скалярными произведениями $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ и нормами $\|\cdot\|_i$ $(i = 1, 2)$, соответственно, причем $H_1 \subset H_2$ и вложение плотно и компактно; L_s – пространство ограниченных вещественных симметрических операторов $A : H_1 \to H_2$ (т.е. для любых $x_1, x_2 \in H_1$ справедливо равенство $\langle Ax_1, x_2\rangle_2 = \langle x_1, Ax_2\rangle_2$), обычную норму операторов будем обозначать $\|A\|$; $S^\infty = \{x \in H_1 : \|x\|_2 = 1\}$ – единичная сфера (отметим, что нормировка собственных векторов осуществляется с помощью скалярного произведения из H_2). Обозначим через $\Phi \subset L_s$ открытое подмножество фредгольмовых операторов индекса ноль.

Рассмотрим подмножество Q троек $q = (\lambda, x, A)$, где $A \in \Phi$, λ – собственное значение оператора, x – нормированный собственный вектор, отвечающий этому собственному значению, т.е.

$$Q = \{(\lambda, x, A) \in \mathbb{R} \times S^\infty \times \Phi : Ax = \lambda x\}.$$

Определение 1. Сопоставим каждой точке $q \in Q$ натуральное число m – кратность собственного значения λ. Точку q назовем простой, если $m = 1$, в противном случае кратной.

В силу компактности вложения $H_1 \subset H_2$, кратность $m < \infty$. В самом деле, оператор $A - \lambda :\ H_1 \to H_2$ является фредгольмовым оператором индекса ноль, поскольку мы возмущаем фредгольмов оператор A компактным оператором $\lambda \cdot im$, где im – компактное вложение пространств. Известно [4], что компактное возмущение сохраняет фредгольмовость оператора и его индекс.

Обозначим через $Q(m) \subset Q$ подмножество всех троек $(\lambda, x, A) \in Q$, у которых собственное значение λ изолировано и имеет кратность m. Пусть $q^0 = (\lambda^0, x^0, A^0) \in Q(m)$ – фиксированная точка. Рассмотрим множества Q и $Q(m)$ в ее окрестности. По определению кратности, $\dim\ker(A^0 - \lambda^0 \cdot im) = m$. Обозначим через $x^0 = x_1, x_2, ..., x_m$ – ортонормированные собственные векторы, отвечающие собственному значению λ^0. Пространство, порожденное этими векторами, обозначим $R_0^m = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$.

Определим разложение пространств H_1 и H_2 в прямые суммы:

$$H_1 = R_0^m \oplus H_{1,\perp}, \quad H_2 = R_0^m \oplus H_{2,\perp},$$

где $H_{1,\perp}$ и $H_{2,\perp}$ – ортогональные дополнения относительно скалярного произведения в H_2. Указанные разложения пространств H_1 и H_2 порождают проекторы

$$P_1 : H_1 \to R_0^m, \quad P_2 : H_2 \to R_0^m;$$

$$Q_1 : H_1 \to H_{1,\perp}, \quad Q_2 : H_2 \to H_{2,\perp}.$$

Любой вектор $x \in H_1$ можно представить в виде пары $x = (u, v)$, где $u = P_1 x$, $v = Q_1 x$. Для произвольного оператора $G \in L_s$ справедливо разложение:

$$G = P_2 G P_1 + Q_2 G P_1 + Q_2 G Q_1 + P_2 G Q_1.$$

Обозначим $Y := P_2 G P_1$, $Z := Q_2 G P_1$, $S := Q_2 G Q_1$, $T := P_2 G Q_1$. Тогда $G = Y + S + T + Z$. Удобно применять матричное обозначение

$$G = \begin{pmatrix} Y & Z \\ S & T \end{pmatrix}.$$

Гладкая структура подмножеств Q и $Q(m)$.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Подмножество $Q \subset \mathbb{R} \times S^\infty \times \Phi$ является аналитическим банаховым подмногообразием локально диффеоморфным L_s.

2. Подмножество $Q(m) \subset Q$ является аналитическим подмногообразием Q; его коразмерность вычисляется по формуле:

$$codim Q(m) = \frac{m(m-1)}{2}.$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $q^0 = (\lambda^0, x^0, A^0)$, имеющую некоторую кратность m, т.е. $q^0 \in Q(m)$. Пусть точка $q = (\lambda, x, A)$ близка точке q^0. Без ограничения общности считаем, что $\lambda^0 \neq 0$. Обозначим $G = A - A^0$, $x = (u, v)$, где нормы $||u - x^0||_1$ и $||v||_1$ малы. Пусть $B(\varepsilon) = \{G : |||G\| < \varepsilon\}$ – малый шар операторов.

Нас интересует множество троек $(\lambda, (u,v), G) \in \mathbb{R} \times S^{\infty} \times B(\varepsilon)$, которые удовлетворяют уравнению

$$(A^0 - \lambda \cdot im + G) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0.$$

Перепишем уравнение в блочно-матричном виде

$$\left(\begin{pmatrix} \lambda^0 E_0 & 0 \\ 0 & A^0_{11} \end{pmatrix} - \lambda \cdot im + \begin{pmatrix} Y & Z \\ S & T \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где E_0 – тождественный оператор на R^m_0. В дальнейшем мы опускаем оператор вложения im и оператор E_0, что не приведет к недоразумению. Последнее уравнение равносильно системе

$$-(\lambda - \lambda_0)u + Yu + Zv = 0; \tag{1}$$

$$(A^0_{11} - \lambda)v + Su + Tv = 0. \tag{2}$$

В силу изолированности собственного значения λ^0, оператор $A^0_{11} - \lambda : H_{1,\perp} \to H_{2,\perp}$ является линейным изоморфизмом для всех малых $\lambda - \lambda^0$. Следовательно, существует ограниченная резольвента

$$R(\lambda) := (A^0_{11} - \lambda)^{-1} : \ H_{2,\perp} \to H_{1,\perp}.$$

Поэтому уравнение (2) можно преобразовать к эквивалентному уравнению:

$$v = -R(Tv + Su) \ \Leftrightarrow \ v + RTv = -RSu \ \Leftrightarrow \ (E_{1,\perp} + RT)v = -RSu,$$

где $E_{1,\perp}$ – тождественный оператор на $H_{1,\perp}$. Поскольку оператор G мал, его блок T также малый (очевидно $\|T\| \leq \|H\|$). Следовательно, существует ограниченная резольвента

$$K(\lambda) := (E_{1,\perp} + RT)^{-1} : H_{1,\perp} \to H_{1,\perp},$$

а последнее уравнение равносильно уравнению

$$v = -KRSu. \tag{3}$$

Подставим выражение v из (3) в уравнение (1):

$$-(\lambda - \lambda^0)u + Yu - ZKRSu = 0. \tag{4}$$

Таким образом, система уравнений (1), (2) равносильна системе (3), (4).

Покажем, что система (3), (4) определяет аналитическое банахово многообразие. С этой целью введем в рассмотрение нелинейное отображение

$$F = (F_0, F_1) : \ \mathbb{R} \times S^{\infty} \times B(\varepsilon) \to R^m_0 \times H_{1,\perp} = H_1,$$

$$F(\lambda, (u,v), G) := (-(\lambda - \lambda^0)u + Yu - Z \cdot K(\lambda) \cdot R(\lambda) \cdot Su, \ v + K(\lambda) \cdot R(\lambda) \cdot Su).$$

Покажем, что отображение F является в точке $(\lambda^0, (u_1, 0), 0)$ сюръекцией. Достаточно доказать сюръективность суммы частных производных по переменным v и Y.

Обозначим через $L_s^{(m)}$ пространство самосопряженных операторов, действующих на R_0^m. Указанный оператор частной производной действует следующим образом:

$$(D_v + D_Y)F(\lambda^0, (u_1, 0), 0): \ H_{1,\perp} \times L_s^{(m)} \to R_0^m \times H_{1,\perp},$$

$$(D_v + D_Y)F|_{(\lambda^0,(u_1,0),0)}(\Delta v, \Delta Y) = (\Delta Y u_1, \Delta v). \tag{5}$$

Очевидно, компонента ΔY накрывает пространство R_0^m, а компонента Δv изоморфно накрывает $H_{1,\perp}$, причем накрытия линейно независимы. Ядро оператора $(D_v + D_Y)F(\lambda^0, (u_1, 0), 0)$ конечномерно, поскольку пространство $L_s^{(m)}$ конечномерно. Следовательно, ядро $ker(D_v + D_Y)F(\lambda^0, (u_1, 0), 0)$ разлагает область определения оператора. Поэтому ядро оператора полной производной $DF(\lambda^0, (u_1, 0), 0)$ также разлагает область определения.

Чтобы найти модельное пространство многообразия Q, возьмем в связной окрестности данной точки $q^0 \in Q(m)$ произвольную простую точку $q^* \in Q(1)$. Такая точка найдется в любой окрестности данной точки, поскольку m-кратное собственное значение можно сколь угодно малым возмущением оператора A^0 расщепить на m простых собственных значений [4]. В силу связности окрестности, модельное пространство для многообразия Q в окрестности точки q^* является модельным и для окрестности точки q^0 [5]. В точке q^* описанная выше частная производная (5) является изоморфизмом, поскольку $\Delta Y \in L_s^{(1)} \cong \mathbb{R}$. Касательное пространство, на котором действует оператор полной производной, имеет следующую структуру

$$T_{q^*}(\mathbb{R} \times S^\infty \times L_s) = \mathbb{R} \times T_{u^*}S^\infty \times L_s = \mathbb{R} \times T_{u^*}S^\infty \times (L_s^{(1)} \times L_{s,\lrcorner}),$$

где $L_{s,\lrcorner} \subset L_s$ – замкнутое подпространство операторов вида

$$L_{s,\lrcorner} = \{G = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ S & T \end{pmatrix}, \quad 0 \in \mathbb{R}\}.$$

Следовательно, ядром полной производной $DF(\lambda^0, (u_1, 0), 0)$ является прямое произведение $\mathbb{R} \times 0 \times (0 \times L_{s,\lrcorner})$, которое изоморфно L_s. Но ядро полной производной как раз является модельным пространством. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. В силу равенства (3), каждый собственный вектор $(u, v) = (u, -KRSu)$, т.е. его вторая компонента полностью определяется первой. Поэтому кратность собственного значения совпадает с размерностью ядра оператора $C = -(\lambda - \lambda_0) + Y - ZKRS$ (см. (4)). Если $q \in Q(m)$, то ядро указанного оператора m-мерно. Но оператор C действует в m-мерном пространстве R_0^m, следовательно C является нулевым оператором. Итак, точка $q \in Q(m)$ тогда и только тогда, когда оператор

$$C = -(\lambda - \lambda_0) + Y - ZKRS = 0 \in L_s^{(m)}.$$

Но, в силу условия (4), для собственного вектора $u_1 \in R_0^m$ справедливо равенство

$$(-(\lambda - \lambda_0) + Y - ZKRS)u_1 = 0.$$

Следовательно, при выполнении условий (3) и (4) собственное подпространство m-мерно тогда и только тогда, когда сужение оператора C на $(m-1)$-мерное подпространство $R^{m-1}_{\perp u_1} \subset R^m_0$, перпендикулярное u_1, является нулевым оператором, т.е.

$$(-(\lambda-\lambda_0)+Y-ZKRS)_{\perp u_1}=0\in L_s^{(m-1)}. \qquad (6)$$

Чтобы проверить, является ли условие (6) сюрьекцией, введем отображение

$$F_{0,\perp u_1}:\ \mathbb{R}\times S^{\infty}\times L_s\to L_s^{(m-1)},$$

$$F_{0,\perp u_1}(\lambda,\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix},G):=(-(\lambda-\lambda_0)+Y-ZKR(\lambda-\lambda_0)S)_{\perp u_1}$$

и линеаризуем его. Производная отображения $F_{0,\perp u_1}$ в точке $(0,(u_1,0),\lambda^0)$ действует следующим образом:

$$DF_{0,\perp u_1}(\lambda^0,(u_1,0),0)(\Delta\lambda,(\Delta u,\Delta v),\Delta G)=(-\Delta\lambda\cdot E+\Delta Y+0)_{\perp u_1}=$$

$$\begin{pmatrix} \Delta y_{22}-\Delta\lambda & \dots & \Delta y_{2m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \Delta y_{m2} & \dots & \Delta y_{mm}-\Delta\lambda\end{pmatrix}.$$

Очевидно, это накрытие пространства $L_s^{(m-1)}$.

Посчитаем коразмерность подмногообразия $Q(m)\subset Q$. Она равна количеству условий, содержащихся в уравнении (6). Этих условий столько, сколько независимых элементов в симметричной матрице порядка $m-1$:

$$codim Q(m)=\frac{m(m-1)}{2}.$$

□

Семейство дифференциальных операторов. Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}$ ограниченная область с гладкой C^3-границей $\partial\Omega$; $L_2(\Omega)$ – гильбертово пространство функций, интегрируемых на Ω с квадратом; $\dot W^2_2(\Omega)$ – пространство Соболева функций, удовлетворяющих на границе $\partial\Omega$ краевому условию Дирихле. Нормы введенных пространств будем обозначать единообразно $\|\cdot\|$, что не приведет к недоразумению.

Рассмотрим семейство операторов вида:

$$A:=(-grad^2+a(x)):\dot W^2_2(\Omega)\to L_2(\Omega),$$

где в качестве параметра семейства взяты потенциалы $a\in C^1(\Omega)$.

Обозначим $S^{\infty}=\{y\in\dot W^2_2(\Omega):\int y^2dx=1\}$. Рассмотрим множество троек $q=(a,\lambda,y)$, где $a\in C^1(\Omega)$, λ – собственное значение, y – нормированная собственная функция, отвечающая этому собственному значению, т.е.

$$Q_{\partial}:=\{q=(a,\lambda,y)\in C^1(\Omega)\times\mathbb{R}\times S^{\infty}:\ (-grad^2+a)y=\lambda y\}.$$

Хорошо известно, что спектр оператора Q_∂ состоит из изолированных конечнократных собственных значений λ_n, причем $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$ [1]. Указанное свойство спектра позволяет уточнить определение 1.

Определение 2. Припишем каждой точке $q = (a, \lambda, y)$ пару (k, m) натуральных чисел – номер и кратность соответствующего значения λ. Точку $q = (a, \lambda, y)$ назовем простой, если $m = 1$, в противном случае – кратной.

Введем подмножество $Q(k,m) \subset Q_\partial$, состоящее из точек с указанными номером и кратностью. $Q_\partial = \bigcup Q(k,m)$, где объединение осуществляется по всем натуральным k и m.

Пусть $q^0 = (a^0, \lambda^0, y^0) \in Q(k,m)$ – фиксированная точка. Рассмотрим множества Q_∂ и $Q(k,m)$ в ее окрестности.

Пусть $y_1^0 = y^0, y_2^0, ..., y_m^0$ ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, отвечающие собственному значению λ_0. Пространство, порожденное этими функциями, обозначим $R_0^m = \{y_1^0 = y^0, y_2^0, ..., y_m^0\}$.

Определим разложение пространств $\dot{W}_2^2$ и L_2 в прямые суммы:

$$\dot{W}_2^2 = R_0^m \oplus \dot{W}_{2,\perp}^2; \quad L_2 = R_0^m \oplus L_{2,\perp},$$

где $\dot{W}_{2,\perp}^2$ и $L_{2,\perp}$ – ортогональные дополнения относительно скалярного произведения в L_2. Указанные разложения пространств $\dot{W}_2^2$ и L_2 порождают проекторы:

$$P_1 : \dot{W}_2^2 \to R_0^m, \quad P_2 : L_2 \to R_0^m;$$

$$Q_1 : \dot{W}_2^2 \to \dot{W}_{2,\perp}^2, \quad Q_2 : L_2 \to L_{2,\perp}.$$

Произвольная функция $y \in \dot{W}_2^2$ единственным образом представима в виде $y = u+v$, где $u \in R_0^m$, $v \in \dot{W}_{2,\perp}^2$. Для произвольного оператора $M : \dot{W}_2^2 \to L_2$ справедливо разложение $M = P_2 M P_1 + Q_2 M P_1 + Q_2 M Q_1 + P_2 M Q_1$.

В частности, оператор A^0 представим в виде:

$$A^0 = (-\mathrm{grad}^2 + \mathrm{a}^0) = \begin{pmatrix} \lambda^0 & 0 \\ 0 & A_{11}^0 \end{pmatrix}.$$

Возмущение потенциала, рассмотренное как оператор умножения $y \to (a - a^0)y$, также представимо в блочном виде

$$a - a^0 = \begin{pmatrix} Y & Z \\ S & T \end{pmatrix}.$$

Опишем гладкую структуру множеств Q_∂ и $Q(k,m)$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Подмножество $Q_\partial \in C^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times S^\infty$ является вещественным аналитическим банаховым подмногообразием с модельным пространством $C^1(\Omega)$ и касательным *пространством* $T_{q_0}Q_\partial = \{(\Delta a, \Delta\lambda, \Delta y) \in C^1(\Omega)\times\mathbb{R}\times T_{y_0}S^\infty\}$, *которое определяется условиями*

$$\begin{pmatrix} -\Delta\lambda \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \int \Delta a\cdot (y_1^0)^2 dx \\ \int \Delta a\cdot y_1^0 y_2^0 dx \\ \dots \\ \int \Delta a\cdot y_1^0 y_m^0 dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in R_0^m, \tag{7}$$

$$\Delta v + (A_{11}^0 - \lambda^0)^{-1}\cdot \Delta S y_0 = 0 \in L_{2,\perp}.$$

2. Пусть $q^0 \in Q(k,m)$. *Если функции* $y_i^0 y_j^0$ $(i,j \geq 2)$ *линейно независимы, то в окрестности точки* q^0 *подмножество* $Q(k,m) \subset Q_\partial$ *является вещественным аналитическим подмногообразием коразмерности* $(1/2)m(m-1)$. *Его касательное пространство* $T_{q_0}Q(k,m) \subset T_{q_0}Q_\partial$ *определяется условиями:*

$$\int \Delta a\cdot (y_i^0)^2 dx - \Delta\lambda = 0, \quad 2 \leq i \leq m; \quad \int \Delta a\cdot y\Delta_i^0 y_j^0 dx = 0, \quad 2 \leq i < j \leq m.$$

Доказательство. Оба пункта теоремы доказываются аналогично теореме 1. Докажем первый пункт.

Пусть точка $q = (a,\lambda,y)$ близка точке q^0. Обозначим $y = (u,v)$, где нормы $\|u-y^0\|$ и $\|v\|$ – малы. Пусть $B(\varepsilon) = \{a - a^0 : |\|a - a^0\| < \varepsilon\}$ – малый шар потенциалов.

Будем искать тройки $(a-a^0, \lambda-\lambda^0, (u,v)) \in B(\varepsilon)\times\mathbb{R}\times S^\infty$, близкие к исходным, удовлетворяющие уравнению

$$((-grad^2 + a_0) - \lambda\cdot E + \Delta a)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

С помощью резольвент $R = (A_{11}^0 - \lambda)^{-1}$ и $K = (E+RT)^{-1}$ от уравнения (8) перейдем к равносильной системе:

$$v + KRSu = 0 \in \dot W_{2,\perp}^2, \tag{9}$$

$$-(\lambda - \lambda_0)u + Yu - ZKRSu = 0 \in R_0^m \subset \dot W_2^2. \tag{10}$$

Условие (9) невырождено, поскольку оно содержит тождественное отображение по переменной $v \in \dot W_{2,\perp}^2$. Условие (10) также невырождено, т.к. его линеаризация (7) невырождена в силу линейной независимости функций $(y_1^0)^2, y_1^0 y_2^0, ..., y_1^0 y_m^0$. $\square$

1. *Uhlenbeck K.* Generic properties of egenfunction // Amer. J. Math. – 1976. – V.98, no 4. – P.1059-1078.
2. *Дымарский Я.М.* Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т.24. – С.3-159.
3. *Lupo D., Micheletti A.M.* On multiple egenvalues of selfadjoint compact operators // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – 172. – P.106-116.
4. *Хелемский А.Я.* Лекции по функциональному анализу // М.: МЦНМО – 2004. – 552с.
5. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий // М.: Мир – 1967. – 204с.

Луганский национальный ун-т
им. Тараса Шевченко
`busssy@list.ru`

Получено 18.03.09