УДК 517.9

©2009. **С.П. Дегтярев**

МГНОВЕННАЯ КОМПАКТИФИКАЦИЯ НОСИТЕЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Рассматривается задача Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с сильной абсорбцией и с начальными данными мерами. Найдены необходимые и достаточные условия на начальные данные, при которых имеет место явление мгновенной компактификации носителя решения. Получены также точные по порядку двусторонние оценки размеров носителя решения.

1. Постановка задачи и основной результат. В области $\Omega_T = R^N \times (0,T)$, $T > 0$, рассмотрим следующую задачу Коши для неизвестной функции $u(x,t)$:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) + u^{\lambda} = 0, \quad (x,t) \in R^N \times (0,T), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где $\triangle$ – оператор Лапласа, $\lambda \in (0,1)$, $u_0(x)$ – заданная начальная функция, которая может быть локально конечной радоновской мерой, причем мы предполагаем начальную функцию, а следовательно, и решение – неотрицательными.

К настоящему времени известно, что если $u_0(x)$ достаточно регулярна (например, непрерывна), то при определенном ее поведении на бесконечности в задаче (1), (2) наблюдается явление мгновенной компактификации носителя – см. [1]–[11]. Суть данного явления состоит в том, что если даже носитель начальной функции $u_0(x)$ совпадает со всем R^N, носитель решения $u(x,t)$ становится компактным (по переменным x) в любой сколь угодно малый момент времени $t > 0$.

Ранее, в работах [10], [11] в случае, когда начальные данные являются радоновскими мерами, была получена точная по порядку двусторонняя оценка размеров носителя решения задачи Коши для уравнения с двойной нелинейностью вида

$$\frac{\partial u^{\beta}}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + u^{\lambda} = 0, \tag{3}$$

где $\beta, \lambda, p > 0$, $\lambda < \min\{\beta, p-1\}$, $p \neq 1+\beta$, то есть, в частности, на параметры задачи было наложено ограничение $p \neq 1+\beta$, смысл которого состоит в том, что уравнение является либо вырождающимся, либо сингулярным. Однако, нетрудно видеть, что при таком ограничении классическое уравнение (1) выпадает из общей схемы уравнения (3), так как для уравнения (1) параметры равны, соответственно $\beta = 1$, $p = 2$, то есть как раз $p = 1+\beta$.

Таким образом, целью данной работы является изучение явления мгновенной компактификации носителя для уравнения вида (1), когда начальные данные представляют собой локально конечные радоновские меры и получение при этом точных по порядку оценок размеров носителя решения в начальные моменты времени $t > 0$.

Прежде чем сформулировать основной результат работы введем несколько определений и обозначений.

Под слабым решением задачи (1), (2) мы понимаем измеримую функцию $u(x,t)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u \in L_2([0,T], W^1_{2,loc}(R^N))$;

2) для любой $\zeta(x) \in C_0^\infty(R^N)$ отображение

$$t \in [0,T] \to \int_{R^N} u(x,t)\zeta(x)dx$$

непрерывно на $[0,T]$;

3) для любой $\zeta(x,t) \in C^\infty(R^N \times [0,T])$ с компактным по переменным x носителем выполнено интегральное тождество

$$\int_{R^N} u(x,t)\zeta(x,t)dx + \int_0^t \int_{R^N} \nabla u(x,\tau)\nabla\zeta dx d\tau + \int_0^t \int_{R^N} u^\lambda \zeta(x,\tau)dxd\tau =$$

$$= \int_{R^N} u_0(x)\zeta(x,0)dx + \int_0^t \int_{R^N} u(x,\tau)\zeta_\tau(x,\tau)dxd\tau, \tag{4}$$

где ∇u – градиент функции по пространственным переменным.

Отметим, что существование и единственность слабого решения рассматриваемой задачи следует, например, из работы [12]. Отметим также, что ввиду свойств слабого решения, интегральное тождество (4) справедливо также для функций $\zeta(x,t) \in W^{2,1}_{2,loc}(R^N \times [0,T])$ с компактным по переменным x носителем.

Пусть $B_{t,\sigma}(x)$ – открытый шар в пространстве R^N с центром в точке x радиуса $\sigma t^{1/2}$, $t > 0$, $\sigma > 0$, то есть

$$B_{t,\sigma}(x) = \{y \in R^N : |y - x| < \sigma t^{1/2}\}, \tag{5}$$

и пусть $B_t(x) \equiv B_{t,1}(x)$. Пусть, далее,

$$\varphi_t(x) = \frac{1}{|B_t(x)|}\int_{B_t(x)} u_0(x)dx \equiv \fint_{B_t(x)} u_0(x)dx, \tag{6}$$

где, в случае, если $u_0(x)$ представляет собой меру, интеграл по шару $B_t(x)$ от $u_0(x)$ представляет собой полную вариацию этой меры по шару $B_t(x)$. Обозначим также для $r > 0$

$$\varphi_t(r) = \sup_{|x|=r} \varphi_t(x). \tag{7}$$

Обозначим также

$$R(t) = \inf_{k>0}\{k : u(x,t) \equiv 0, \quad |x| > k\} \ -$$

верхняя граница носителя решения в момент времени $t > 0$.

Теорема 1. *Если $u_0(x) \geq 0$ – локально конечная радоновская мера, то в задаче Коши (1), (2) имеет место мгновенная компактификация носителя тогда и только тогда, когда*

$$\varphi_t(r) \to 0, \quad r \to \infty. \tag{8}$$

При этом существуют такие константы $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $M > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $t_0 > 0$, что при $t \leq t_0$

$$R(t) \leq (1+\varepsilon)\varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}), \tag{9}$$

$$R(t) \geq \varphi_{Mt}^{-1}(\gamma_2 t^{\frac{1}{1-\lambda}}), \tag{10}$$

где в случае немонотонно убывающей по r функции $\varphi_t(r)$ мы полагаем

$$\varphi_t^{-1}(s) = \inf_{\rho>0}\{\rho : \varphi_t(r) < s, \quad r \geq \rho\}. \tag{11}$$

Последующие параграфы статьи посвящены доказательству теоремы 1. Отметим при этом, что в ходе доказательства мы будем умножать обе части уравнения (1) на некоторые тестирующие функции с последующим интегрированием. Эти операции оправдываются выбором в интегральном тождестве (4) стекловских усреднений от некоторых срезок решения, интегрированием по частям и последующим переходом к пределу по параметру усреднения в окончательных соотношениях. Этот процесс стандартен и описан, например, в монографии [13], поэтому мы не останавливаемся на этом подробно (см. также работу [14], где это проделано детально для уравнения с двойной нелинейностью).

Кроме того, отметим, что через C и γ мы будем обозначать все абсолютные константы, либо константы, зависящие только от раз и навсегда зафиксированных данных задачи.

2. Условие на локальную массу решения, при котором решение локально обращается в ноль. В этом параграфе мы приведем несколько вспомогательных утверждений из работ [15], [10], [11] в формулировке, вытекающей из конкретного вида задачи (1), (2).

Обозначим

$$Y(x_0,t) = \sup_{t/2<\tau<t} \int_{B_{t,1/2}(x_0)} u^2(x,\tau)dx + \tag{12}$$

$$+ \int_0^t \int_{B_{t,1/2}(x_0)} |\nabla u|^2 dxd\tau + \int_0^t \int_{B_{t,1/2}(x_0)} u^{\lambda+1} dxd\tau.$$

Частным случаем Леммы 2.1 из работы [10] является следующее утверждение.

Лемма 1. *Существует* $\gamma_3 > 0$ *такое, что, если*

$$Y(x_0,t) \le \gamma_3 t^{\frac{N(1-\lambda)+4}{2(1-\lambda)}}, \tag{13}$$

то решение $u(x,\tau) \equiv 0$ *на множестве* $B_{t,1/4}(x_0) \times [3t/4, t]$.

Доказательство этой леммы приведено в [10], Лемма 2.1.

Под локальной массой решения мы понимаем величину

$$E(x_0,t) = \sup_{t/4<\tau<t} \int_{B_{t,3/4}(x_0)} u(x,\tau)dx. \tag{14}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Для слабого решения задачи (1), (2) справедлива оценка*

$$Y(x_0,t) \le t^{-\frac{N}{2}} E^2(x_0,t). \tag{15}$$

Эта лемма является частным случаем Леммы 2 из [15] и Леммы 3.1 из [10].

Из двух предыдущих лемм вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Существует такая константа* $\gamma_4 > 0$*, что условия Леммы 1 выполнены, если*

$$E(x_0,t) \le \gamma_4 t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}}. \tag{16}$$

Доказательство. Доказательство этой леммы следует из оценок (13), (15). Действительно, подчиним $E(x_0,t)$ условию

$$t^{-\frac{N}{2}} E^2(x_0,t) \le \gamma_3 t^{\frac{N(1-\lambda)+4}{2(1-\lambda)}},$$

где C – константа из неравенства (15). Отсюда получаем условие на $E(x_0,t)$:

$$E(x_0,t) \le \sqrt{\frac{\gamma_3}{C}} t^{\frac{N(1-\lambda)+4}{4(1-\lambda)}+\frac{N}{4}} = \sqrt{\frac{\gamma_3}{C}} t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}},$$

что доказывает лемму 3 с константой $\gamma_4 = \sqrt{\frac{\gamma_3}{C}}$. $\square$

3. Оценка локальной массы решения через локальную массу начальной функции. Основным содержанием данного параграфа является следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть выполнено условие (8) Теоремы 1. Тогда существуют такие константы* $\gamma_1 > 0$ *и* $t_0 > 0$*, что если* $t < t_0$ *и* $|x_0| \ge \varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}) + 2$*, то*

$$E(x_0,t) \le C_0 \int_{B_t(x_0)} u_0(x)dx + \frac{\gamma_4}{2} t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}}. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\gamma_1 > 0$ – некоторая константа, которая достаточно мала и будет выбрана ниже, и пусть $x \in R^N$, $|x| \geq \varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}) + 2$. Пусть, далее, $\zeta_R(\xi)$, $\xi \in R^N$ – гладкая срезающая функция, такая, что $\zeta_R(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \leq R$ и $\zeta_R(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \geq 2R$, $|\nabla\zeta| \leq C/R$, $|\triangle\zeta| \leq C/R^2$. Пусть еще

$$G(x-\xi, 2t-\tau) = C(2t-\tau)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(2t-\tau)}} \tag{18}$$

– функция, построенная по фундаментальному решению уравнения теплопроводности, причем по переменным ξ и $\tau < 2t$ эта функция G удовлетворяет сопряженному уравнению теплопроводности, то есть

$$G_\tau(x-\xi, 2t-\tau) + \triangle_\xi G(x-\xi, 2t-\tau) = 0. \tag{19}$$

Пусть, наконец, $0 < t_1 \leq t$ фиксированы. Переобозначим в уравнении (1) переменные (x,t) через (ξ,τ), умножим обе части этого уравнения на функцию $G(x-\xi, 2t-\tau)\zeta_R(\xi)$ и проинтегрируем по переменным ξ и τ по области $R^N \times [0,t_1]$. После однократного интегрирования по частям по переменной τ и двукратного по переменным ξ, получим

$$\int_{R^N} G(x-\xi, 2t-t_1)u(\xi,t_1)\zeta_R(\xi)d\xi - \int_0^{t_1}\int_{R^N} u\zeta_R[G_\tau + \triangle_\xi G]d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1}\int_{R^N} G(x-\xi, 2t-\tau)u^\lambda(\xi,\tau)\zeta_R(\xi)d\xi d\tau = \tag{20}$$

$$= \int_{R^N} G(x-\xi, 2t)u_0(\xi)\zeta_R(\xi)d\xi + 2\int_0^{t_1}\int_{R^N} u\nabla_\xi G\nabla_\xi\zeta_R d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^{t_1}\int_{R^N} uG\triangle_\xi\zeta_R(\xi)d\xi d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_{R^N} G(x-\xi, 2t)u_0(\xi)\zeta_R(\xi)d\xi + I_1 + I_2,$$

причем, ввиду (19), второе слагаемое в левой части (20) равно нулю.

Кроме того, из условия (8) на $u_0(\xi)$ следует (например, разбиением всего пространства на единичные кубы), что

$$\int_{R^N} G(x-\xi, 2t-\tau)u_0(\xi)d\xi \leq C, \tau \in [0,t].$$

А тогда из результатов работы [16] следует, что для решения $u(x,t)$ также выполнено

$$\int_{R^N} G(x-\xi, 2t-\tau)u(\xi,\tau)d\xi \leq C, \quad \tau \in [0,t].$$

Отсюда следует, что ввиду свойств функции ζ_R, для интегралов I_1 и I_2 в правой части соотношения (20) справедлива оценка ($R > 1$)

$$|I_1| + |I_2| \leq C(t)/R,$$

где мы учли также, что

$$|D_\xi^r D_\tau^s G(x-\xi, 2t-\tau)| \le C_{r,s}(t) e^{-\gamma \frac{(x-\xi)^2}{(2t-\tau)}}, \quad \tau \in [0,t]. \tag{21}$$

Переходя теперь к пределу в (20) при $R \to \infty$ и учитывая, что третье слагаемое в левой части (20) неотрицательно, получаем, ввиду произвольности $t_1 \le t$, неравенство

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{R^N} G(x-\xi, 2t-\tau) u(\xi,\tau) d\xi \le \int_{R^N} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi. \tag{22}$$

Учитывая, что функции G и u неотрицательны, левая часть (22) может быть оценена снизу так

$$\sup_{0<\tau<t} \int_{R^N} G(x-\xi, 2t-\tau) u(\xi,\tau) d\xi \ge$$

$$\ge \sup_{0<\tau<t} \int_{|x-\xi|<(3/4)t^{1/2}} G(x-\xi, 2t-\tau) u(\xi,\tau) d\xi \ge$$

$$\ge \sup_{0<\tau<t} \gamma t^{-\frac{N}{2}} e^{-C} \int_{B_{t,3/4}(x)} u(\xi,\tau) d\xi \ge \gamma t^{-\frac{N}{2}} E(x,t).$$

Таким образом, из (22) следует оценка

$$E(x,t) \le C t^{\frac{N}{2}} \int_{R^N} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi. \tag{23}$$

Разобьем интеграл в правой части (23) на три интеграла следующим образом

$$t^{\frac{N}{2}} \int_{R^N} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi = t^{\frac{N}{2}} \int_{|x-\xi|\ge 1} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi +$$

$$+ t^{\frac{N}{2}} \int_{t^{1/2} \le |x-\xi| < 1} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi +$$

$$+ t^{\frac{N}{2}} \int_{B_t(x)} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi \equiv I_1 + I_2 + I_3,$$

причем, ввиду определения функции G, для интеграла I_3 имеем оценку

$$I_3 \le C e^C \int_{B_t(x)} u_0(\xi) d\xi = C \int_{B_t(x)} u_0(\xi) d\xi. \tag{24}$$

Пользуясь тем, что в интеграле I_1 выполнено $|x-\xi| \ge 1$ и учитывая оценку (21), для I_1 имеем оценку

$$I_1 \le C e^{-\frac{\gamma}{2t}} \int_{|x-\xi|\ge 1} e^{-\frac{\gamma}{2} \frac{(x-\xi)^2}{t}} u_0(\xi) d\xi \le C e^{-\frac{\gamma}{t}} \int_{R^N} e^{-\frac{\gamma}{2} \frac{(x-\xi)^2}{t}} u_0(\xi) d\xi \le$$

$$\leq Ce^{-\frac{\gamma}{t}} \leq \frac{\gamma_4}{4} t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}}, \tag{25}$$

если $t \leq t_0$ и t_0 выбрано достаточно малым.

Обратимся теперь к интегралу I_2 и представим его в виде ($M \equiv [t^{-1/2}]+1$, $[t^{-1/2}]$ – целая часть числа $t^{-1/2}$)

$$I_2 \leq \sum_{k=1}^{M} t^{N/2} \int_{kt^{1/2} \leq |x-\xi| \leq (k+1)t^{1/2}} G(x-\xi, 2t) u_0(\xi) d\xi \equiv \sum_{k=1}^{M} I_{2,k}. \tag{26}$$

Для оценки интегралов $I_{2,k}$ заметим, что шаровой слой $\{kt^{1/2} \leq |x-\xi| \leq (k+1)t^{1/2}\}$ может быть покрыт шарами B_r радиуса $r = t^{1/2}$ в количестве не больше, чем $C(N)k^{N-1}$ штук, где константа $C(N)$ зависит только от размерности пространства N. Но на каждом из таких шаров B_r выполнено

$$t^{N/2} G(x-\xi, 2t) \leq Ce^{-\frac{k^2}{8}},$$

и, кроме того, ввиду условия $|x| > \varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}) + 2$, для таких шаров B_r выполнено

$$\int_{B_r} u_0(\xi) d\xi \leq \gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}}.$$

Следовательно, для каждого интеграла $I_{2,k}$ в неравенстве (26) справедлива оценка

$$I_{2,k} \leq Ck^{N-1} e^{-\frac{k^2}{8}} \gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}}. \tag{27}$$

Таким образом, из (26) и (27) следует, что

$$I_2 \leq C\Big(\sum_{k=1}^{\infty} k^{N-1} e^{-\frac{k^2}{8}}\Big) \gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}} = C\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}} \leq \frac{\gamma_4}{4} t^{\frac{1}{1-\lambda}+\frac{N}{2}}, \tag{28}$$

если γ_1 выбрано так, что $\gamma_1 C \leq \gamma_4/4$. Следовательно, выбирая γ_1 из этого условия, из (22), (24), (25) и (28) получаем утверждение леммы. □

4. Доказательство Теоремы 1. Доказательство Теоремы 1 следует непосредственно из приведенных выше Лемм. Во-первых, уменьшая, если нужно, константу γ_1 в Лемме 4, можно считать, что $C_0\gamma_1 \leq \gamma_4/2$, где C_0 – константа из неравенства (17). Пусть теперь $t > 0$ фиксировано, и пусть x также фиксирован и таков, что $|x| > \varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}) + 2$. В силу леммы 4 выполнено неравенство (17), а тогда, ввиду выбора γ_1, выполнено условие Леммы 3 и, следовательно, выполнены условия Леммы 1. Поэтому, в силу Леммы 1, $u \equiv 0$ в окрестности точки x в рассматриваемый момент времени t. Таким образом, для верхней границы носителя решения в момент времени t имеем оценку

$$R(t) \leq \varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}) + 2,$$

что доказывает оценку (9), так как $\varphi_t^{-1}(\gamma_1 t^{\frac{1}{1-\lambda}}) \to \infty$ при $t \to 0$.

Доказательство же оценки (11) размеров носителя снизу в точности идентично соответствующему доказательству в [10], параграф 6.2, поэтому мы отсылаем читателя к указанной работе. □

В заключение автор приносит свою благодарность А.Ф.Тедееву за внимание к данной работе и ценные обсуждения в ходе ее выполнения.

1. *Kersner R., Shishkov A.* Instantaneous shrinking of the support of energy solutions // Journal of Math.Anal. and Appl., 1996ю – Vol.198. – P.729-750.
2. *Шишков А.Е.* Мертвые зоны и мгновенная компактификация носителей энергетических решений квазилинейных параболических уравнений произвольного порядка // Матем.сб. – 1999 – Т.190, №12. – С.129-156.
3. *Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.I.* The support shrinking properties for solutions of quasilinear parabolic equations with strong absorption terms // Preprint, 1994.
4. *Antontsev S.N., Diaz J.I., Shmarev S.I.* Energy methods for the free boundary problems. Applications to nonlinear PDEs and fluid mechanics // 2002, Birkhauser, 334p.
5. *Ughi M.* Initial behavior of the free boundary for a porous media equation with strong absorption // Advances in Math. Sciences and Applications, Gakkotosho, Tokyo. – 2001. – V.11, №1. – P.333-345.
6. *Kalashnikov A.S.* On the dependence of properties of solutions of parabolic equations in unbounded domains on the behavior of the coefficients at infinity // Math.USSR Sb. – 1986. – Vol.53. – P.399-410.
7. *Kalashnikov A.S.* On the behavior of solutions of the Cauchy problem for parabolic systems with nonlinear dissipation near the initial hyperplane // Trudy Sem.Petrovsk. – 1992. – V.16. – P.106-117.
8. *Абдуллаев У.Г.* О мгновенном сжатии носителя решения нелинейного вырождающегося параболического уравнения // Мат.заметки. – 1998. – Т.63, №3. – С.323-331.
9. *Abdullaev U.G.* Exact local estimates for the supports of solutions in problems for nonlinear parabolic equations // Mat.Sb. – 1995. – V.186, №8. – P.3-24.
10. *Дегтярев С.П.* Об условиях мгновенной компактификации носителя решения и о точных оценках носителя в задаче Коши для параболического уравнения с двойной нелинейностью и абсорбцией // Матем.сб. – 2008. – Т.199, №4. – С.37-64.
11. *Degtyarev S.P.* Instantaneous support shrinking phenomenon in the case of fast diffusion for a doubly nonlinear parabolic equation with absorption // Advances in Differential Equations. – 2008. – **13**. – No 11-12. – P.1031-1050.
12. *Fan H.J.* Cauchy Problem of Some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure // Acta Mathematica Sinica, English Series, 2004. – V.20, №4. – P.663-682.
13. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: "Наука", 1967.
14. *Дегтярев С.П., Тедеев А.Ф.* $L_1 - L_\infty$ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными // Матем. сб. – 2007. – Т.198, №5. – С.45-66.
15. *Andreucci D., Tedeev A.F.* Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations // Advances in Differential Equations. – 2005. – Vol.10, 1. – P.89-120.
16. *Kazuhiro Ishige* On the existence of solutions of the Cauchy problem for a doubly nonlinear parabolic equation // SIAM J. Math.Anal. – 1996. – Vol.27, №5. – P.1235-1260.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`spdegt@yahoo.com`

Получено 21.05.09