ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2016. Вып. 46

УДК 531.38

©2016. **А.В. Зыза, Д.Н. Ткаченко**

# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ГИРОСТАТА В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрена задача об условиях существования полиномиальных решений уравнений движения гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Найдены два новых решения.

**Ключевые слова:** *гиростат, полиномиальные решения, эффект Барнетта–Лондона.*

**1. Введение.** Математическая постановка задачи о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона сводится к интегрированию шести обыкновенных дифференциальных уравнений, которые допускают два первых интеграла. Наличие только двух первых интегралов отличает рассматриваемую задачу от классической задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, уравнения которой имеют три первых интеграла. Дополнительные интегралы уравнений движения в магнитном поле были предложены В.В. Козловым [1] и В.А. Самсоновым [2]. Неинтегрируемость в общем случае уравнений движения гиростата обосновывает актуальность построения частных решений этих уравнений.

В динамике твердого тела известны частные решения, которые описываются полиномиальной структурой основных переменных задачи от вспомогательной переменной. В классической задаче о движении тяжелого твердого тела такие решения получены В.А. Стекловым [3], Д.М. Горячевым [4], Н. Ковалевским [5]. П.В. Харламов получил новые решения класса Стеклова–Горячева–Ковалевского для уравнений движения тяжелого гиростата [6]. Условия существования полиномиальных решений уравнений движения гиростата под воздействием потенциальных и гироскопических сил изучались в работах Г.В. Горра и А.В. Зызы [7–9].

Решение С.А. Чаплыгина [11] позволяет надеяться в задаче о движении гиростата в магнитном поле найти решения в виде многочленов по вспомогательной переменной, зависящей от времени [10]. В данной статье в задаче о движении гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона изучены условия существования полиномиальных решений обобщенного класса С.А. Чаплыгина. Получены два новых решения, которые выражаются в виде полиномов, зависящих от функции, которая может быть найдена путем обращения эллиптических интегралов.

**2. Постановка задачи.** Гиромагнитные явления играют важную роль в исследовании движений приборов в магнитных полях. Одно из таких явлений обусловлено эффектом Барнетта–Лондона, суть которого состоит в следующем. Если нейтральный ферромагнетик (первоначально ненамагниченный) поместить в магнитное поле и придать ему вращение, то в силу эффекта Барнетта он становится намагниченным вдоль оси вращения. Подобное явление имеет место при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона).

Магнитный момент тела при взаимодействии с внешним магнитным полем будет стремиться по направлению вектора напряженности магнитного поля. Взаимодействие вызванной вращением тела намагниченности с внешним магнитным полем приводит к прецессии вектора кинетического момента вокруг вектора поля.

Изучение движения тела под действием указанного магнитного момента имеет важное значение при определении предельной точности навигационных систем, использующих неконтактный подвес. Поэтому при математическом моделировании движения тела в магнитном поле следует учитывать магнитный момент, который возникает в результате эффекта Барнетта–Лондона.

Это обстоятельство приводит к тому, что уравнения движения твердого тела в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона не допускают интеграла энергии из-за диссипации энергии: перехода энергии магнитного поля в кинетическую энергию вращательного движения твердого тела.

Рассмотрим движение гиростата в магнитном поле с учетом эффекта Барнетта–Лондона. Уравнения движения такого гиростата с учетом момента ньютоновских сил запишем в векторном виде [1, 2]

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} + B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times (C\boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{s}), \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $A$ – тензор инерции гиростата, построенный в неподвижной точке; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – угловая скорость гиростата; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор, характеризующий направление магнитного поля; $\boldsymbol{\lambda}$ – гиростатический момент; $\mathbf{s}$ – вектор, коллинеарный вектору обобщенного центра масс; $B$ и $C$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными означает относительную производную.

Уравнения (1) допускают два интеграла

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k_0, \tag{2}$$

$k_0$ – постоянная интеграла площадей.

Изменение полной энергии гиростата определяется соотношением

$$[(A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2(\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nu}) + C(\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})]^{\bullet} = 2(B\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \tag{3}$$

поэтому уравнения (1) не имеют интеграла энергии.

Дифференциальные уравнения (1) в общем случае допускают только геометрический интеграл и интеграл площадей (см. (2)). Если же имеет место равенство $B = \alpha E$ ($E$– единичная матрица, $\alpha$ – некоторый параметр), то из соотношения (3) вытекает интеграл энергии для уравнений (1). Тогда уравнения (1) будут описывать задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил и относятся к уравнениям класса Кирхгофа–Пуассона. В дальнейшем этот случай исключаем из рассмотрения.

Поставим задачу о нахождении условий существования у уравнений (1) решений следующей структуры:

$$\omega_1=\sigma^2,\quad \omega_2^2=Q(\sigma)=\sum_{j=0}^{n} b_j\sigma^j,\quad \omega_3^2=R(\sigma)=\sum_{i=0}^{m} c_i\sigma^i,$$
$$\nu_1=\varphi(\sigma)=\sum_{j=0}^{l} a_j\sigma^j,\quad \nu_2=\frac{\psi(\sigma)}{\sigma}\omega_2,\quad \nu_3=\frac{\kappa(\sigma)}{\sigma}\omega_3, \tag{4}$$
$$\psi(\sigma)=\sum_{i=0}^{n_1} g_i\sigma^i,\quad \kappa(\sigma)=\sum_{j=0}^{m_1} f_j\sigma^j,$$

предварительно предположив

$$A=\mathrm{diag}(A_1,A_2,A_3),\quad B=\mathrm{diag}(B_1,B_2,B_3),\quad C=\mathrm{diag}(C_1,C_2,C_3),$$
$$\lambda_2=0,\quad \lambda_3=0,\quad s_2=0,\quad s_3=0. \tag{5}$$

В соотношениях (4) $n$, $m$, $l$, $n_1$, $m_1$ – натуральные числа или нули; $b_j$, $c_i$, $a_j$, $g_i$, $f_i$, – неизвестные, подлежащие определению.

Подставим выражения (4) с учетом предположений (5) в уравнения (1) и геометрический интеграл из (2), получим

$$\dot\sigma=(\varphi'(\sigma)\sigma)^{-1}\Phi(\sigma)\sqrt{Q(\sigma)R(\sigma)},\ \ \Phi(\sigma)=\psi(\sigma)-\kappa(\sigma); \tag{6}$$

$$(Q(\sigma)\psi^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma)=2\varphi'(\sigma)\psi(\sigma)(\sigma\kappa(\sigma)-\varphi(\sigma)),$$
$$(R(\sigma)\kappa^2(\sigma)\sigma^{-2})'\Phi(\sigma)=2\varphi'(\sigma)\kappa(\sigma)(\varphi(\sigma)-\sigma\psi(\sigma)),$$
$$2\sigma^2A_1\Phi(\sigma)=\varphi'(\sigma)[(C_3-C_2)\psi(\sigma)\kappa(\sigma)+(B_2\kappa(\sigma)-B_3\psi(\sigma))\sigma+(A_2-A_3)\sigma^2],$$
$$A_2Q'(\sigma)\Phi(\sigma)=2\varphi'(\sigma)[(C_1-C_3)\varphi(\sigma)\kappa(\sigma)+B_3\varphi(\sigma)\sigma-B_1\kappa(\sigma)\sigma^2+ \tag{7}$$
$$+(A_3-A_1)\sigma^3-\lambda_1\sigma-s_1\kappa(\sigma)],$$
$$A_3R'(\sigma)\Phi(\sigma)=2\varphi'(\sigma)[(C_2-C_1)\varphi(\sigma)\psi(\sigma)-B_2\varphi(\sigma)\sigma+B_1\psi(\sigma)\sigma^2+$$
$$+(A_1-A_2)\sigma^3+\lambda_1\sigma+s_1\psi(\sigma)];$$

$$\sigma^2(\varphi^2(\sigma)-1)+Q(\sigma)\psi^2(\sigma)+R(\sigma)\kappa^2(\sigma)=0. \tag{8}$$

В уравнениях (6), (7) штрихом обозначена производная по вспомогательной переменной $\sigma$. После интегрирования уравнений (7) зависимость $\sigma$ от времени $t$ устанавливается из дифференциального уравнения (6).

**3. Первое новое частное решение уравнений (1)** Рассмотрим случай, когда максимальные степени полиномов из (4) таковы: $n=m=4$, $l=2$, $n_1=m_1=1$. Тогда, согласно (4),

$$\omega_1=\sigma^2,\ \ \omega_2^2=Q(\sigma)=b_4\sigma^4+b_3\sigma^3+b_2\sigma^2+b_1\sigma+b_0,\ \ \omega_3^2=R(\sigma)=c_4\sigma^4+$$
$$+c_3\sigma^3+c_2\sigma^2+c_1\sigma+c_0,\qquad \nu_1=\varphi(\sigma)=a_2\sigma^2+a_1\sigma+a_0, \tag{9}$$
$$\nu_2=\frac{\psi(\sigma)}{\sigma}\sqrt{Q(\sigma)},\quad \nu_3=\frac{\kappa(\sigma)}{\sigma}\sqrt{R(\sigma)},\ \ \psi(\sigma)=g_1\sigma+g_0,\ \ \kappa(\sigma)=f_1\sigma+f_0.$$

Подставим предполагаемое решение (9) уравнений (1) в (7), (8) и потребуем тождественного выполнения полученных равенств для всех $\sigma$ при $a_1 \neq \neq 0$, $g_0 \neq 0$, $f_0 \neq 0$. В результате получим систему условий на параметры задачи и искомые коэффициенты полиномиальных решений (9)

$$\begin{aligned}
&\beta = C_1 - C_3, \quad \mu = B_2 f_1 - B_3 g_1 + A_2 - A_3, \quad C_2 = C_3, \quad B_2 f_0 - B_3 g_0 = 0,\\
&b_0 = 0, \ b_1 = 0, \quad c_1 = 0, \quad c_0 = 0, \quad A_1(g_1 - f_1) - a_2\mu = 0,\\
&2A_1(g_0 - f_0) - a_1\mu = 0, \quad 4f_1\mu - A_1(a_2 - g_1) = 0, \quad (3c_3 f_1 + 2c_4 f_0)\mu = 0,\\
&(2c_2 f_1 + c_3 f_0)\mu - 4A_1 a_0 = 0, \quad (2b_2 g_1 + b_3 g_0)\mu + 4A_1 a_0 = 0,\\
&(3b_3 g_1 + 2b_4 g_0)\mu = 4A_1(f_0 - a_1), \quad b_4 g_1 \mu - A_1(f_1 - a_2) = 0,\\
&A_2\mu b_4 - A_1(\beta a_2 f_1 + B_3 a_2 - B_1 f_1 + A_3 - A_1) = 0,\\
&A_2 b_1 \mu - 4A_1(\beta a_0 f_0 - s_1 f_0) = 0, \qquad\qquad (10)\\
&3b_3\mu A_2 - 4A_1(\beta(a_2 f_0 + a_1 f_1) + B_3 a_1 - B_1 f_0) = 0,\\
&A_2 b_2 \mu - 2A_1(\beta(a_1 f_0 + a_0 f_1) + B_3 a_0 - \lambda_1 - s_1 f_1) = 0,\\
&A_3\mu c_4 - A_1(-\beta a_2 g_1 - B_2 a_2 + B_1 g_1 + A_1 - A_2) = 0,\\
&3A_3\mu c_3 - 4A_1(-\beta(a_2 g_0 + a_1 g_1) - B_2 a_1 + B_1 g_0) = 0,\\
&A_3 c_2 \mu - 2A_1(-\beta(a_1 g_0 + a_0 g_1) - B_2 a_0 + \lambda_1 + s_1 g_1) = 0,\\
&A_3 c_1 \mu - 4A_1(s_1 g_0 - \beta a_0 g_0) = 0, \ a_0^2 - 1 + b_2 g_0^2 + c_2 f_0^2 = 0.
\end{aligned}$$

Система алгебраических уравнений (10) разрешима относительно параметров $A_1$, $A_2$, $A_3$, $g_1$, $g_0$. Считая $g_1/f_1 = k$, $A_3/A_1 = m_0$, $A_2/A_1 = p_0$ и обозначая

$$\begin{aligned}
&\mu_0 = (m_0 - 1)k + 1 - p_0,\\
&\mu_1 = -8km_0^2 + ((p_0 - 1)k^2 + 2(5p_0 + 2)k + 5p_0 - 3)m_0 - 2p_0(2(k+1)p_0 + k - 1),\\
&\mu_2 = -4km_0^2 + ((p_0 - 1)k^2 + (6p_0 + 1)k + p_0)m_0 - p_0((4p_0 - 1)k + 1),\\
&\mu_3 = 4km_0^2 + ((p_0 - 8)k - p_0)m_0 + 3(k - 1) - 4p_0(p_0 - 2),\\
&\mu_4 = 3(1 - k) + 4(m_0 k - p_0),\\
&\mu_5 = 4k(k+1)m_0^2 + (-(5p_0 + 2)k^2 + 2(1 - 5p_0)k - p_0)m_0 +\\
&+p_0(4(2p_0 - 1)k + 3k^2 + 1),
\end{aligned}$$

запишем решение системы (10) в виде

$$\begin{aligned}
&a_2 = \mu_0 f_1/(m_0 - p_0), \ a_1 = 2\mu_0\mu_2 g_0/(\mu_1 k(m_0 - p_0)), \ a_0 = \delta_1/f_1;\\
&B_1 = -A_1(4\mu_2\mu_4 k(k-1) f_1(m_0 - p_0))^{-1}[-128k^3 m_0^5 + 8k^2(3(p_0 - 1)k^3 +\\
&+ 11(p_0 - 1)k^2 + (33p_0 + 23)k + 3(11p_0 - 3))m_0^4 - 2k((19p_0 + 8)(p_0 - 1)k^4 +\\
&+ 4(24p_0 + 5)(p_0 - 1)k^3 + 2(111p_0^2 + 3p_0 + 32)k^2 + 12(18p_0^2 + 11p_0 - 3)k +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+3(29p_0-17)p_0)m_0^3+p_0(39(p_0-1)k^5+3(p_0-1)(58p_0+9)k^4+\\
&+6(72p_0^2-23p_0+7)k^3+6(74p_0^2+23p_0+27)k^2+3(64p_0^2+49p_0-49)k+\\
&+38p_0^2-39p_0+9)m_0^2-p_0(9(p_0-1)k^5+3(p_0-1)(34p_0-15)k^4+\\
&+6(44p_0^2(p_0-1)+3(9p_0-5))k^3+6(44p_0^3-2p_0^2+7p_0+15)k^2+\\
&+(88p_0^3+152p_0^2-27p_0-45)k+24p_0^3+22p_0^2-39p_0+9)m_0+\\
&+8p_0^3(9(p_0-1)k^3+(16p_0^2-23p_0+16)k^2+(11p_0-5)k+3p_0-2)],\\
&B_2=\mu_1(m_0k-p_0)A_1/(\mu_0\mu_4(k-1)f_1),\\
&B_3=-\mu_5(m_0k-p_0)A_1/(\mu_0\mu_4k(k-1)f_1); \qquad (11)\\
&b_0=0,\quad b_1=0,\quad b_2=\delta_3/f_1^2,\quad b_4=-\mu_0(m_0-1)/(k(m_0-p_0)^2),\\
&b_3=-2\mu_0(k-1)(m_0-1)(p_0-1)((k-1)m_0-2p_0)g_0/(\mu_1k^2(m_0-p_0)^2f_1);\\
&c_0=0,\quad c_1=0,\quad c_2=\delta_2/f_1^2,\quad c_4=\mu_0(p_0-1)/(m_0-p_0)^2,\\
&c_3=2\mu_0(k-1)(m_0-1)(p_0-1)(2km_0-p_0(k+1))g_0/(\mu_1k(m_0-p_0)^2f_1);\\
&\beta=-3(k-1)(m_0-1)(p_0-1)A_1(4\mu_0\mu_2\mu_4kf_1^2)^{-1}[8k^2(k+1)m_0^3-\\
&-2k((3p_0+2)k^2+2(7p_0-1)k+7p_0)m_0^2+p_0(3k^3+(14p_0-1)k^2+\\
&+(28p_0+1)k+3(2p_0-1))m_0-4p_0^2(2p_0(k+1)+k-1)],\\
&f_0=-\mu_5g_0/(\mu_1k),\quad s_1=\beta a_0,\quad \lambda_1=\frac{1}{2A_1}[\mu A_3c_2+2A_1(\beta a_1g_0+B_2a_0)].
\end{aligned}
$$

Здесь $f_1^2=\delta_1^2+\delta_2f_0^2+\delta_3g_0^2$,

$$
\begin{aligned}
&\delta_1=-\frac{\mu_0(k-1)(m_0-1)(p_0-1)g_0^2}{2\mu_1^2\mu_3k^2(m_0-p_0)(m_0k-p_0)}[32k^3(k+3)(k+1)m_0^5-16k^2((5p_0+1)k^3+\\
&+2(12p_0+1)k^2+(37p_0-3)k+14p_0)m_0^4+2kp_0((19p_0+34)k^4+2(118p_0+\\
&+7)k^3+2(257p_0-19)k^2+2(214p_0+13)k+83p_0-36)m_0^3-p_0((36p_0+15)k^5+\\
&+(166p_0^2+148p_0-51)k^4+2(428p_0^2-120p_0+27)k^3+2(514p_0^2+120p_0-3)k^2+\\
&+(472p_0^2-148p_0-21)k+38p_0^2-36p_0+9)m_0^2+p_0^2(9k^5+3(24p_0-7)k^4+\\
&+2(112p_0^2-26p_0-3)k^3+2(296p_0^2+38p_0+27)k^2+(384p_0^2-28p_0-51)k+\\
&+80p_0^2-68p_0+15)m_0-16p_0^4(3k+1)((2p_0+1)k+2p_0-1)],
\end{aligned}
$$

$$\delta_2 = \frac{\mu_0(m_0-1)(p_0-1)g_0^2}{\mu_1^2\mu_3k^2(m_0-p_0)^2(m_0k-p_0)}[-128k^4(k+1)m_0^6 + 32k^3((p_0-1)k^3 + 5(2p_0+$$
$$+1)k^2 + (25p_0-1)k + 3(4p_0-1))m_0^5 - 8k^2((p_0-1)(4p_0+5)k^4 + (54p_0^2+$$
$$+18p_0+13)k^3 + (174p_0^2+44p_0-11)k^2 + (194p_0^2-26p_0+3)k + p_0(54p_0-$$
$$-37))m_0^4 + k((p_0-1)(5p_0^2+35p_0+12)k^5 + (243p_0^3+198p_0^2-51p_0+36)k^4+$$
$$+2(633p_0^3+134p_0^2+73p_0-18)k^3 + 2(13p_0+3)(79p_0^2-3p_0+2)k^2+$$
$$+p_0(1337p_0^2-618p_0-187)k + p_0(215p_0^2-274p_0+81))m_0^3 - p_0(3(p_0-1)(p_0+$$
$$+3)k^6 + (33p_0^3+151p_0^2-95p_0-6)k^5 + (531p_0^3+204p_0^2-67p_0+69)k^4+$$
$$+2(685p_0^3+159p_0^2+285p_0-36)k^3 + (1334p_0^3-21p_0^2-544p_0-3)k^2+$$
$$+(533p_0^3-581p_0^2+85p_0+30)k + 39p_0^3-74p_0^2+45p_0-9)m_0^2+$$
$$+p_0^2(3(5p_0^2-2p_0-11)k^5 + (60p_0^3+137p_0^2-184p_0+81)k^4+$$
$$+2(208p_0^3+43p_0^2+222p_0-15)k^3 + 2(300p_0^3+89p_0^2-116p_0-33)k^2+$$
$$+(384p_0^3-277p_0^2-102p_0+63)k + 76p_0^3-139p_0^2+80p_0-15)m_0+$$
$$+p_0^3(9k^5 - 3(2p_0-1)(2p_0-7)k^4 + 2(-16p_0^3-8p_0^2-52p_0+3)k^3+$$
$$+2(-48p_0^3-36p_0^2+20p_0+9)k^2 + (-96p_0^3+48p_0^2+40p_0-15)k-$$
$$-(2p_0-1)(16p_0^2-18p_0+3))],$$

$$\delta_3 = \frac{\mu_0(m_0-1)(p_0-1)g_0^2}{\mu_1^2\mu_3k^3(m_0-p_0)^2(m_0k-p_0)}[32(k(k+1))^3m_0^6-$$
$$-4k^2((19p_0+13)k^4 + 12(8p_0+1)k^3 + 6(25p_0-3)k^2 + 4(26p_0-1)k+$$
$$+3(5p_0-1))m_0^5 + k((39p_0^2+139p_0+24)k^5 + (533p_0^2+277p_0-40)k^4+$$
$$+2(667p_0^2-89p_0-20)k^3 + 2(685p_0^2-43p_0+52)k^2 + (531p_0^2-137p_0-48)k+$$
$$+3p_0(11p_0-5))m_0^4 + (-(74p_0^2+80p_0+3)k^6 + (-215p_0^3-581p_0^2+102p_0+15)k^5+$$
$$+(-1337p_0^3-21p_0^2+232p_0-18)k^4 + 2(-1027p_0^3+159p_0^2-222p_0-3)k^3+$$
$$+(-1266p_0^3+204p_0^2+184p_0+21)k^2 + (-243p_0^3+151p_0^2+6p_0-9)k+$$
$$+p_0^2(-5p_0+3))m_0^3 + p_0(15(3p_0+1)k^6 + (274p_0^2+85p_0-63)k^5 + 2(216p_0^3+$$

$$+ 309p_0^2 - 272p_0 + 33)k^4 + 2(776p_0^3 - 198p_0^2 + 285p_0 + 15)k^3 + (1392p_0^3 -$$

$$- 268p_0^2 - 67p_0 - 81)k^2 + (432p_0^3 - 198p_0^2 - 95p_0 + 33)k + 2p_0(16p_0^2 -$$

$$- 15p_0 + 3))m_0^2 - p_0^2(9k^6 + 3(27p_0 - 10)k^5 + (296p_0^2 - 187p_0 + 3)k^4 +$$

$$+ 2(192p_0^3 + 104p_0^2 + 17p_0 + 36)k^3 + (800p_0^3 - 352p_0^2 + 146p_0 - 69)k^2 +$$

$$+ (320p_0^3 - 144p_0^2 - 51p_0 + 6)k + 32p_0^3 - 8p_0^2 - 23p_0 + 9)m_0 +$$

$$+ 4p_0^3(2p_0(k+1) + k - 1)(4p_0 + 3(k-1))((4p_0 - 1)k + 1)].$$

Зависимость $\sigma$ от времени $t$ найдем из дифференциального уравнения (6)

$$\dot{\sigma} = \frac{\mu\sigma}{2A_1}\sqrt{(b_4\sigma^2 + b_3\sigma + b_2)(c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2)}. \tag{12}$$

Приведем численный пример решения (5), (9), (11), (12) уравнений (1).

$$A_1 = 5a, \quad A_2 = 4a, \quad A_3 = 3a, \quad k = \frac{1}{3}, \quad g_0 = g, \quad \gamma = \sqrt{1222} \quad (a > 0,\ g > 0),$$

$$C_2 = C_3,\ B_1 = -\frac{198\gamma a}{47g^2},\ B_2 = \frac{2916\gamma a}{611g^2},\ B_3 = \frac{7290\gamma a}{611g^2},\ \beta = C_1 - C_3 = -\frac{268272a}{611g^4},$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (-\frac{28836a}{611g^2}; 0; 0),\ \boldsymbol{s} = (\frac{19852128\gamma a}{373321g^4}; 0; 0),\ \omega_1 = \sigma^2,\ \omega_2^2 = \sigma^2 Q^*(\sigma), \tag{13}$$

$$\omega_3^2 = \sigma^2 R^*(\sigma),\ Q^*(\sigma) = 2\sigma^2 + \frac{216\gamma}{611g}\sigma - \frac{11016}{611g^2},\ R^*(\sigma) = -\frac{1}{3}\sigma^2 - \frac{60\gamma}{611g}\sigma + \frac{108}{611g^2},$$

$$\nu_1 = -\frac{\gamma g^2}{324}\sigma^2 - \frac{3g}{2}\sigma - \frac{74\gamma}{611},\ \nu_2 = (\frac{\gamma g^2}{324}\sigma + g)\sqrt{Q^*(\sigma)},\ \nu_3 = (\frac{\gamma g^2}{108}\sigma + \frac{5}{2}g)\sqrt{R^*(\sigma)}.$$

Функцию $\sigma = \sigma(t)$ находим из дифференциального уравнения (12). Полиномы $Q^*(\sigma)$ и $R^*(\sigma)$ положительны при

$$-\frac{18\sqrt{611}}{611g}(5\sqrt{2} + \sqrt{51}) < \sigma < -\frac{18\sqrt{611}}{611g}(3\sqrt{2} + \sqrt{35}).$$

Зависимость $\sigma = \sigma(t)$ найдем из (12) обращением эллиптического интеграла.

**3. Второе новое частное решение уравнений (1). Случай $n = m = 4,\ l = 2,\ n_1 = 1,\ m_1 = 0$.** Пусть теперь решение (4) имеет вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2^2 = Q(\sigma) = b_4\sigma^4 + b_3\sigma^3 + b_2\sigma^2 + b_1\sigma + b_0,\\
&\omega_3^2 = R(\sigma) = c_4\sigma^4 + c_3\sigma^3 + c_2\sigma^2 + c_1\sigma + c_0,\\
&\nu_1 = \varphi(\sigma) = a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0, \quad \nu_2 = \psi(\sigma)\sigma^{-1}\omega_2,\\
&\nu_3 = \kappa(\sigma)\sigma^{-1}\omega_3, \quad \psi(\sigma) = g_1\sigma + g_0, \quad \kappa(\sigma) = f_0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Для нахождения коэффициентов полиномов (14) воспользуемся системой условий (10) при $m_1 = 0$. Рассматриваемая система алгебраических уравнений будет совместна. Принимая в качестве независимых параметров $B_1$, $B_2$, $B_3$, $A_3$, запишем решение этой системы

$$
\begin{aligned}
& A_1 = A_2 = 2A_3, \quad C_2 = C_3, \quad \beta = C_1 - C_3 = -(B_1 + B_2 - 4B_3)B_3/A_3, \\
& a_0 = -((5B_2 - 16B_3 + 2B_1)B_2 + 2(4B_3 - B_1)B_3)f_0^2/(3B_3A_3), \\
& a_1 = 2(B_2 - B_3)f_0/B_3, \qquad a_2 = -A_3/B_3, \\
& b_0 = b_1 = 0, \quad b_2 = -((4B_1 + 7B_2 - 26B_3)B_2 + 4(4B_3 - B_1)B_3)f_0^2/(3A_3^2), \\
& b_3 = 2(B_2 - 2B_3)f_0/A_3, \qquad b_4 = -1, \\
& c_0 = c_1 = 0, \quad c_2 = 2(11B_2^3 + 2(4B_1 - 25B_3)B_2^2 - 4(3B_1 - 13B_3)B_2B_3 + \\
& \;+ 4(B_1 - 4B_4)B_3^2)f_0^2/(3B_3A_3^2), \qquad c_3 = -4((2B_1 + 5B_2 - 16B_3)B_2 + \\
& \;+ 2(4B_3 - B_1)B_3)f_0/(3B_3A_3), \qquad c_4 = 2(B_2 - 2B_3)/B_3, \\
& g_0 = \frac{B_2 f_0}{B_3}, \;\; g_1 = -A_3/B_3, \;\; f_0 = \sqrt{6\sqrt{\mu_0}(B_2 - B_3)B_3A_3}/(2\sqrt{\mu_0}(B_2 - B_3)), \\
& \lambda_1 = -4(B_2 - B_3)(B_1 + B_2 - 4B_3)f_0^2/(3A_3), \qquad s_1 = \beta a_0.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Здесь $\mu_0 = (B_1 + B_2 + 2B_3)(B_1 + B_2 - 4B_3)$. Зависимость вспомогательной переменной $\sigma$ от $t$ установим из уравнения (6)

$$
\dot{\sigma} = 2^{-1}\sigma\sqrt{(b_4\sigma^2 + b_3\sigma + b_2)(c_4\sigma^2 + c_3\sigma + c_2)}. \tag{16}
$$

Численный пример решения (5), (6), (15), (16) уравнений (1) таков:

$$
\begin{aligned}
& A_1 = A_2 = 2a, \quad A_3 = a, \quad B_1 = -100b, \quad B_2 = 9b, \\
& B_3 = 4b, \quad C_2 = C_3, \quad \beta = C_1 - C_2 = \frac{428b^2}{a}, \quad (a > 0,\, b > 0), \\
& \boldsymbol{\lambda} = (\frac{2140(f_0b)^2}{3a}; 0; 0), \quad \boldsymbol{s} = (\frac{111601f_0^2b^3}{3a^2}; 0; 0), \\
& \omega_1 = \sigma^2, \quad \omega_2 = \sigma\sqrt{Q^*(\sigma)}, \quad \omega_3 = \sigma\sqrt{R^*(\sigma)}, \\
& Q^*(\sigma) = -\sigma^2 + \frac{2f_0b}{a}\sigma + \frac{2113f_0^2b^2}{3a^2}, \\
& R^*(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1043f_0b}{3a}\sigma - \frac{29717f_0^2b^2}{6a^2}, \\
& \nu_1 = -\frac{a}{4b}\sigma^2 + \frac{5f_0}{2}\sigma + \frac{1043f_0^2b}{12a}, \\
& \nu_2 = (-\frac{a}{4b}\sigma + \frac{9}{4}f_0)\sqrt{Q^*(\sigma)}, \qquad \nu_3 = f_0\sqrt{R^*(\sigma)}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Здесь

$$
f_0 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{222025}}\sqrt{\frac{a}{b}}.
$$

Вспомогательную переменную $\sigma = \sigma(t)$ найдем из уравнения

$$\dot{\sigma} = 2^{-1}\sigma\sqrt{Q^*(\sigma)R^*(\sigma)} \tag{18}$$

при $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$, где $\sigma_1 = \dfrac{(10\sqrt{11770} - 1043)f_0 b}{3a}$, $\sigma_2 = \dfrac{(3 + 46\sqrt{3})f_0 b}{3a}$.

Решение (17), (18) уравнений (1), в отличие от решения (12), (13), содержит только четыре независимых параметра, а не пять. Оно выражается через эллиптические функции времени.


1. *Козлов В.В.* К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1985. – № 6. – С. 28–33.
2. *Самсонов А.В.* О вращении твердого тела в магнитном поле // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1984. – № 4. – С. 32–34.
3. *Стеклов В.А.* Новое частное решение дифференциальных уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // Тр. Отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 1–3.
4. *Горячев Д.Н.* Новое частное решение задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки// Тр. Отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – **10**, вып. 1. – С. 23–24.
5. *Kowalewski N.* Eine neue partikuldre lusung der Differenzialgleichnungen der Bewegung eines schweren starren Kurpers um einen festen Punkt // Math. Ann – 1908. – **65**. – S. 528–537.
6. *Харламов П.В.* Полиномиальные решения уравнений движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 26–34.
7. *Горр Г.В., Зыза А.В.* Полиномиальные решения в одной задаче о движении гиростата с неподвижной точкой // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6 – С. 12–21.
8. *Зыза А.В.* Один случай полиномиальных решений уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40 – С. 103–109.
9. *Зыза А.В.* Полиномиальные решения с линейным инвариантным соотношением уравнений Кирхгофа–Пуассона // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45 – С. 63–69.
10. *Зыза А.В.* О полиномиальных решениях с квадратичным инвариантным соотношением уравнений движения гиростата // Механика твердого тела. – 2013. – Вып. 43 – С. 29–38.
11. *Чаплыгин С.А.* Новое частное решение в задаче о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки // Тр. Отд-ния физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1904. – **12**, вып. 1. – С. 1–4.


**A.V.Zyza, D.N.Tkachenko**

### Polynominal solutions of gyrostat in the problem of gyrostat motion in magnetic field

The problem of existing of conditions for polynomial solutions of gyrostat motion equations in magnetic field in view of Barnett–London effect has been considered.

**Keywords:** *gyrostat, polynomial solutions, Barnett–London effect.*

*ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк*
dntkachenko@mail.ru

Получено 05.09.16