УДК 531.38

©2015. **М.Е. Лесина, Н.Ф. Гоголева**

УРАВНЕНИЯ АКСОИДОВ ДЛЯ ДВУХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЛ, СОЕДИНЕННЫХ НЕГОЛОНОМНЫМ ШАРНИРОМ

Для движения по инерции двух сферически симметричных тел, соединенных неголономным шарниром, получены уравнения аксоидов для каждого из тел системы. Направляющая линия аксоидов является пространственной кривой.

Ключевые слова: *сферически симметричное тело, неголономный шарнир, подвижный и неподвижный аксоиды.*

В работе [1] получено решение задачи о движении по инерции двух сферически симметричных тел, соединенных неголономным шарниром; записаны уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для случая, когда момент количества движения системы тел перпендикулярен плоскости движения траектории точки пересечения осей собственных вращений тел.

В предлагаемой работе рассмотрен второй вариант, когда упомянутая точка совпадает с центром масс тела S. Для этого варианта получены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы, найдена траектория точки.

Введение. П.В. Харламов предложил естественный способ задания движения тела в пространстве, основанный на использовании определяемых в двух системах координат годографов угловой скорости тела [2]. Одна система координат неизменно связана с телом, а другая выбрана в неподвижном пространстве, причем изучалось движение тела, имеющего неподвижную точку. Кроме того, во всех случаях фигурировал неподвижный в пространстве вектор, компоненты которого по отношению к подвижным осям определялись в зависимости от времени вместе с компонентами угловой скорости тела в тех же осях.

М.П. Харламов [3] распространил метод годографов на более общие задачи, указал уравнения аксоидов, фиксированных в теле и в пространстве, посредством которых и представлено движение тела в общем случае. В качестве направляющей выбрана горловая линия поверхности.

В задаче о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных сферическим или неголономным шарниром, определен вектор, указывающий точку пересечения осей динамической симметрии тел, и абсолютная скорость этой точки. Это позволило упростить уравнения аксоидов, заменив горловую линию траекторий этой точки. Качение аксоидов в общем случае сопровождается скольжением вдоль общей образующей.

В работе [4] указан алгоритм построения подвижных и неподвижных аксоидов для каждого из тел системы для задачи о движении по инерции двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром.

1. Исходные соотношения. Рассматривается задача о движении по инерции двух сферически симметричных тел S и S_0, соединенных неголономным шарниром. Приведем ее решение, найденное в работе [1]. Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}_* = \omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \omega_2 \boldsymbol{e}_2 + \dfrac{n}{I}\boldsymbol{e}_3$ тела S в полуподвижном базисе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеет компоненты

$$\omega_1 = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda]\cos\alpha, \tag{1}$$

$$\omega_2 = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda]\sin\alpha, \tag{2}$$

$$\frac{n}{I} = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}(1-\lambda)c_* u^\lambda, \tag{3}$$

где

$$u = \cos\theta, \tag{4}$$

$$\sin\alpha = c_* u^\lambda / \sqrt{1-u^2}. \tag{5}$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_1 \boldsymbol{e}_1 + \Omega_2 \boldsymbol{e}_2^0 + \dfrac{n_0}{I_0}\boldsymbol{e}_3^0$ тела S_0 в полуподвижном базисе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$ имеет компоненты

$$\Omega_1 = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}(-\lambda u^2 + 1 + \lambda)\cos\alpha, \tag{6}$$

$$\Omega_2 = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\frac{c_* u^{\lambda+1}}{\sqrt{1-u^2}}\ , \tag{7}$$

$$\frac{n_0}{I_0} = -\frac{g\lambda}{I}c_* u^\lambda. \tag{8}$$

Указанное решение получено при условиях $A_0 = I_0$, $A = I$ (тела сферически симметричны), $I_0 = I(1-\lambda)/\lambda$,

$$N = (m + m_0)aa_0 = 0 \tag{9}$$

на инвариантном соотношении

$$\boldsymbol{g} = g(\boldsymbol{e}_1\cos\alpha + \boldsymbol{e}_2\sin\alpha) \tag{10}$$

($\boldsymbol{g}$ – момент количества движения системы тел). Отметим, что полуподвижный базис $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ повернут по отношению к неизменно связанному с телом S базису $O\boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_2^*\boldsymbol{e}_3$ на угол φ:

$$\boldsymbol{e}_1^* = \boldsymbol{e}_1\cos\varphi + \boldsymbol{e}_2^*\sin\varphi, \quad \boldsymbol{e}_2^* = -\boldsymbol{e}_1\sin\varphi + \boldsymbol{e}_2\cos\varphi, \tag{11}$$

$$\dot\varphi = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}\frac{c_* u^{1+\lambda}}{1-u^2}, \tag{12}$$

а полуподвижный базис $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$ повернут на угол Φ по отношению к неизменно связанному с телом S_0 базису $O\boldsymbol{e}_1^{0*}\boldsymbol{e}_2^{0*}\boldsymbol{e}_3^0$:

$$\boldsymbol{e}_1^{0*} = \boldsymbol{e}_1 \cos\Phi + \boldsymbol{e}_2^0 \sin\Phi, \quad \boldsymbol{e}_2^{0*} = -\boldsymbol{e}_1 \sin\Phi + \boldsymbol{e}_2^0 \cos\Phi. \tag{13}$$

Благодаря неголономному шарниру [5] углы φ и Φ связаны соотношением

$$\dot{\Phi} = \dot{\varphi} u. \tag{14}$$

В работе [1] найдены уравнения подвижных и неподвижных аксоидов тел для варианта $a_0 = 0$ (точка O совпадает с центром масс тела S_0).

Получим уравнения аксоидов тел для второго варианта, следующего из (9):

$$a = 0 \tag{15}$$

(точка O совпадает с центром масс тела S).

2. Подвижный аксоид. Подвижный аксоид тела S имеет вид [4]

$$\boldsymbol{\xi} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_* \times \boldsymbol{v}}{\omega_*^2} = \xi_1\boldsymbol{e}_1 + \xi_2\boldsymbol{e}_2 + \xi_3\boldsymbol{e}_3, \tag{16}$$

где $\boldsymbol{v}$ – скорость точки O, которую указывает вектор $\boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{C}_*\boldsymbol{O}$ ($\boldsymbol{C}_*$ – центр масс системы тел) и, как следует из [4], с учетом (15)

$$\boldsymbol{r}_* = -a_0\boldsymbol{e}_3^0, \tag{17}$$

$$\boldsymbol{v} = a_0(-\Omega_2\boldsymbol{e}_1 + \Omega_1\boldsymbol{e}_2^0), \tag{18}$$

где

$$\boldsymbol{e}_2^0 = \boldsymbol{e}_2\cos\theta + \boldsymbol{e}_3\sin\theta, \quad \boldsymbol{e}_3^0 = -\boldsymbol{e}_2\sin\theta + \boldsymbol{e}_3\cos\theta. \tag{19}$$

Внесем соотношения (19) в (17), (18):

$$\boldsymbol{r}_* = a_0(\boldsymbol{e}_2\sin\theta - \boldsymbol{e}_3\cos\theta), \tag{20}$$

$$\boldsymbol{v} = a_0(-\boldsymbol{e}_1\Omega_2 + \boldsymbol{e}_2\Omega_1\cos\theta + \boldsymbol{e}_3\Omega_1\sin\theta), \tag{21}$$

подставим (1)–(7), (21) в (16) и определим компоненты подвижного аксоида в полуподвижном базисе:

$$\xi_1(\mu, u) = \Big[\mu\frac{(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda}{\widetilde{\omega}_*(u)} + a_0\frac{-\lambda u^2 + 1 + \lambda}{\widetilde{\omega}_*^2(u)}(1+\lambda)c_* u^\lambda\Big]\sqrt{1 - \frac{c_*^2 u^{2\lambda}}{1-u^2}},$$

$$\xi_2(\mu, u) = \mu\frac{[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda]c_* u^\lambda}{\widetilde{\omega}_*(u)\sqrt{1-u^2}} - a_0\frac{\sqrt{1-u^2}}{\widetilde{\omega}_*^2(u)}\Big\{-\frac{1+\lambda}{1-u^2}c_*^2 u^{2\lambda} + \tag{22}$$

$$+\big[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda\big]\big(-\lambda u^2 + 1 + \lambda - \lambda c_*^2 u^{2\lambda}\big)\Big\},$$

$$\xi_3(\mu,u)=\mu\frac{(1-\lambda)c_*u^{\lambda+1}}{\widetilde{\omega}_*(u)}+\frac{a_0u}{\widetilde{\omega}_*^2(u)}\big[(1-\lambda)u^2+1+\lambda\big](-\lambda u^2+1+\lambda-\lambda c_*^2u^{2\lambda}),\quad (23)$$

где

$$\widetilde{\omega}_*^2=[(1-\lambda)u^2+1+\lambda]^2+(1-\lambda)^2c_*^2u^{2\lambda+2}=\frac{\omega_*^2(u)}{g^2\lambda^2}I^2(1-\lambda)^2. \qquad (24)$$

Для вектора $\boldsymbol{\xi}=\xi_1^*\boldsymbol{e}_1^*+\xi_2^*\boldsymbol{e}_2^*+\xi_3\boldsymbol{e}_3$ в базисе $O\boldsymbol{e}_1^*\boldsymbol{e}_2^*\boldsymbol{e}_3$, вследствие (11), имеем

$$\begin{aligned}\xi_1^*(\mu,u)&=\xi_1(\mu,u)\cos\varphi(u)+\xi_2(\mu,u)\sin\varphi(u),\\ \xi_2^*(\mu,u)&=-\xi_1(\mu,u)\sin\varphi(u)+\xi_2(\mu,u)\cos\varphi(u),\end{aligned} \qquad (25)$$

где функция $\varphi(u)$ найдена в [1]:

$$\varphi(u)-\varphi_0=c_*\int\limits_{u_0}^{u}\frac{u^{\lambda-1}du}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}}\ . \qquad (26)$$

Таким образом, подвижный аксоид тела S определен соотношениями (23), (25), в которые необходимо внести (22), (24), (26).

3. Неподвижный аксоид тела S**.** Сначала необходимо ввести неподвижный базис, начало которого выберем в точке C_* – центре масс системы тел. Введем цилиндрическую систему координат [2] с базисом $\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\rho\boldsymbol{e}_\gamma$:

$$\boldsymbol{e}_\nu=\frac{\boldsymbol{g}}{g},\qquad \boldsymbol{e}_\rho=\frac{\boldsymbol{g}\times(\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\omega}_*)}{g^2\omega_\rho},\qquad \boldsymbol{e}_\gamma=\frac{\boldsymbol{g}\times\boldsymbol{\omega}_*}{g\omega_\rho}, \qquad (27)$$

где

$$\omega_\rho^2=\omega_*^2-(\boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{e}_\nu)^2. \qquad (28)$$

Внесем (1)–(3), (9), (24) в (28), получим

$$\omega_\nu=\boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{e}_\nu=\frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2+1+\lambda], \qquad (29)$$

$$\omega_\rho=\frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2+1+\lambda]. \qquad (30)$$

Соотношения (27) устанавливают связь между базисами

$$\boldsymbol{e}_\nu=\boldsymbol{e}_1\cos\alpha+\boldsymbol{e}_2\sin\alpha,\quad \boldsymbol{e}_\rho=\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{e}_\gamma=\boldsymbol{e}_1\sin\alpha-\boldsymbol{e}_2\cos\alpha,$$

или

$$\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_\nu\cos\alpha+\boldsymbol{e}_\gamma\sin\alpha,\quad \boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_\nu\sin\alpha-\boldsymbol{e}_\gamma\cos\alpha,\quad \boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_\rho. \qquad (31)$$

По отношению к неподвижному базису $C_*\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$ базис $\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\rho\boldsymbol{e}_\gamma$ повернут на угол γ:

$$\boldsymbol{E}_1=\boldsymbol{e}_\nu,\quad \boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{e}_\rho\cos\gamma-\boldsymbol{e}_\gamma\sin\gamma,\quad \boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{e}_\rho\sin\gamma+\boldsymbol{e}_\gamma\cos\gamma. \qquad (32)$$

Полуподвижный $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и неподвижный базисы связаны так

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{E}_1\cos\alpha - \boldsymbol{E}_2\sin\alpha\sin\gamma + \boldsymbol{E}_3\sin\alpha\cos\gamma,\\
\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{E}_1\sin\alpha + \boldsymbol{E}_2\cos\alpha\sin\gamma - \boldsymbol{E}_3\cos\alpha\cos\gamma,\\
\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{E}_2\cos\gamma + \boldsymbol{e}_3\sin\gamma,
\end{aligned}\tag{33}$$

$$\dot\gamma = \boldsymbol{e}_\nu\cdot(\boldsymbol{\omega}_*\times\dot{\boldsymbol{\omega}}_*)/\omega_\rho^2. \tag{34}$$

В работе [4] для $\dot\gamma$ получено соотношение

$$\begin{aligned}
\dot\gamma = \frac{1}{g\omega_\rho^2}\big[G_3(\omega_1\dot\omega_2-\omega_2\dot\omega_1) - \frac{n}{I}(G_1\dot\omega_2 - G_2\dot\omega_1)+\\
+\frac{\dot n}{I}(G_1\omega_2 - G_2\omega_1) + \dot\varphi(g\frac{n}{I}\omega_\nu - G_3\omega_*^2)\big],
\end{aligned}\tag{35}$$

подставив в которое (1)–(3), (9), (19), (30), (24), (12), находим

$$\dot\gamma = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2+1+\lambda].$$

Учтем найденное в [1] соотношение

$$\dot u = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}u^2\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}, \tag{36}$$

получим

$$\gamma(u) = \int\frac{[(1-\lambda)u^2+1+\lambda]du}{u^2\sqrt{1-u^2-c_*^2u^2}}. \tag{37}$$

Неподвижный аксоид тела S

$$\boldsymbol{\zeta} = \mu\frac{\boldsymbol{\omega}_*}{\omega_*} + \frac{\boldsymbol{\omega}_*\times\boldsymbol{\nu}}{\omega_*^2} + \boldsymbol{r}_* = \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{r}_*$$

сначала представим в цилиндрической системе координат, для этого в (16), (20) подставим соотношения (31):

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta_\nu\boldsymbol{e}_\nu + \zeta_\rho\boldsymbol{e}_\rho + \zeta_\gamma\boldsymbol{e}_\gamma, \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned}
\zeta_\nu(\mu,u) = \frac{\mu}{\widetilde\omega_*(u)}[(1-\lambda)u^2+1+\lambda] + \frac{a_0c_*u^\lambda}{\widetilde\omega_*^2(u)}\big[(1-\lambda)u^4+\\
+(1-\lambda^2)u^2+(1+\lambda)^2+(1-\lambda)c_*^2u^{2\lambda+2}\big],
\end{aligned}\tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_\rho(\mu,u) &= \frac{\mu}{\widetilde\omega_*(u)}(1-\lambda)c_*u^{\lambda+1} - \frac{a_0u}{\widetilde\omega_*^2(u)}\big\{[(1-\lambda)u^2+1+\lambda]u^2+\\
&\quad+[(1-\lambda)u^2+\lambda(1+\lambda)]c_*^2u^{2\lambda}]\big\},\\
\zeta_\gamma(u) &= -\frac{a_0u^2}{\widetilde\omega_*^2(u)}\big[(1-\lambda)u^2+(1+\lambda)+(1-\lambda)c_*^2u^{2\lambda}\big].
\end{aligned}\tag{40}$$

Внесем $\boldsymbol{e}_\nu, \boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\gamma$ из (32) в (38) и получим компоненты $\zeta_i(\mu, u)$ в неподвижном базисе:

$$\begin{aligned}
&\zeta_1(\mu,u) = \zeta_\nu(\mu,u),\\
&\zeta_2(\mu,u) = \zeta_\rho(\mu,u)\cos\gamma(u) + \zeta_\gamma(u)\sin\gamma(u),\\
&\zeta_3(\mu,u) = \zeta_\rho(\mu,u)\sin\gamma(u) + \zeta_\gamma(u)\cos\gamma(u).
\end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, соотношения (41) вместе с (39), (40), (37) определяют неподвижный аксоид тела S.

Скорость скольжения $v_c = \boldsymbol{\omega}_*\cdot\boldsymbol{\nu}/\omega_*$ подвижного аксоида по неподвижному с учетом (21), (1)–(3) равна

$$v_c = a_0\frac{g\lambda c_* u^{\lambda+1}}{I\widetilde{\omega}_*(u)}\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}.$$

При движении тела S его подвижный аксоид (22)–(26) катится по неподвижному, это движение сопровождается скольжением вдоль общей образующей линейчатых поверхностей.

Параметрические уравнения траектории точки O в неподвижном пространстве получим, подставив (33) в (20):

$$\boldsymbol{r}_* = X(u)\boldsymbol{E}_1 + Y(u)\boldsymbol{E}_2 + Z(u)\boldsymbol{E}_3,$$

где

$$\begin{aligned}
&X(u) = a_0c_*u^\lambda,\\
&Y(u) = a_0\big[\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}\sin\gamma(u) - u\cos\gamma(u)\big],\\
&Z(u) = -a_0\big[\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}\cos\gamma(u) + u\sin\gamma(u)\big].
\end{aligned} \tag{42}$$

Очевидно, что это – пространственная сферическая кривая $(X^2+Y^2+Z^2 = = a_0^2)$. Отметим, что при $a = 0$ траектория точки O представляла окружность радиуса a с центром в точке C_*, а при $a = 0$ имеем пространственную кривую (42).

4. Подвижный аксоид тела $\mathbf{S_0}$. Подвижный аксоид тела S_0 [4]

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*}{\Omega_*} + \frac{\boldsymbol{\Omega}_*\times\boldsymbol{v}}{\Omega_*^2}$$

представим сначала разложением в полуподвижном базисе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$:

$$\boldsymbol{\xi}^0 = \xi_1^0\boldsymbol{e}_1 + \xi_2^0\boldsymbol{e}_2^0 + \xi_3^0\boldsymbol{e}_3^0,$$

который, вследствие (18), можно записать так

$$\boldsymbol{\xi}^0(\mu,u) = F(\mu,u)\boldsymbol{\Omega}_*(u) + a_0\boldsymbol{e}_3^0, \tag{43}$$

где

$$F(\mu,u)=\frac{\mu}{\omega_*(u)}-\frac{a_0n_0(u)}{I_0\Omega_*^2}, \tag{44}$$

$$\Omega_*^2=\Omega_1^2(u)+\Omega_2^2(u)+\frac{n_0^2(u)}{I_0}. \tag{45}$$

Подставив в (43)–(45) значения (6)–(8), получим компоненты $\xi_i^0(\mu,u)$:

$$\begin{aligned}\xi_1^0(\mu,u)&=\widetilde{F}(\mu,u)(-\lambda u^2+1+\lambda)\sqrt{1-\frac{c_*^2u^{2\lambda}}{1-u^2}},\\ \xi_2^0(\mu,u)&=\widetilde{F}(\mu,u)\frac{c_*u^{\lambda+1}}{\sqrt{1-u^2}},\end{aligned} \tag{46}$$

$$\xi_3^0(\mu,u)=a_0-\widetilde{F}(\mu,u)(1+\lambda)c_*u^\lambda, \tag{47}$$

где

$$\widetilde{F}(\mu,u)=\frac{\mu}{\widetilde{\Omega}_*(u)}+\frac{a_0(1+\lambda)c_*u^\lambda}{\widetilde{\Omega}_*^2(u)}, \tag{48}$$

$$\widetilde{\Omega}_*^2(u)=(-\lambda u^2+1+\lambda)^2+\lambda^2c_*^2u^{2\lambda}. \tag{49}$$

В неизменно связанном с телом S_0 базисе $\boldsymbol{\xi}^0=\xi_1^{0*}\boldsymbol{e}_1^{0*}+\xi_2^{0*}\boldsymbol{e}_2^{0*}+\xi_3^0\boldsymbol{e}_3^0$, вследствие (13), имеем

$$\begin{aligned}\xi_1^{0*}(\mu,u)&=\xi_1^0(\mu,u)\cos\Phi(u)+\xi_2^0(\mu,u)\sin\Phi(u),\\ \xi_1^{0*}(\mu,u)&=-\xi_1^0(\mu,u)\sin\Phi(u)+\xi_2^0(\mu,u)\cos\Phi(u).\end{aligned} \tag{50}$$

Угол $\Phi(u)$ находим из (14), (26)

$$\Phi(u)-\Phi_0=c_*\int\limits_{u_0}^{u}\frac{u^\lambda du}{(1-u^2)\sqrt{1-u^2-c_*^2u^{2\lambda}}}. \tag{51}$$

Таким образом, соотношениями (46)– (51) определен подвижный аксоид тела S_0 .

5. Неподвижный аксоид тела $\mathbf{S_0}$. Неподвижный аксоид тела S_0 $\boldsymbol{\zeta}^0=\mu\frac{\boldsymbol{\Omega}_*}{\Omega_*}+\frac{\boldsymbol{\Omega}_*\times\boldsymbol{v}}{\Omega_*^2}+\boldsymbol{r}_*$, вследствие (43), (17), имеет вид

$$\boldsymbol{\zeta}^0(\mu,u)=F(\mu,u)\boldsymbol{\Omega}_*(u). \tag{52}$$

В базисе $C_*\boldsymbol{e}_\nu\boldsymbol{e}_\rho^0\boldsymbol{e}_\gamma^0$ угловая скорость $\boldsymbol{\Omega}_*=\Omega_\nu\boldsymbol{e}_\nu+\Omega_\rho\boldsymbol{e}_\rho^0$ имеет компоненты

$$\Omega_\nu=\boldsymbol{\Omega}_*\cdot\boldsymbol{e}_\nu,\qquad \Omega_\rho^2=\boldsymbol{\Omega}_*^2-\Omega_\nu^2. \tag{53}$$

Представим вектор (27) в базисе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^0\boldsymbol{e}_3^0$:

$$\boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{e}_1 \cos\alpha + \boldsymbol{e}_2^0 \cos\theta \sin\alpha - \boldsymbol{e}_3^0 \sin\theta \sin\alpha = \frac{1}{g}(G_1\boldsymbol{e}_1 + G_2\boldsymbol{e}_2^0 + G_3\boldsymbol{e}_3^0). \quad (54)$$

С учетом этого разложения и соотношений (6)–(8) получим из (53)

$$\Omega_\nu = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}(-\lambda u^2 + 1 + \lambda), \qquad \Omega_\rho = \frac{g\lambda^2}{I(1+\lambda)} c_* u^{\lambda+1}. \quad (55)$$

Для нахождения компонент $\boldsymbol{\Omega}_*$ в неподвижном базисе $C_*\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$ необходимо вычислить угол β, для которого в [4] получено аналогичное (35) уравнение

$$\dot\beta = \frac{1}{g\Omega_\rho^2}\big[G_3^0(\Omega_1\dot\Omega_2 - \Omega_2\dot\Omega_1) - \frac{n_0}{I_0}(G_1\dot\Omega_2 - G_2\dot\Omega_1) + \\ + \frac{\dot n_0}{I_0}(G_1\Omega_2 - G_2^0\Omega_1) + \dot\Phi(g\frac{n_0}{I_0}\Omega_\nu - G_3^0\Omega_*^2)\big].$$

Внесем сюда значения (54), (55), (6)–(8), (12), (14), (36) и установим, что

$$\dot\beta = \dot\gamma. \quad (56)$$

В работе [4] указано равенство $\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho^0 = (\boldsymbol{\omega}_* \cdot \boldsymbol{\Omega}_* - \boldsymbol{\omega}_\nu \cdot \boldsymbol{\Omega}_\nu)/\omega_\rho\Omega_\rho$, подставив в которое (1)–(3), (6)–(8), (29), (30), (55), (19), находим

$$\boldsymbol{e}_\rho \cdot \boldsymbol{e}_\rho^0 = -1.$$

Теперь с учетом (56) имеем

$$\beta = \gamma + \pi. \quad (57)$$

Угловая скорость тела S_0 при этом в неподвижном базисе $\boldsymbol{\Omega}_* = \Omega_\nu\boldsymbol{E}_1 + \Omega_\rho(\boldsymbol{E}_2\cos\beta + \boldsymbol{E}_3\sin\beta)$, вследствие (57), такова

$$\boldsymbol{\Omega}_* = \boldsymbol{E}_1\Omega_\nu - \Omega_\rho(\boldsymbol{E}_2\cos\gamma + \boldsymbol{E}_3\sin\gamma).$$

Неподвижный аксоид тела S_0 при этом запишем в виде

$$\boldsymbol{\zeta}^0 = \zeta_1^0\boldsymbol{E}_1 + \zeta_2^0\boldsymbol{E}_2 + \zeta_3^0\boldsymbol{E}_3,$$

где $\zeta_1^0 = F(\mu,u)\Omega_\nu$, $\zeta_2^0 = -F(\mu,u)\Omega_\rho\cos\gamma$, $\zeta_3^0 = -F(\mu,u)\Omega_\rho\sin\gamma$. Подставив сюда значения (55), находим компоненты $\zeta_i^0(\mu,u)$:

$$\begin{aligned} \xi_1^0(\mu,u) &= \widetilde F(\mu,u)(-\lambda u^2 + 1 + \lambda),\\ \xi_2^0(\mu,u) &= -\widetilde F(\mu,u)\lambda c_* u^{\lambda+1}\cos\gamma(u),\\ \xi_3^0(\mu,u) &= -\widetilde F(\mu,u)\lambda c_* u^{\lambda+1}\sin\gamma(u), \end{aligned} \quad (58)$$

в которых $\widetilde F(\mu,u), \gamma(u)$ определены в (48), (37).

Таким образом, соотношениями (58), (48), (37) определен неподвижный аксоид тела S_0. При движении этого тела подвижный аксоид (46)–(51) катится без скольжения по неподвижному (скорость скольжения $v_c^0 = \boldsymbol{\Omega}_* \cdot \boldsymbol{v}/\Omega_*$, вследствие (6), (47), (18), равна нулю).

Для найденного в работе [1] решения уравнения аксоидов записаны для варианта $a_0 = 0$. Так как траектория точки O оказалась при этом окружностью радиуса a с центром в точке C_*, неподвижный базис $C_*\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{E}_3$ введен на траектории точки O :

$$\boldsymbol{r}_* = a(\boldsymbol{E}_1 \cos\psi + \boldsymbol{E}_2 \sin\psi), \quad \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{g}/g, \quad \dot{\psi}(u) = \frac{g\lambda}{I(1+\lambda)}[(1-\lambda)u^2 + 1 + \lambda].$$

Как уже отмечалось, для варианта $a = 0$ траектория (42) точки O – пространственная сферическая кривая. Для введения неподвижноого базиса использован метод М.П. Харламова [3]. Для системы тел необходимо найти два угла γ и β для каждого из них. Оказалось, что $\beta = \gamma + \pi$. При вычислении углов β и γ параметры a или a_0 не участвуют, поэтому β и γ должны совпадать в обоих вариантах. Действительно, $\dot{\gamma} = \dot{\beta} = \dot{\psi}$. Это не случайно, так как при $a_0 = 0$ векторы $\boldsymbol{r}_* = -a\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_\rho = -\boldsymbol{e}_\rho^0 = \boldsymbol{e}_3$ коллинеарны.

1. *Лесина М.Е., Гоголева Н.Ф.* Новое решение задачи о движении двух сферически симметричных тел, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2014. – Вып. 44. – С. 45—58.
2. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**. – № 3. – С. 502–507.
3. *Харламов М.П.* О построении аксоидов пространственного движения твердого тела // Механика твердого тела. – 1980. – Вып. 12. – С. 3–8.
4. *Гоголева Н.Ф., Зиновьева Я.В.* Уравнения аксоидов задачи о движении двух гироскопов Лагранжа, соединенных неголономным шарниром // Механика твердого тела. – 2012. – Вып. 42. – С. 202—212.
5. *Харламов А.П., Харламов М.П.* Неголономный шарнир // Механика твердого тела. – 1995. – Вып. 27. – С. 1–7.

M.E. Lesina, N.F. Gogoleva

Equations of axoids for two spherically symmetric bodies connected by the nonholonomic hinge

The problem under consideration is the inertial motion of two spherically symmetric bodies connected by the nonholonomic hinge. In the article, equations of axoids are obtained for both bodies of the system. The guide line is a space curve.

Keywords: *spherically symmetric body, nonholonomic hinge, loose and fixed axoids.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк;
Донецкий гос. техн. ун-т

Получено 21.04.15