УДК 531.38

©2016. **Г.В. Горр, А.В. Мазнев**

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА ИНВАРИАНТНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Рассмотрены дифференциальные уравнения обобщенной задачи о движении твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил. Изучено интегрирование этих уравнений на инвариантных многообразиях, описываемых тремя инвариантными соотношениями. Получены новые классы решений и первых интегралов уравнений Пуассона.

Ключевые слова: *инвариантные соотношения, первые интегралы, уравнения Пуассона.*

Введение. Уравнения Д. Гриоли [1] являются наиболее общими уравнениями движения твердого тела под действием потенциальных и гироскопических сил, которые допускают три первых интеграла. При решении обратной задачи о нахождении условий существования у этих уравнений трех инвариантных соотношений [2, 3] специального вида задача сводится к интегрированию уравнения Пуассона произвольной структуры. Различные случаи нахождения решения уравнений Пуассона приведены в статьях [2–6]. Результаты указанных статей были получены при исследовании задачи о движении твердого тела в жидкости [4, 7, 8] и задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил [5, 6]. В данной статье указаны новые случаи интегрирования уравнений Пуассона в квадратурах, которые могут быть использованы при решении обратной задачи об условиях существования трех инвариантных соотношений уравнений Д. Гриоли. Эти соотношения описывают в пространстве основных переменных задачи инвариантное множество по Леви-Чивите [9], т. е. производные от инвариантных соотношений в силу уравнений Гриоли–Пуассона обращаются в нуль на данных соотношениях. Рассмотрена задача интегрирования уравнений Пуассона в квадратурах для разного вида инвариантных соотношений.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнения движения твердого тела с неподвижной точкой под действием потенциальных и гироскопических сил, указанных Д. Гриоли [1]:

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}} = A\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\omega} + \Big[\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)\boldsymbol{\nu} + \frac{\partial L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\Big]\times\boldsymbol{\omega} + \frac{\partial U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\times\boldsymbol{\nu},\qquad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ – вектор угловой скорости тела; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции; $\mu(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$, $U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – дифференцируемые функции переменных ν_1, ν_2, ν_3; $\dfrac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ и $\dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ – градиенты функций $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Уравнения (1) имеют интегралы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} + L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k, \quad A\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - 2U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = 2E, \tag{2}$$

k и E – произвольные постоянные.

Следуя [2,3], поставим задачу об исследовании у уравнений (1) инвариантных соотношений (ИС)

$$\sigma : \quad \omega_1 = \omega_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \omega_2 = \omega_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \omega_3 = \omega_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \tag{3}$$

где функции заданы в пространстве $\mathbb{R}_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Будем предполагать, что соотношения (3) являются инвариантными соотношениями по Леви-Чивите [10], т. е. производные от соотношений (3) обращаются в нуль на всем множестве σ при $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}_3$. Для нахождения условий существования ИС (3) уравнений (1), (2) необходимо вначале подставить $\boldsymbol{\omega}$ из (3) во второе уравнение системы (1):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nu}), \tag{4}$$

а затем изучить решения первого уравнения из (1) на ИС (3) с учетом (4). В (4) введено обозначение $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nu}) = \big(\omega_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \omega_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3), \omega_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\big)$.

Будем предполагать, что решается обратная задача исследования ИС (3) для уравнений (1). Тогда с помощью интегралов (2) найдем [2, 3]

$$L(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = k - A\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu}, \quad U(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{1}{2}\big(A\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\nu})\big) - E. \tag{5}$$

Подставляя выражения (5) в первое уравнение из (1) и учитывая (4), получим, полагая $A = (A_i)$,

$$\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = A_1 \frac{\partial \omega_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} + A_2 \frac{\partial \omega_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} + A_3 \frac{\partial \omega_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3}. \tag{6}$$

Если ввести обозначение $\mathbf{g} = \big(A_1\omega_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3), A_2\omega_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3), A_3\omega_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)\big)$, то условие (6) можно записать в виде

$$\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = \frac{\partial g_1(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_1} + \frac{\partial g_2(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_2} + \frac{\partial g_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)}{\partial \nu_3} = \operatorname{div} \mathbf{g}, \tag{7}$$

где $g_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3) = A_i\omega_i(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Таким образом, задача интегрирования уравнений (1) на ИС (3) сведена к интегрированию уравнения (4), т. е. уравнения Пуассона из (1) на ИС (3).

В данной статье приведены результаты интегрирования уравнения (4) и предложены новые случаи разрешимости этих уравнений в квадратурах, которые могут быть применены для решения задачи (1).

2. Линейные инвариантные соотношения. Положим в (1)

$$U(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\mathrm{s}\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}),\quad L(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\nu}-\frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}),\tag{8}$$

где $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,s_3)$ и $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – постоянные векторы, B и C – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Тогда в силу (8) из (1) получим уравнения класса Кирхгофа–Пуассона

$$A\dot{\boldsymbol{\omega}}=(A\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\lambda})\times\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\omega}\times B\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu}-\mathrm{s}),\quad \dot{\boldsymbol{\nu}}=\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{\omega}.\tag{9}$$

Уравнения (9) можно рассматривать как уравнения движения гиростата под действием заданного класса сил, или как уравнения движения твердого тела в жидкости [7].

Примем в качестве $\boldsymbol{\omega}$ три линейных ИС. В векторной форме имеем

$$\boldsymbol{\omega}(\nu_1,\nu_2,\nu_3)=\mathbf{g}^{(0)}+G\boldsymbol{\nu},\tag{10}$$

где в общем случае матрица G не симметрична:

$$G=\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33}\end{pmatrix}.\tag{11}$$

Здесь g_{ij} – постоянные параметры. Исследование ИС (10) для уравнений класса (9) проводилось С.А. Чаплыгиным [4], П.В. Харламовым [8], Х.М. Яхьей [5], Г.В. Горром и Е.К. Узбек [6, 10], Л.Н. Орешкиной [3], Г.В. Мозалевской и М.Е. Лесиной [11]. Приведем некоторые результаты по исследованию ИС (10), которые можно обобщить на случай уравнений (1).

Пример С.А. Чаплыгина [4] с обобщением [11]. Пусть ИС (10) заданы в виде

$$\omega_1=b_1\nu_1+b_2\nu_2+b_0,\quad \omega_2=c_2\nu_2-b_2\nu_1+c_0,\quad \omega_3=d_3\nu_3.\tag{12}$$

Подставим выражения (12) в уравнение (4):

$$\begin{gathered}\dot{\nu}_1=\nu_3\big[(d_3-c_2)\nu_2+b_2\nu_1-c_0\big],\quad \dot{\nu}_2=\nu_3\big[(b_1-d_3)\nu_1+b_2\nu_2+b_0\big],\\ \dot{\nu}_3=(c_2-b_1)\nu_1\nu_2-b_2(\nu_1^2+\nu_2^2)-b_0+c_0.\end{gathered}\tag{13}$$

При обобщении решения С.А. Чаплыгина [4] в препринте [11] вводятся новые переменные

$$\gamma_1=\nu_1+h_1,\quad \gamma_2=\nu_2+h_2.$$

Интегрирование уравнений (13) в [11] проведено для двух вариантов. В первом варианте получено

$$(\gamma_2+c\gamma_1)^{\mu+1}-c^2(\gamma_2-c\gamma_1)^{\mu-1}=0,\tag{14}$$

где

$$\mu = -\frac{b_2}{\varkappa(d_3 - c_2)}, \quad \varkappa^2 = \frac{d_3 - c_2}{b_1 - d_3} > 0, \quad c = \mathrm{const}.$$

Во втором варианте полагается, что параметры таковы: $\dfrac{d_3 - c_1}{d_3 - b_1} = \nu^2$. Результат интегрирования уравнений (13) запишем так [11]:

$$\gamma_1 = \frac{c}{\sqrt{1 + \nu^2 \xi^2}}\ e^{\frac{b_2}{(b_1 - d_3)\nu}\ \mathrm{arctg}(1 + \nu^2 \xi^2)}, \tag{15}$$

где $\xi = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}$, $c = \mathrm{const}$. Следовательно, интегралы (14), (15) можно записать в виде $F(\gamma_1, \gamma_2, c) = 0$, где c – произвольная (неаддитивная) постоянная, а функция F относительно γ_1, γ_2 – трансцендентна. Это обстоятельство затрудняет получение решения уравнений (13) в квадратурах.

В [4–6] изучены некоторые частные случаи интегрируемости уравнения (4), которые характеризуются либо дробно-линейным первым интегралом, либо квадратичным первым интегралом, не зависящим от интеграла $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$.

Пример Г.В. Горра и Е.К. Узбек [6, 10]. Условия существования дробно-линейного первого интеграла для уравнения

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{g}^{(0)} + \boldsymbol{\nu} \times G\boldsymbol{\nu}, \tag{16}$$

где матрица G имеет вид (11), найденного в результате подстановки $\boldsymbol{\omega}$ из (10) в уравнение (4), в общем случае изучены в [10]. Полагая в (16) $G = G^+ + G^-$, где G^+ – симметричная матрица, G^- – антисимметричная матрица, получим уравнение

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{g}^{(0)} + G^+\boldsymbol{\nu} + G^-\boldsymbol{\nu}). \tag{17}$$

Если параметры ИС (10) удовлетворяют условию $G^+ = 0$, то уравнение (17) можно записать в виде

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{g}^{(0)} + (\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu})\mathbf{n} - (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{n})\boldsymbol{\nu}, \tag{18}$$

где $\mathbf{n} = (-g_{23}, g_{13}, -g_{12})$. В [10] показано, что при выполнении условия $\mathbf{g}^{(0)} \cdot \mathbf{n} = 0$ уравнение (18) допускает дробно-линейный первый интеграл

$$\frac{(\mathbf{g}^{(0)})^2 + \boldsymbol{\nu} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{g}^{(0)})}{\mathbf{g}^{(0)} \cdot \boldsymbol{\nu}} = c_0. \tag{19}$$

Здесь c_0 – произвольная постоянная. На основании геометрического интеграла $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ и интеграла (19) в статье [10] выполнено интегрирование уравнения (18) в квадратурах.

Интеграл (19) при $\mathbf{g}^{(0)} = \mathbf{0}$ имеет особенность. В этом случае, выбирая некоторый вектор $\boldsymbol{a}$ так, чтобы $\boldsymbol{a} \cdot \mathbf{n} = 0$, первый интеграл уравнения (18) получим в виде

$$\frac{\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{a} \times \mathbf{n})}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nu}} = c_0 \quad (c_0 = \mathrm{const}). \tag{20}$$

С помощью соотношения $\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1$ и нтеграла (20) можно получить решение уравнения (18) в элементарных функциях времени.

В [6] также показано, что при выполнении условия $\mathbf{g}^{(0)} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$ уравнение (18) интегрируется. Однако дополнительный первый интеграл имеет трансцендентную структуру.

Установленные выше результаты могут быть применены и к уравнениям Д. Гриоли (1), в которых функции $\mu(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $L(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$, $U(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ выбираются в виде (5), (6).

3. Нелинейные инвариантные соотношения. Рассмотрим примеры, в которых одно из ИС уравнений (9) имеет нелинейную структуру.

Примеры П.В. Харламова [8] и С.В. Скрыпник [12]. Они характеризуются следующими ИС:

$$\omega_1 = b_1\nu_1 + b_3\nu_3, \quad \omega_2 = b_1\nu_2 + c_3\nu_3, \quad \omega_3 = \frac{1}{\nu_3}(l_0 + d_0\nu_3^2). \tag{21}$$

Подставим ω_i из (21) в скалярные уравнения, вытекающие из (4)

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \frac{1}{\nu_3}\Big[\nu_2(l_0 + (d_0 - b_1)\nu_3^2) - c_3\nu_3^3\Big], \\ \dot{\nu}_2 &= \frac{1}{\nu_3}\Big[-\nu_1(l_0 + (d_0 - b_1)\nu_3^2) + b_3\nu_3^3\Big], \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_3(c_3\nu_1 - b_3\nu_2). \end{aligned} \tag{22}$$

Непосредственной проверкой можно установить, что уравнения (22) допускают первый интеграл

$$b_3\nu_1 + c_3\nu_2 - \frac{l_0}{\nu_3} + (d_0 - b_1)\nu_3 = c, \tag{23}$$

где c – произвольная постоянная. Параметризация: $\nu_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $\nu_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $\nu_3 = \cos\theta$ позволяет на основании (23) достаточно просто найти решение уравнений (22) в квадратурах.

Примеры Г.В. Горра, А.В. Мазнева [13, 14] для уравнений Кирхгофа с переменным гиростатическим моментом. Пусть заданы ИС

$$\omega_1 = e\nu_3, \qquad \omega_2 = d\nu_3, \qquad \omega_3 = \frac{a + b\nu_3 + c\nu_3^2}{\nu_3}. \tag{24}$$

Из уравнения (4) в случае (24) имеем

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= \frac{1}{\nu_3}\Big[\nu_2(a+b\nu_3+c\nu_3^2)-d\nu_3^3\Big],\\ \dot\nu_2 &= \frac{1}{\nu_3}\Big[-\nu_1(a+b\nu_3+c\nu_3^2)+e\nu_3^3\Big],\\ \dot\nu_3 &= \nu_3(d\nu_1-e\nu_2). \end{aligned} \tag{25}$$

Уравнения (25) имеют первый интеграл

$$e\nu_1+d\nu_2+c\nu_3+b\ln|\nu_3|-\frac{a}{\nu_3}=c^* \quad (c^*=\mathrm{const}). \tag{26}$$

Первый интеграл (26) принципиально отличается от первого интеграла (23), так как он содержит слагаемое с $\ln|\nu_3|$. Данное свойство влияет на нахождение решения уравнений (25), поскольку в процессе приведения этого решения к квадратурам приходится обращать нестандартные интегралы.

4. Новые классы решений уравнений Пуассона. Изложенные в п. 2, 3 результаты позволяют сделать некоторые обобщения в выборе трех ИС для уравнений Пуассона.

Первое обобщение. Пусть ИС имеют вид

$$\omega_1=\beta_1\nu_3,\quad \omega_2=\beta_2\nu_3,\quad \omega_3=\frac{\varphi(\nu_3)}{\nu_3}\quad (\nu_3\neq 0). \tag{27}$$

Запишем для ИС (27) уравнения Пуассона

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= \frac{1}{\nu_3}\Big(\nu_2\varphi(\nu_3)-\beta_2\nu_3^3\Big),\\ \dot\nu_2 &= \frac{1}{\nu_3}\Big(-\nu_1\varphi(\nu_3)+\beta_1\nu_3^3\Big),\\ \dot\nu_3 &= \nu_3(\beta_2\nu_1-\beta_1\nu_2). \end{aligned} \tag{28}$$

Уравнения (28) допускают следующее интегральное соотношение:

$$\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\int\frac{\varphi(\nu_3)}{\nu_3^2}d\nu_3=c, \tag{29}$$

где c – произвольная постоянная. Формула (29) позволяет при заданной функции $\varphi(\nu_3)$, например, при

$$\varphi(\nu_3)=\alpha_0+\alpha_1\nu_3+\alpha_2\nu_3^2+\ldots+\alpha_n\nu_3^n \tag{30}$$

получить первый интеграл уравнений (28):

$$\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2-\frac{\alpha_0}{\nu_3}+\alpha_1\ln|\nu_3|+\alpha_2\nu_3+\ldots+\alpha_n\nu_3^{n-1}=c. \tag{31}$$

С помощью геометрического интеграла $\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1$ и (31) интегрирование уравнений (28) сводится к нахождению квадратур (см. п. 5).

Второе обобщение. Инвариантное соотношение для ω_3, указанное в системе (27), имеет особенность $\nu_3 = 0$. Поэтому представляет интерес рассмотрение следующих ИС

$$\omega_1 = \beta_1 \nu_3, \quad \omega_2 = \beta_2 \nu_3, \quad \omega_3 = \nu_3 f(\nu_3). \tag{32}$$

При наличии ИС (32) уравнения Пуассона принимают вид

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_3(\nu_2 f(\nu_3) - \beta_2 \nu_3), \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3(-\nu_1 f(\nu_3) + \beta_1 \nu_3), \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_3(\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2). \end{aligned} \tag{33}$$

В силу (29), (33) получим

$$\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \int f(\nu_3) d\nu_3 = c, \tag{34}$$

где c – произвольная постоянная. Если $f(\nu_3)$ – полином

$$f(\nu_3) = \sigma_0 + \sigma_1 \nu_3 + \ldots + \sigma_n \nu_3^n, \tag{35}$$

то из (34), (35) получим первый интеграл уравнений (33):

$$\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \sigma_0 \nu_3 + \frac{\sigma_1}{2} \nu_3^2 + \ldots + \frac{\sigma_n}{n+1} \nu_3^{n+1} = c. \tag{36}$$

Отличие первого интеграла (36) от интеграла (31) очевидно, поскольку для (36) допустимы нулевые значения ν_3.

Третье обобщение. Добавим в первых двух ИС системы (32) линейные слагаемые, содержащие переменные ν_1 и ν_2 соответственно:

$$\omega_1 = \beta_0 \nu_1 + \beta_1 \nu_3, \quad \omega_2 = \beta_0 \nu_2 + \beta_2 \nu_3, \quad \omega_3 = \nu_3 f(\nu_3). \tag{37}$$

Подставим выражения (37) в уравнение (4). В скалярном виде получим

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_3 \big[\nu_2 (f(\nu_3) - \beta_0) - \beta_2 \nu_3\big], \\ \dot{\nu}_2 &= \nu_3 \big[-\nu_1 (f(\nu_3) - \beta_0) + \beta_1 \nu_3\big], \\ \dot{\nu}_3 &= \nu_3(\beta_2 \nu_1 - \beta_1 \nu_2). \end{aligned} \tag{38}$$

В силу (34) интегральное соотношение для (38) очевидно:

$$\beta_1 \nu_1 + \beta_2 \nu_2 + \int (f(\nu_3) - \beta_0) d\nu_3 = c, \tag{39}$$

где c – произвольная постоянная. Для практического использования (38) можно функцию $f(\nu_3)$ задавать, например, в виде многочлена (35). Тогда первый интеграл уравнений (38) получим по аналогии с первым интегралом (36). При рассмотрении ИС (37) следует принимать во внимание то обстоятельство, что аналитический характер формул (37) более общий, чем формул (32).

Четвертое обобщение. Оно характеризуется тем, что ИС (3) содержат две произвольные функции $g(\nu_3)$, $f(\nu_3)$, т. е.

$$\omega_1 = \beta_1 g(\nu_3), \quad \omega_2 = \beta_2 g(\nu_3), \quad \omega_3 = g(\nu_3) f(\nu_3). \tag{40}$$

Уравнения Пуассона для ИС (40) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= g(\nu_3)\big(\nu_2 f(\nu_3) - \beta_2\nu_3\big), \\ \dot{\nu}_2 &= g(\nu_3)\big(-\nu_1 f(\nu_3) + \beta_1\nu_3\big), \\ \dot{\nu}_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \end{aligned} \tag{41}$$

По аналогии с (34) из (41) получим

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int f(\nu_3)\, d\,\nu_3 = c, \tag{42}$$

где c – произвольная постоянная. При получении из (42) первого интеграла достаточно задать функцию $f(\nu_3)$ таким образом, чтобы для интеграла в (42) можно установить аналитическую формулу. В частности, для $f(\nu_3)$ из (35) можно найти первый интеграл (36).

Пятое обобщение. Пусть ИС имеют вид

$$\omega_1 = \beta_1 g(\nu_3), \quad \omega_2 = \beta_2 g(\nu_3), \quad \omega_3 = h(\nu_3). \tag{43}$$

Внесем (43) в уравнение (4). В скалярной записи получим

$$\begin{aligned} \dot{\nu}_1 &= \nu_2 h(\nu_3) - \beta_2 g(\nu_3)\nu_3, \\ \dot{\nu}_2 &= -\nu_1 h(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3)\nu_3, \\ \dot{\nu}_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \end{aligned} \tag{44}$$

На основании (42), (43) установим следующее интегральное соотношение уравнений (44):

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{h(\nu_3)}{g(\nu_3)} d\nu_3 = c. \tag{45}$$

Здесь c – произвольная постоянная. Несмотря на формальное обобщение, оно может быть применено, например, к случаю, когда функции $h(\nu_3)$, $\dfrac{1}{g(\nu_3)}$ являются многочленами по ν_3, либо к случаю $h(\nu_3) = g'(\nu_3)$. Для последнего варианта из (45) найдем первый интеграл в следующем представлении:

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \ln|g(\nu_3)| = c, \tag{46}$$

где c – произвольная постоянная. В (45) должно выполняться условие $g(\nu_3) \neq 0$.

Шестое обобщение. Рассмотрим три ИС более общего вида

$$\omega_1 = \beta_0\nu_1 + \beta_1 g(\nu_3), \quad \omega_2 = \beta_0\nu_2 + \beta_2 g(\nu_3), \quad \omega_3 = \nu_3 f(\nu_3). \tag{47}$$

Подставим выражения (47) в уравнение (4):

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= \nu_3\big[\nu_2(f(\nu_3) - \beta_0) - \beta_2 g(\nu_3)\big], \\ \dot\nu_2 &= \nu_3\big[-\nu_1(f(\nu_3) - \beta_0) + \beta_1 g(\nu_3)\big], \\ \dot\nu_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \end{aligned} \tag{48}$$

Интегральное соотношение для системы (48) таково:

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{\nu_3(f(\nu_3) - \beta_0)}{g(\nu_3)}\, d\nu_3 = c. \tag{49}$$

Здесь $c = \mathrm{const}$. Применение формулы (49) для нахождения первого интеграла уравнений (48) очевидно.

Седьмое обобщение. Это обобщение носит теоретический характер. Пусть

$$\omega_1 = \nu_1 l(\nu_3) + \beta_1 g(\nu_3), \quad \omega_2 = \nu_2 l(\nu_3) + \beta_2 g(\nu_3), \quad \omega_3 = f(\nu_3) g(\nu_3). \tag{50}$$

Уравнения Пуассона для случая (50) принимают вид

$$\begin{aligned} \dot\nu_1 &= \nu_2\big(f(\nu_3)g(\nu_3) - \nu_3 l(\nu_3)\big) - \beta_2\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot\nu_2 &= -\nu_1\big(f(\nu_3)g(\nu_3) - \nu_3 l(\nu_3)\big) + \beta_1\nu_3 g(\nu_3), \\ \dot\nu_3 &= g(\nu_3)(\beta_2\nu_1 - \beta_1\nu_2). \end{aligned} \tag{51}$$

Для уравнений (51) интегральное соотношение очевидно:

$$\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 + \int \frac{f(\nu_3)g(\nu_3) - \nu_3 l(\nu_3)}{g(\nu_3)}\, d\,\nu_3 = \mathrm{const}. \tag{52}$$

Если функции $f(\nu_3),\ g(\nu_3), l(\nu_3)$ удовлетворяют равенству $f(\nu_3)g(\nu_3) - l(\nu_3) = 0$, то из (52) следует линейный первый интеграл $\beta_1\nu_1 + \beta_1\nu_2 = c$ (c – произвольная постоянная).

Замечание. В приведенных выше обобщениях предполагается, что используемые функции определены и непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_3(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

5. Специальный класс нелинейных ИС. Следуя [2], рассмотрим три инвариантных соотношения

$$\omega_1 = \varphi_1(\nu_1), \quad \omega_2 = \nu_2\varphi_2(\nu_1), \quad \omega_3 = \nu_3\varphi_3(\nu_1), \tag{53}$$

где $\varphi_i(\nu_1)$ – дифференцируемые функции переменной ν_1. В статье [2] из уравнения Пуассона (4) в случае (53) получено

$$\dot{\nu}_1 = \nu_2\nu_3\big(\varphi_3(\nu_1) - \varphi_2(\nu_1)\big), \tag{54}$$

$$\dot{\nu}_2^2(\nu_1) = 2\int \frac{\varphi_1(\nu_1) - \nu_1\varphi_3(\nu_1)}{\varphi_3(\nu_1) - \varphi_2(\nu_1)} d\nu_1, \tag{55}$$

$$\dot{\nu}_3^2(\nu_1) = 2\int \frac{\nu_1\varphi_2(\nu_1) - \varphi_1(\nu_1)}{\varphi_3(\nu_1) - \varphi_2(\nu_1)} d\nu_1. \tag{56}$$

Из (54)–(56) следует, что уравнения Пуассона (4) могут быть проинтегрированы в квадратурах при соответствующем выборе функций $\varphi_i(\nu_1)$. Исследуем случай, когда функции $\varphi_i(\nu_1)$ – дробно-линейные:

$$\varphi_1(\nu_1) = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\nu_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1\nu_1}, \quad \varphi_2(\nu_1) = \frac{\beta_0 + \beta_1\nu_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1\nu_1}, \quad \varphi_3(\nu_1) = \frac{\gamma_0 + \gamma_1\nu_1}{\varepsilon_0 + \varepsilon_1\nu_1}, \tag{57}$$

а $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ – постоянные параметры. Подставляя выражения (57) в уравнение (55), получим первый интеграл уравнений Пуассона

$$\frac{1}{2}\nu_2^2 + \frac{\gamma_1}{2\sigma_1}\nu_1^2 - \frac{\varkappa_0\sigma_1 + \sigma_0\gamma_1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^3}(\alpha_0\sigma_1^2 - \varkappa_0\sigma_0\sigma_1 - \gamma_1\sigma_0^2)\ln|\sigma_1\nu_1 + \sigma_0| = c, \tag{58}$$

где c – произвольная постоянная, $\varkappa_0 = \alpha_1 - \gamma_0$, $\sigma_0 = \gamma_0 - \beta_0$, $\sigma_1 = \gamma_1 - \beta_1$. Геометрический интеграл $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1$ и интеграл (58) позволяют найти общее решение уравнения (4), в котором вектор $\boldsymbol{\omega}$ имеет компоненты (53). При этом целесообразно вместо формулы (56) для ν_3 использовать соотношение $\nu_3^2 = 1 - \nu_1^2 - \nu_2^2$. Отметим, что решение, которое характеризуется ИС (57), для уравнений Кирхгофа–Пуассона построено Е.К. Узбек [15]. Она рассмотрела случай, когда в первом интеграле (58) отсутствует слагаемое, содержащее $\ln|\sigma_1\nu_1 + \sigma_0|$. Поэтому общий вариант (57), (58) остается не исследованным.

6. Об интегрировании уравнений Пуассона. Приведенные выше примеры обладают двумя характерными свойствами: линейностью по ν_1, ν_2 правой части уравнения для ν_3 (см. (22), (25), (28), (33), (38), (41), (44), (48), (51)) и линейностью по ν_1, ν_2 первых интегралов (см. (23), (26), (31), (38), (46)). На основании этих свойств интегрирование уравнений Пуассона можно провести единым методом. Рассмотрим данную задачу на примере (27)–(31) (см. п. 4). Введем вместо ν_1, ν_2, ν_3 две новые переменные θ, φ:

$$\nu_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\theta. \tag{59}$$

Обозначим

$$F(\theta) = c + \frac{\alpha_0}{\cos\theta} - \alpha_1 \ln|\cos\theta| - \alpha_2\cos\theta - \ldots - \alpha_n(\cos\theta)^{n-1}. \qquad (60)$$

Из (31), (60) имеем $\beta_1\nu_1 + \beta_2\nu_2 = F(\theta)$. В силу (59) отсюда получим

$$\sin(\varphi + \beta_0) = \frac{F(\theta)}{\varkappa_0 \sin\theta}, \qquad (61)$$

где $\varkappa_0 = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}$, $\beta_0 = \mathrm{arctg}\dfrac{\beta_1}{\beta_2}$. Подставим выражения (58) в третье уравнение системы (28):

$$\dot\theta = \varkappa_0 \cos\theta\cos\varphi. \qquad (62)$$

Внесем $\sin(\varphi + \beta_0)$ из (61) в уравнение (62):

$$\dot\theta = \mathrm{ctg}\theta\sqrt{\varkappa_0^2\sin^2\theta - F^2(\theta)}. \qquad (63)$$

Таким образом, в силу (63) функцию $\theta(t)$ найдем обращением интеграла

$$\int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\mathrm{ctg}\theta\sqrt{\varkappa_0^2\sin^2\theta - F^2(\theta)}} = t - t_0. \qquad (64)$$

Для нахождения функции $\varphi(t)$ используем формулу (61):

$$\varphi(t) = -\beta_0 + \arcsin\frac{F\bigl(\theta(t)\bigr)}{\varkappa_0\sin\theta(t)}. \qquad (65)$$

Функции ν_i определим из (59):

$$\nu_1 = \sin\theta(t)\sin\varphi(t), \quad \nu_2 = \sin\theta(t)\cos\varphi(t), \quad \nu_3 = \cos\theta(t).$$

Компоненты вектора угловой скорости найдем из (27).

Отметим, что для получения $\theta(t), \varphi(t)$ из (64), (65) приходится в силу (60) обращать нестандартные интегралы. Это обстоятельство в определенной степени затрудняет исследование решений уравнений Пуассона в общем случае. Однако оно показывает разнообразный характер решений уравнения Пуассона.

Выводы. В статье показано, что при решении обратной задачи по нахождению условий существования трех инвариантных соотношений вида (3) уравнений Д. Гриоли приходится интегрировать уравнения произвольной структуры, вытекающие из уравнения Пуассона (4). Дан анализ результатов, полученных ранее в интегрировании, и найдены новые классы первых интегралов этих уравнений в зависимости от типа ИС. Приведен пример интегрирования уравнений Пуассона в квадратурах на трех ИС уравнений Гриоли–Пуассона.

1. *Grioli G.* Questioni di dinamica del solido pesante asimmetrico // Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur. – 1963. – **35**, № 1–2. – P. 35–39.
2. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* К постановке задачи о решении уравнений Д. Гриоли–М.П. Харламова в специальной форме // Механика твердого тела. – 1997. – Вып. 29. – С. 133–139.
3. *Орешкина Л.Н.* Об уравнениях М.П. Харламова // Механика твердого тела. – 1987. – Вып. 19. – С. 30–33.
4. *Чаплыгин С.А.* О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. Статья первая // Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1894. – **6**, вып. 2. – С. 20–42.
5. *Яхъя Х.М.* Об одном классе движений гиростата в ньютоновском, электрическом и магнитном полях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1986. – № 1. – С. 89–90.
6. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* Об интегрировании уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Прикл. математика и механика. – 2002. – **66**, вып. 3. – С. 418–426.
7. *Харламов П.В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1963. – № 4. – С. 17–29.
8. *Харламов П.В.* О решениях уравнений динамики твердого тела // Прикл. математика и механика. – 1965. – **29**, вып. 1. – С. 124–129.
9. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. – В 2-х т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – Т. 2, ч. 2: Динамика систем с конечным числом степеней свободы. – 555 с.
10. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* Дробно-линейный интеграл уравнений Пуассона в случае трех инвариантных соотношений // Междунар. МФНА-АНН журнал. Проблемы нелинейн. анализа в инженерных системах. – 2004. – **10**, № 2 (21).– С. 54–63.
11. *Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О линейных инвариантных соотношениях уравнений Кирхгофа. – Донецк: Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, 2001. – 25 с. – (Препринт ИПММ НАН Украины: № 01.02).
12. *Скрыпник С.В.* Об одном классе двух линейных инвариантных соотношений в обобщенной задаче динамики // Механика твердого тела. – 1999. – Вып. 28. – С. 31–40.
13. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата в случае переменного гиростатического момента // Динамические системы. – 2012. – **2** (30), № 1, 2. – С. 23–32.
14. *Мазнев А.В.* О двух линейных инвариантных соотношениях уравнений движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2011. – Вып. 41. – С. 51–60.
15. *Узбек Е.К.* О новом решении уравнений Г. Кирхгофа задачи о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 6. – С. 964–970.

G.V. Gorr, A.V. Maznev

Integration of the rigid body dynamics on the invariant manifold

The differential equation of the generalized problem of the motion of a rigid body under the action of potential and gyroscopic forces are considered. The integration of these equations on the invariant manifolds described by three invariant relations is studied. Novel classes of first integrals of Poisson's equation are receiver.

Keywords: *invariant relations, first integrals, Poisson's equation.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
ГОУ ВПО "Донецкий национальный ун-т"

Получено 25.01.16

gvgorr@gmail.com, maznev_av@rambler.ru