

УДК 531.38

©2016. Г.В. Горр, Ю.В. Кошель

ОДИН КЛАСС ПРЕЦЕССИОННО-ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА, НЕСУЩЕГО ДВА РОТОРА

Рассматривается задача о движении гиростата, несущего два ротора, под действием потенциальных и гироскопических сил. Получена специальная форма дифференциальных уравнений движения гиростата, предназначенная для исследования его прецессионно-изоконических движений относительно вертикали. Указано новое решение этих уравнений для случая, когда на гиростат действует сила тяжести.

Ключевые слова: *гиростат, прецессионные и изоконические движения.*

Введение. Моделирование движения системы связанных твердых тел класса гиростат проводилось в аналитической механике с помощью различных подходов. Н.Е. Жуковский [1] получил уравнения движения гиростата, имеющего полости, заполненные жидкостью, и указал новый случай интегрируемости данных уравнений. В.В. Румянцев [2] изучал задачи управления и ориентации при движении спутника. П.В. Харламов [3], рассматривая движение системы связанных твердых тел, вывел наиболее общие уравнения движения гиростата под действием заданного класса сил и моментов. Определение гиростата он получил в наиболее общем случае по сравнению с ранее указанными в литературе определениями. В монографии [4] приведены результаты исследования движения гиростата, имеющего неподвижную точку, в случае постоянного гиростатического момента. В динамике твердого тела и гиростата большое значение имеет классификация движений этих объектов. При анализе движений гиростата выделены многие классы движений [4, 5]: равномерные вращения, маятниковые движения, прецессионные и прецессионно-изоконические движения, асимптотически-периодические движения. В последние годы интенсивно изучается задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом. Так, например, в [6, 7] рассмотрены прецессионные и прецессионно-изоконические движения в случае, когда гиростатический момент направлен по некоторой оси, неизменно связанной с телом-носителем. Более общая задача – задача о движении гиростата, несущего два вращающихся ротора, рассмотрена в [5].

Актуальность изучения условий существования прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два вращающихся ротора, обусловлена тем, что при условии постоянства гиростатического момента получены многочисленные классы таких движений [4]. Однако они существуют при некоторых условиях на параметры распределения масс и параметры, характеризующие правые части дифференциальных уравнений движения гиростата. Показано, что учет переменности гиростатического момента позволяет получить условия существования рассматриваемых движений с меньшим числом ограничений на параметры движения по сравнению со случаем постоянного

гиростатического момента.

В настоящей статье изучается задача о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается уравнениями класса Кирхгофа–Пуассона. На основании этих уравнений выполнено моделирование прецессионно-изоконических движений гиростата, несущего два ротора. Получены три дифференциальных уравнения на компоненты гиростатического момента и угол собственного вращения гиростата. Найдены новые решения редуцированных уравнений для случая, когда на гиростат действует только сила тяжести.

1. Постановка задачи. Основные соотношения. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил. Предполагая, что гиростат несет два вращающихся ротора, уравнения движения запишем в виде

$$A\dot{\omega} + \dot{\lambda}_1(t)\alpha + \dot{\lambda}_2(t)\beta = (A\omega + \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta) \times \omega + \omega \times B\nu + s \times \nu + \nu \times C\nu, \quad (1)$$

$$\dot{\nu} = \nu \times \omega. \quad (2)$$

В (1), (2) введены обозначения: $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости; $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$) – значения гиростатических моментов, имеющих единичные векторы α, β ($|\alpha| = 1, |\beta| = 1, \alpha \cdot \beta = 0$); $A = (A_{ij})$ – тензор инерции; $B = (B_{ij})$ и $C = (C_{ij})$ ($i, j = \overline{1, 3}$) – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t . Уравнения (1), (2) имеют два интеграла

$$\nu \cdot \nu = 1, \quad (A\omega + \lambda_1(t)\alpha + \lambda_2(t)\beta) \cdot \nu - \frac{1}{2}(B\nu \cdot \nu) = k, \quad (3)$$

где k – произвольная постоянная.

Система (1), (2) не замкнута, если функции $\lambda_i(t)$ не предполагаются известными. В силу этого исследование движение гиростата проводится при различных условиях на характер движения тела-носителя. Наиболее значительные результаты получены в изучении прецессионных, прецессионно-изоконических движений, равномерных вращений, маятниковых и других движений гиростата [9–12].

Исходя из уравнений (1), (2), будем искать условия существования прецессионно-изоконических движений гиростата.

Пусть \mathbf{a} – единичный вектор, неизменно связанный с телом-носителем (всегда можно принять $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$). Движение гиростата называется прецессией относительно вертикали, если выполняются инвариантные соотношения [5]

$$\mathbf{a} \cdot \nu = a_0, \quad \omega = \dot{\varphi}\mathbf{a} + \dot{\psi}\nu, \quad (4)$$

где $a_0 = \cos \theta_0$, $\theta_0 = \angle(\mathbf{a}, \nu)$ – постоянный угол. Рассмотрим случай, когда, кроме свойства прецессионности, выполняется свойство изоконичности

(подвижный аксоид вектора угловой скорости симметричен неподвижному аксоиду относительно касательной к ним плоскости). Как показано в [5], в качестве условия изоконичности может быть принято равенство $\dot{\psi} = \dot{\varphi}$. Тогда из второго соотношения (4) следует

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}(\mathbf{a} + \boldsymbol{\nu}). \quad (5)$$

При выполнении равенств (4) уравнение Пуассона (2) интегрируется:

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi, \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi, \quad \nu_3 = a_0. \quad (6)$$

Здесь $a'_0 = \sin \theta_0$. В скалярном виде из (5) в силу (6) получим

$$\omega_1 = a'_0 \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \omega_2 = a'_0 \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \omega_3 = \dot{\varphi}(a_0 + 1). \quad (7)$$

Внесем выражение (5) в уравнение (1):

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda}_2(t)\boldsymbol{\beta} = & -\ddot{\varphi}A(\mathbf{a} + \boldsymbol{\nu}) + \dot{\varphi}^2[-\text{Sp}(A)(\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + 2(A\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{a}) + \\ & + (A\mathbf{a} \times \mathbf{a}) + (A\boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\nu})] + \dot{\varphi}[(\mathbf{a} \times B\boldsymbol{\nu}) + (\boldsymbol{\nu} \times B\boldsymbol{\nu})] + \\ & + \lambda_1(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\nu}) + \lambda_2(t)\dot{\varphi}(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{a} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu}) + \mathbf{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}. \end{aligned} \quad (8)$$

Умножим скалярно обе части (8) на векторы $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1(t) = & \lambda_2(t)\dot{\varphi}(a'_0\gamma_1 \sin \varphi + a'_0\gamma_2 \cos \varphi + (a_0 + 1)\gamma_3) - p_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \\ & + \dot{\varphi}^2 A_2^{(1)}(\varphi) + \dot{\varphi} B_2^{(1)}(\varphi) + C_2^{(1)}(\varphi), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2(t) = & -\lambda_1(t)\dot{\varphi}(a'_0\gamma_1 \sin \varphi + a'_0\gamma_2 \cos \varphi + (a_0 + 1)\gamma_3) - q_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \\ & + \dot{\varphi}^2 A_2^{(2)}(\varphi) + \dot{\varphi} B_2^{(2)}(\varphi) + C_2^{(2)}(\varphi), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} \left\{ \lambda_1(t) [a'_0\beta_1 \sin \varphi + a'_0\beta_2 \cos \varphi + (a_0 + 1)\beta_3] - \right. \\ \left. - \lambda_2(t) [a'_0\alpha_1 \sin \varphi + a'_0\alpha_2 \cos \varphi + (a_0 + 1)\alpha_3] \right\} - \\ - r_1(\varphi)\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 A_2^{(3)}(\varphi) + \dot{\varphi} B_2^{(3)}(\varphi) + C_2^{(3)}(\varphi) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнениях (9)–(11) введены обозначения

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} p_1(\varphi) = \varepsilon_1^{(1)} \cos \varphi + \varepsilon_2^{(1)} \sin \varphi + \varepsilon_0^{(1)}, \quad q_1(\varphi) = \varepsilon_1^{(2)} \cos \varphi + \varepsilon_2^{(2)} \sin \varphi + \varepsilon_0^{(2)}, \\ r_1(\varphi) = \varepsilon_1^{(3)} \cos \varphi + \varepsilon_2^{(3)} \sin \varphi + \varepsilon_0^{(3)}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(1)} = a'_0(\alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{23}), \quad \varepsilon_1^{(2)} = a'_0(\beta_1 A_{12} + \beta_2 A_{22} + \beta_3 A_{23}), \\ \varepsilon_1^{(3)} = a'_0(\gamma_1 A_{12} + \gamma_2 A_{22} + \gamma_3 A_{23}), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\varepsilon_2^{(1)} = a'_0(\alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}), \quad \varepsilon_2^{(2)} = a'_0(\beta_1 A_{11} + \beta_2 A_{12} + \beta_3 A_{13}), \quad (15)$$

$$\varepsilon_2^{(3)} = a'_0(\gamma_1 A_{11} + \gamma_2 A_{12} + \gamma_3 A_{13}),$$

$$\varepsilon_0^{(1)} = (1 + a_0)(\alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33}),$$

$$\varepsilon_0^{(2)} = (1 + a_0)(\beta_1 A_{13} + \beta_2 A_{23} + \beta_3 A_{33}), \quad (16)$$

$$\varepsilon_0^{(3)} = (1 + a_0)(\gamma_1 A_{13} + \gamma_2 A_{23} + \gamma_3 A_{33}).$$

$$A_2^{(1)}(\varphi) = b_2 \cos 2\varphi + b'_2 \sin 2\varphi + b_1 \cos \varphi + b'_1 \sin \varphi + b_0, \quad (17)$$

$$A_2^{(2)}(\varphi) = c_2 \cos 2\varphi + c'_2 \sin 2\varphi + c_1 \cos \varphi + c'_1 \sin \varphi + c_0, \quad (18)$$

$$A_2^{(3)}(\varphi) = d_2 \cos 2\varphi + d'_2 \sin 2\varphi + d_1 \cos \varphi + d'_1 \sin \varphi + d_0, \quad (19)$$

$$b_2 = \frac{1}{2}a_0'^2(2\alpha_3 A_{12} - \alpha_2 A_{13} - \alpha_1 A_{23}),$$

$$b'_2 = \frac{1}{2}a_0'^2[\alpha_3(A_{11} - A_{22}) + \alpha_2 A_{23} - \alpha_1 A_{13}],$$

$$b_1 = a'_0\{\alpha_1[(a_0 + 1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}] - \alpha_2(a_0 + 2)A_{12} + \alpha_3 a_0 A_{13}\}, \quad (20)$$

$$b'_1 = a'_0\{\alpha_1(a_0 + 2)A_{12} + \alpha_2[(a_0 + 1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}] - \alpha_3 a_0 A_{23}\},$$

$$b_0 = \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 + 1)(\alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}),$$

$$c_2 = \frac{1}{2}a_0'^2(2\beta_3 A_{12} - \beta_2 A_{13} - \beta_1 A_{23}),$$

$$c'_2 = \frac{1}{2}a_0'^2[\beta_3(A_{11} - A_{22}) + \beta_2 A_{23} - \beta_1 A_{13}], \quad (21)$$

$$c_1 = a'_0\{\beta_1[(a_0 + 1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}] - \beta_2(a_0 + 2)A_{12} + \beta_3 a_0 A_{13}\},$$

$$c'_1 = a'_0\{\beta_1(a_0 + 2)A_{12} + \beta_2[(a_0 + 1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}] - \beta_3 a_0 A_{23}\},$$

$$c_0 = \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 + 1)(\beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}),$$

$$d_2 = \frac{1}{2}a_0'^2(2\gamma_3 A_{12} - \gamma_2 A_{13} - \gamma_1 A_{23}),$$

$$d'_2 = \frac{1}{2}a_0'^2[\gamma_3(A_{11} - A_{22}) + \gamma_2 A_{23} - \gamma_1 A_{13}], \quad (22)$$

$$d_1 = a'_0\{\gamma_1[(a_0 + 1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}] - \gamma_2(a_0 + 2)A_{12} + \gamma_3 a_0 A_{13}\},$$

$$d'_1 = a'_0\{\gamma_1(a_0 + 2)A_{12} + \gamma_2[(a_0 + 1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}] - \gamma_3 a_0 A_{23}\},$$

$$d_0 = \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 + 1)(\gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13}),$$

$$B_2^{(1)}(\varphi) = g_2 \cos 2\varphi + g'_2 \sin 2\varphi + g_1 \cos \varphi + g'_1 \sin \varphi + g_0, \quad (23)$$

$$B_2^{(2)}(\varphi) = f_2 \cos 2\varphi + f'_2 \sin 2\varphi + f_1 \cos \varphi + f'_1 \sin \varphi + f_0, \quad (24)$$

$$B_2^{(3)}(\varphi) = h_2 \cos 2\varphi + h'_2 \sin 2\varphi + h_1 \cos \varphi + h'_1 \sin \varphi + h_0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\alpha_1 B_{23} + \alpha_2 B_{13} - 2\alpha_3 B_{12}), \\ g'_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2[\alpha_3(B_{33} - B_{11}) - \alpha_2 B_{23} + \alpha_1 B_{13}], \\ g_1 &= a_0' \left\{ \alpha_1 [a_0 B_{33} - (1 + a_0) B_{22}] + \alpha_2 (1 + a_0) B_{12} - a_0 \alpha_3 B_{13} \right\}, \\ g'_1 &= a_0' \left\{ - (1 + a_0) \alpha_1 B_{12} + \alpha_2 [(a_0 + 1) B_{11} - a_0 B_{33}] + a_0 \alpha_3 B_{23} \right\}, \\ g_0 &= \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 - 1)(\alpha_2 B_{13} - \alpha_1 B_{23}), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\beta_1 B_{23} + \beta_2 B_{13} - 2\beta_3 B_{12}), \\ f'_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2[\beta_3(B_{33} - B_{11}) - \beta_2 B_{23} + \beta_1 B_{13}], \\ f_1 &= a_0' \left\{ \beta_1 [a_0 B_{33} - (1 + a_0) B_{22}] + \beta_2 (1 + a_0) B_{12} - a_0 \beta_3 B_{13} \right\}, \\ f'_1 &= a_0' \left\{ - (1 + a_0) \beta_1 B_{12} + \beta_2 [(a_0 + 1) B_{11} - a_0 B_{33}] + a_0 \beta_3 B_{23} \right\}, \\ f_0 &= \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 - 1)(\beta_2 B_{13} - \beta_1 B_{23}), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\gamma_1 B_{23} + \gamma_2 B_{13} - 2\gamma_3 B_{12}), \\ h'_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2[\gamma_3(B_{33} - B_{11}) - \gamma_2 B_{23} + \gamma_1 B_{13}], \\ h_1 &= a_0' \left\{ \gamma_1 [a_0 B_{33} - (1 + a_0) B_{22}] + \gamma_2 (1 + a_0) B_{12} - a_0 \gamma_3 B_{13} \right\}, \\ h'_1 &= a_0' \left\{ - (1 + a_0) \gamma_1 B_{12} + \gamma_2 [(a_0 + 1) B_{11} - a_0 B_{33}] + a_0 \gamma_3 B_{23} \right\}, \\ h_0 &= \frac{1}{2}(a_0 + 1)(3a_0 - 1)(\gamma_2 B_{13} - \gamma_1 B_{23}), \end{aligned} \quad (28)$$

$$C_2^{(1)}(\varphi) = u_2 \cos 2\varphi + u'_2 \sin 2\varphi + u_1 \cos \varphi + u'_1 \sin \varphi + u_0, \quad (29)$$

$$C_2^{(2)}(\varphi) = v_2 \cos 2\varphi + v'_2 \sin 2\varphi + v_1 \cos \varphi + v'_1 \sin \varphi + v_0, \quad (30)$$

$$C_2^{(3)}(\varphi) = w_2 \cos 2\varphi + w'_2 \sin 2\varphi + w_1 \cos \varphi + w'_1 \sin \varphi + w_0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}), \\ u'_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2[\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3(C_{22} - C_{11})], \\ u_1 &= a_0' \left[-\alpha_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \alpha_2 a_0 C_{12} + \alpha_3(s_1 - a_0 C_{13}) \right], \\ u'_1 &= a_0' \left[-\alpha_1 a_0 C_{12} + \alpha_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \alpha_3(s_2 - a_0 C_{23}) \right], \\ u_0 &= \frac{1}{2}\alpha_1 [2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\alpha_2 [2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}], \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{12}), \\
 v_2' &= \frac{1}{2}a_0'^2[\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3(C_{22} - C_{11})], \\
 v_1 &= a_0'[-\beta_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \beta_2 a_0 C_{12} + \beta_3(s_1 - a_0 C_{13})], \\
 v_1' &= a_0'[-\beta_1 a_0 C_{12} + \beta_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \beta_3(s_2 - a_0 C_{23})], \\
 v_0 &= \frac{1}{2}\beta_1[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\beta_2[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}], \\
 w_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}), \\
 w_2' &= \frac{1}{2}a_0'^2[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11})], \\
 w_1 &= a_0'[-\gamma_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \gamma_2 a_0 C_{12} + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13})], \\
 w_1' &= a_0'[-\gamma_1 a_0 C_{12} + \gamma_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23})], \\
 w_0 &= \frac{1}{2}\gamma_1[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\gamma_2[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}].
 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \frac{1}{2}a_0'^2(\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}), \\
 w_2' &= \frac{1}{2}a_0'^2[\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3(C_{22} - C_{11})], \\
 w_1 &= a_0'[-\gamma_1(s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \gamma_2 a_0 C_{12} + \gamma_3(s_1 - a_0 C_{13})], \\
 w_1' &= a_0'[-\gamma_1 a_0 C_{12} + \gamma_2(s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \gamma_3(s_2 - a_0 C_{23})], \\
 w_0 &= \frac{1}{2}\gamma_1[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{23}] - \frac{1}{2}\gamma_2[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2)C_{13}].
 \end{aligned} \tag{34}$$

Таким образом, исследование прецессионно-изоконических движений гиростата сводится к изучению решения уравнений (9)–(11). Уравнения (9), (10) представляют систему линейных дифференциальных уравнений на функции $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$), если функция $\varphi(t)$ задана. Уравнение (11) является соотношением на функции $\lambda_i(t)$ ($i = 1, 2$), которые удовлетворяют уравнениям (9), (10). Поэтому это соотношение должно быть инвариантным по отношению к системе (9), (10). В силу метода инвариантных соотношений необходимо вычислить производную от (11) в силу (9), (10). Однако такой путь приводит к весьма громоздким вычислениям.

В данной статье изучение прецессионно-изоконических движений гиростата будем проводить с помощью интеграла моментов из (3).

2. Первый случай прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Рассмотрим уравнения (9)–(11) с обозначениями (12)–(34) при условии $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ ($i, j = \overline{1, 3}$), $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$, $A_{ij} = 0$ ($i \neq j$):

$$\dot{\lambda}_1(t) = (a_0 + 1)\dot{\varphi}\lambda_2(t) - \ddot{\varphi}a_0' A_{11} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 b_1 \cos \varphi + a_0 s_2 - a_0' s_3 \cos \varphi, \tag{35}$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -(a_0 + 1)\dot{\varphi}\lambda_1(t) - \ddot{\varphi}a_0' A_{22} \cos \varphi + \dot{\varphi}^2 c_1' \sin \varphi + a_0' s_3 \sin \varphi - a_0 s_1, \tag{36}$$

$$\dot{\varphi}a_0'(\lambda_1(t) \cos \varphi - \lambda_2(t) \sin \varphi) - \ddot{\varphi}(1 + a_0)A_{33} + \dot{\varphi}^2 d_2' \sin 2\varphi + a_0'(s_1 \cos \varphi - s_2 \sin \varphi) = 0, \tag{37}$$

где

$$\begin{aligned}
 b_1 &= a_0'[(a_0 + 1)(A_{22} - A_{33}) - A_{11}], \quad c_1' = a_0'[(a_0 + 1)(A_{33} - A_{11}) + A_{22}], \\
 d_2' &= \frac{1}{2}a_0'^2(A_{11} - A_{22}).
 \end{aligned}$$

Важность данного случая состоит в том, что здесь пока не конкретизирована функция $\varphi(t)$.

Преобразуем интеграл моментов из (3) на основании принятых условий с учетом (6), (7):

$$a'_0(\lambda_1(t) \sin \varphi + \lambda_2(t) \cos \varphi) = k - \dot{\varphi}(\kappa_0 - d'_2 \cos 2\varphi). \quad (38)$$

Из соотношений (37), (38) определим $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \frac{1}{a'_0 \dot{\varphi}} [(1 + a_0)A_{33} \ddot{\varphi} \cos \varphi - \sigma_0 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + k \dot{\varphi} \sin \varphi + \\ &+ a'_0(s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) \cos \varphi], \\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{a'_0 \dot{\varphi}} [-(1 + a_0)A_{33} \ddot{\varphi} \sin \varphi - \sigma'_0 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + k \dot{\varphi} \cos \varphi - \\ &- a'_0(s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (39)$$

Здесь обозначено

$$\sigma_0 = a_0(1 + a_0)A_{33} + a_0'^2 A_{11}, \quad \sigma'_0 = a_0(1 + a_0)A_{33} + a_0'^2 A_{22}.$$

Подставим (39) в уравнение (35):

$$\begin{aligned} (1 + a_0)A_{33} \dot{\varphi} \ddot{\varphi} + a'_0 \dot{\varphi}^2 [(1 - a_0)(s_1 \sin \varphi - s_2 \cos \varphi) + a'_0 s_3] - \\ - ka_0 \dot{\varphi}^3 + (1 + a_0)A_{33} \dot{\varphi}^4 - a'_0 \ddot{\varphi} (s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) - (1 + a_0)A_{33} \dot{\varphi}^2 = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

Полагая $\dot{\varphi} = u(\varphi)$ и обозначая дифференцирование по φ штрихом, из (40) имеем

$$\begin{aligned} (1 + a_0)A_{33} u^2(\varphi) u''(\varphi) - a'_0 u'(\varphi) (s_2 \sin \varphi - s_1 \cos \varphi) + (1 + a_0)A_{33} u^3(\varphi) - \\ - ka_0 u^2(\varphi) + a'_0 u(\varphi) [(1 - a_0)(s_1 \sin \varphi + s_2 \cos \varphi) + a'_0 s_3] = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Рассмотрим условия существования решения уравнения (41) в классе тригонометрических функций

$$u(\varphi) = l_0 + l_1 \cos \varphi + l'_1 \sin \varphi. \quad (42)$$

Подставим (42) в уравнение (41) и потребуем, чтобы полученное соотношение было тождеством по φ :

$$2l_0 l'_1 [l_0(1 + a_0)A_{33} - ka_0] + a'_0 l_0 (1 - a_0) s_1 + a_0'^2 s_3 l'_1 = 0, \quad (43)$$

$$2l_0 l_1 [l_0(1 + a_0)A_{33} - ka_0] + a'_0 l_0 (1 - a_0) s_2 + a_0'^2 s_3 l_1 = 0, \quad (44)$$

$$l_1 l'_1 [l_0(1 + a_0)A_{33} - ka_0] - \frac{1}{2} a'_0 a_0 (s_1 l_1 + s_2 l'_1) = 0, \quad (45)$$

$$[l_0(1+a_0)A_{33} - ka_0](l_1^2 - l_1'^2) + a_0a_0'(l_1s_1 - l_1s_2) = 0, \quad (46)$$

$$2(l_0^2 + \frac{1}{2}(l_1^2 + l_1'^2))[l_0(1+a_0)A_{33} - ka_0] + (2-a_0)a_0'(l_1s_2 + l_1's_1) + 2a_0'^2s_3l_0 = 0. \quad (47)$$

Примером разрешимости уравнений (43)–(47) может служить следующий вариант

$$s_1 = s_3 = 0, \quad a_0 = 0, \quad l_0 = l_1 = 0. \quad (48)$$

В (48) приведены условия существования решения $\dot{\varphi} = l_1' \sin \varphi$ уравнения (40). Учтем в формулах (39) соотношения (48):

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{l_1'} (A_{33}l_1'^2 \cos^2 \varphi - \sigma_0 l_1'^2 \sin^2 \varphi + kl_1' \sin \varphi + s_2 \cos \varphi), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{l_1'} [-l_1'^2 (A_{22} + A_{33}) \sin \varphi \cos \varphi + kl_1' \cos \varphi - s_2 \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (49)$$

Из (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sin \varphi(t), \quad \nu_2 = \cos \varphi(t), \quad \nu_3 = 0, \\ \omega_1 &= l_1' \sin^2 \varphi(t), \quad \omega_2 = l_1' \sin \varphi(t) \cos \varphi(t), \quad \omega_3 = l_1' \sin \varphi(t), \end{aligned} \quad (50)$$

где в силу (48)

$$\varphi(t) = \arccos \frac{c_0 e^u - 1}{c_0 e^u + 1}, \quad (51)$$

а $u = -2l_1'(t - t_0)$, c_0 – постоянная интегрирования.

Таким образом, при выполнении условий $s_1 = s_3 = 0$, $a_0 = 0$, $l_0 = l_1 = 0$ уравнения (35), (36) допускают решение (49)–(51). Из условия $a_0 = 0$ следует, что ось собственного вращения гиростата ортогональна вектору ν . При выполнении равенств $s_1 = 0$, $s_3 = 0$ центр тяжести гиростата лежит в главной плоскости эллипсоида инерции, которая ортогональна оси собственного вращения.

3. Второй случай прецессионно-изоконических движений тяжелого гиростата. Положим в уравнении (41) $s_i = 0$ ($i = \overline{1, 3}$). Тогда

$$(1 + a_0)A_{33}(u''(\varphi) + u(\varphi)) - ka_0 = 0. \quad (52)$$

Общее решение уравнения (52) таково:

$$\dot{\varphi} = u(\varphi) = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi + \frac{ka_0}{(1 + a_0)A_{33}}, \quad (53)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Из (53) следует, что $\varphi(t)$ – элементарная функция времени.

В рассматриваемом случае из (1) получим

$$\frac{d}{dt}(A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) = \mathbf{0}. \quad (54)$$

На основе (54) можно сделать вывод, что вектор момента количества движения гиригастата постоянен:

$$A\boldsymbol{\omega} + \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}. \quad (55)$$

В силу (55) в качестве вектора $\boldsymbol{\nu}$ может быть взят вектор $\frac{\mathbf{c}}{|\mathbf{c}|}$. Основным свойством решения (53) является условие $a_0 \neq 0$. Компоненты гиригастатического момента определим из (39)

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) = \frac{1}{a'_0} [(1 + a_0)A_{33}(C_2 \cos \varphi(t) - C_1 \sin \varphi(t)) - \\ - \sigma_0 u(\varphi(t)) \sin \varphi(t) + k \sin \varphi(t)], \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \lambda_2(t) = \frac{1}{a'_0} [-(1 + a_0)A_{33}(C_2 \cos \varphi(t) - C_1 \sin \varphi(t)) - \\ - \sigma'_0 u(\varphi(t)) \cos \varphi(t) + k \cos \varphi(t)], \end{aligned}$$

а вектора $\boldsymbol{\nu}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ из (6), (7):

$$\nu_1 = a'_0 \sin \varphi(t), \quad \nu_2 = a'_0 \cos \varphi(t), \quad \nu_3 = a_0, \quad (57)$$

$$\omega_1 = a'_0 u(\varphi(t)) \sin \varphi(t), \quad \omega_2 = a'_0 u(\varphi(t)) \cos \varphi(t), \quad \omega_3 = (a_0 + 1)u(\varphi(t)).$$

В равенствах (56), (57) функция $\varphi(t)$ находится в результате интегрирования уравнения (53). Из приведенных выше формул следует, что в решении (56), (57) уравнений (35), (36) отсутствуют ограничения на моменты инерции и параметр a_0 .

4. Третий случай прецессионно-изоконических движений тяжелого гиригастата. Пусть в уравнении (41) выполняются условия

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0. \quad (58)$$

Преобразуем (41) к виду

$$\int \frac{du}{\sqrt{c_0 - (1 + a_0)A_{33}u^2 + 2ka_0u - 2a_0'^2 s_3 \ln|u|}} = \frac{1}{\sqrt{A_{33}(1 + a_0)}}(\varphi - \varphi_0). \quad (59)$$

Обозначим левую часть (59) через $F(u)$, тогда $u(\varphi)$ можно получить путем обращения интеграла из (59):

$$u(\varphi) = F^{-1}\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{\sqrt{A_{33}(1 + a_0)}}\right). \quad (60)$$

Учитывая равенство $\dot{\varphi} = u(\varphi)$, из (60) найдем $\varphi(t)$. Подставляя эту функцию в формулы (6), (7), (39), получим решение, которое описывает прецессионно-изоконическое движение гиростата.

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Журн. Рус. физ.-хим. о-ва. Часть физ. – 1885. – 17, отд. 1, вып. 6. – С. 81–113.
2. Румянцев В.В. Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
3. Харламов П.В. Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
4. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
5. Горр Г.В., Мазнев А.В. Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ, 2010. – 394 с.
6. Горр Г.В., Ковалев А.М. Движение гиростата. – Киев: Наук. думка, 2013. – 408 с.
7. Мазнев А.В. Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 40. – С. 91–104.
8. Мазнев А.В., Котов Г.А. Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2012. – Вып. 1. – С. 79–83.
9. Горр Г.В., Щетинина Е.К. Полурегулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 16–26.
10. Котов Г.А. Регулярные прецессии тяжелого гиростата, несущего два вращающихся гироскопа // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 59–66.
11. Мазнев А.В., Белоконь Т.В. Один случай трех инвариантных соотношений в задаче о движении симметричного гиростата // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 27–33.
12. Горр Г.В., Котов Г.А. О маятниковых движениях гиростата, несущего два ротора // Механика твердого тела. – 2015. – Вып. 45. – С. 40–50.

G.V. Gorr, Yu.V. Koshel

One class of precessionally isoconical motions of a gyrostat carrying two rotors

In the article, the subject of consideration is the problem on motion of a gyrostat carrying two rotors under the action of potential and gyroscopic forces. A special form of differential equations of motion of the gyrostat is obtained, it is meant for investigation of precessionally isoconical motions. A new solution of these equations is found in the case when the gyrostat is under the action of the force of gravity.

Keywords: *gyrostat, precessional and isoconical motions.*

ГУ “Ин-т прикл. математики и механики”, Донецк
gvgorr@gmail.com

Получено 05.04.16