УДК 531.38

©2015. **А.М. Ковалев**

КООРДИНАТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введено понятие координатной устойчивости динамических систем, с помощью которого строится новый раздел теории устойчивости, вызванный требованиями современности, связанными с введением математических методов в науку и практику. Предложено разделение теории устойчивости на три раздела, связанные с содержательной и временной характеристикой результатов. Сформулированы новые задачи и приведены примеры, подтверждающие важность нового раздела теории устойчивости.

Ключевые слова: *математические методы, координатная устойчивость, преобразование системы.*

Введение. Теория устойчивости как наука была основана выдающимся русским ученым А.М. Ляпуновым и была представлена в его знаменитой монографии "Общая задача об устойчивости движения" [1]. Первоначально теория устойчивости применялась к изучению движения небесных тел и решению задач теоретической механики. Со временем она нашла широкое применение в космонавтике, машиностроении и других отраслях, связанных с движением (как изделий, так и оборудования). Современный мир (от Москвы до Южного полюса) преобразовался введением в нашу жизнь устройств компьютерной техники, позволяющих решать сложнейшие задачи вычислительного характера на ладони. Возникла необходимость (и потребность) введения математических методов в науку и практику. Появились новые задачи, связанные с теорией устойчивости. Решение этих задач привело к созданию нового раздела и нового термина, получившего название "координатная устойчивость". Первые результаты по формированию координатной устойчивости представлены в настоящей работе. В монографии [2] в главе "координатный подход и теория устойчивости" и докладе [3] изложены результаты, относящиеся к этому разделу, точнее, к его части – теории устойчивости.

1. Разделение теории устойчивости. Компьютерно-информационные технологии последних десятилетий произвели революцию во всех сферах человеческой деятельности. Это коснулось и области применения теории устойчивости, в которую большой вклад внес метод дополнительных функций [4], расширяющий метод функций Ляпунова. Требования современности наряду с развитием методов функций Ляпунова и дополнительных функций привели к новому построению теории устойчивости, разделив ее на три раздела.

А. Первый раздел – устойчивость. Метод функций Ляпунова вместе с методом дополнительных функций [4] делит теорию устойчивости на две части: устойчивость и неустойчивость. Устойчивая часть определяется одной теоремой, использующей функции Ляпунова и дополнительные функции; неустойчивая часть – также определяется одной теоремой, с помощью функций

Ляпунова и дополнительных функций, а также теоремой Четаева.

Приведем теоремы, полученные с использованием дополнительных функций и разделяющие первый раздел на две части.

Рассматривается устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0; \quad x \in D \subset R^n, \;\; t \in [t_0, \infty), \tag{1}$$

где D – некоторая окрестность нуля, функция $f(x)$ предполагается непрерывно дифференцируемой достаточное число раз для $x \in D$. Точка означает дифференцирование по времени t зависимой переменной x, а также функции $v(x)$ в силу системы (1): $\dot{v}(x) = \langle \nabla v(x), f(x) \rangle$. Здесь ∇ – оператор дифференцирования, в применении к скалярной функции он дает градиент, а к вектор-функции – матрицу Якоби; символ $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существует знакоопределенная функция $V(x)$, производная которой в силу системы* (1) *является знакопостоянной, знака, противоположного $V(x)$. Множество $M = \{x : \dot{V} = 0\}$ представляется суммой множеств $M = \bigcup\limits_{i,j=1}^{s,s_i} M_{ij}$, описываемых формулами (17). Предполагаем, что $V(x)$, $\varphi_i(x)$ – функции, дифференцируемые достаточное число раз, знакоопределенность функции $V(x)$ определяется формой конечного порядка; знакопостоянство $\dot{V}(x)$ и неравенства $\varphi_i^{(j)}(x) \neq 0$ определяются членами разложения в окрестности нуля конечного порядка. Тогда существуют числа m_{ij}, α_{ij} такие, что функция (18) будет знакоопределенной, а ее производная $\dot{V}_f(x)$ – y-знакоопределенной, знака, противоположного $\dot{V}_f(x)$, и нулевое решение системы* (1) *будет устойчиво по всем переменным и асимптотически y-устойчиво.*

Здесь функции $V_{aij}(x)$ определены формулами (4), (7); $y^T = (y_1, ..., y_k)$, $y_i = \varphi_{pi}(x)$ – независимые функции, с помощью которых описываются инвариантные множества, содержащиеся в множествах M_{ij}.

Заметим, что содержание материала в формулах (4), (7), (17), (18), использованных в теореме 1, дано в статье [4].

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существует функция $V(x)$, производная которой является функцией знакопостоянной и представима в форме знакоопределенной функции $\dot{V}(y)$ меньшего числа переменных $y_1, ..., y_k$ $(k < n)$, причем множество $M = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ – инвариантно. При этом в сколь угодно малой окрестности B нуля существуют точки $x \in B \setminus M$, в которых функция $V(x)$ принимает значения того же знака, что и $\dot{V}(x)$. Тогда нулевое решение неустойчиво.*

***Замечание* 1.** Теорема 2 обобщает первую теорему Ляпунова о неустойчивости на случай знакопостоянной производной, совпадая с ней, когда производная становится знакоопределенной. Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости и теорема Четаева о неустойчивости представляет два различных самостоятельных направления исследования неустойчивости, отличных от теоремы 2 и первой теоремы Ляпунова о неустойчивости.

B. Второй раздел – частичная устойчивость. Данный раздел как самостоятельный раздел теории устойчивости основан В.В. Румянцевым [5] и его школой. Относится к неустойчивой части теории устойчивости.

C. Третий раздел – координатная устойчивость. Раздел находится в стадии создания. В его основу положены результаты настоящей статьи, доклада на Четаевской конференции [3], а также глава 8 монографии [2], автором которой (главы 8) является А.М. Ковалев, который и является основателем данного раздела теории устойчивости.

2. Координатная устойчивость. Формирование понятия координатной устойчивости начнем с рассмотрения вопросов частичной устойчивости. Одной из задач частичной устойчивости является задача y-неустойчивости. Для описания y-неустойчивости движений воспользуемся следующим определением.

Определение 1 [5]. Движение $x = 0$ называется y-неустойчивым, если существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдутся точка x_* с $\|x_*\| < \delta$ и момент времени $t_* > t_0$, для которых $\|y(t_*; t_0, x_*\| \geq \varepsilon_0$. Здесь y является подвектором вектора $x^T = (y^T, z^T)$.

Применив определение частичной устойчивости к одной координате, приходим к понятиям устойчивых, асимптотически устойчивых и неустойчивых координат. Это позволяет сформулировать следующую задачу.

Задача 1. Выделить устойчивые, асимптотически устойчивые и неустойчивые переменные для системы (1).

Для теории и практики представляет интерес решение задачи 1 в двух вариантах. В первом варианте необходимо разделить заданные переменные на указанные три группы. Во втором варианте требуется получить три группы переменных $y_i = g_i(x)$ таким образом, чтобы количество устойчивых y_1, асимптотически устойчивых y_2 и неустойчивых y_3 координат соответствовало наперед заданным числам.

Задача 1 составляет основу координатного подхода в теории устойчивости (часть C), результаты которого важны для качественной теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости, а также для теории управления при разработке специальных алгоритмов управления и стабилизации процессов самой различной природы.

Решение задачи 1 во втором варианте порождает понятие координатной устойчивости, связанное со следующей задачей.

Задача 2. Для системы с известными свойствами переменных (относительно их устойчивости) ввести новые переменные с заданными свойствами, как функции исходных переменных.

Решение задачи 2 и приводит к понятию координатной устойчивости, а вместе с ней к принципиально новым методам проектирования подвижных аппаратов, конструкций, финансовых операций и т. д. Естественно, для применения методов координатной устойчивости необходимо внедрить математические методы в практику, что приведет к повышению качества работы и принципиально новым решениям.

Для демонстрации координатного подхода и координатной устойчивости рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Выделим неустойчивые переменные в системе

$$\dot{x}_1 = ax_2, \quad \dot{x}_2 = -bx_1, \quad \dot{x}_3 = -bx_1^2 \quad (a > 0,\ 1 > b > 0). \tag{2}$$

В качестве функции Ляпунова примем

$$V_1 = x_1x_2 - x_3. \tag{3}$$

Производная функции (3) $\dot{V}_1 = ax_2^2$ является функцией положительно постоянной и обращается в нуль на множестве $M = \{x : x_2 = 0\}$. По формуле [4]

$$V_a(x) = \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle^{2m} \big\langle \langle \nabla\varphi(x), f(x)\rangle, \varphi(x)\big\rangle \tag{4}$$

получаем дополнительную функцию $V_a = -(bx_1)^{2m+1}x_2$. Добавляя ее к функции (3), имеем

$$V_{1f} = V_1 + \alpha V_\alpha = x_1x_2 - x_3 - \alpha(bx_1)^{2m+1}x_2. \tag{5}$$

Производная функции (5)

$$\dot{V}_{1f} = \alpha(bx_1)^{2m+2} + ax_2^2\big[1 - \alpha(2m+1)b^{2m+1}x_1^{2m}\big]$$

при достаточно малом $\alpha > 0$ и $m \geq 0$ будет функцией положительно постоянной (положительно определенной относительно x_1, x_2) и множество обращения ее в нуль $M_1 = \{x : x_1 = 0, x_2 = 0\}$ является инвариантным. Функция (5) удовлетворяет теореме 2 и нулевое решение системы (2) неустойчиво. С целью дальнейшего исследования рассмотрим функцию $V_2 = bx_1^2 + ax_2^2$. Имеем $\dot{V}_2 = 0$ и по теореме Румянцева [5] получаем, что нулевое решение системы (2) устойчиво относительно переменных x_1, x_2. Отсюда следует, что переменные x_1, x_2 являются устойчивыми. В силу доказанной неустойчивости нулевого решения заключаем, что переменная x_3 не является устойчивой либо асимптотически устойчивой, т. е. переменная x_3 – неустойчива. Таким образом, переменные системы (2) полностью разделены.

Полученный результат есть решение задачи 1 для системы (2), причем как в первом, так и во втором вариантах, т. е. имеем случай, когда решение задачи 1 для первого и второго вариантов совпадают. При этом неустойчивыми являются координаты, которые не могут быть устойчивыми либо асимптотически устойчивыми. Данный пример также демонстрирует трудности выделения неустойчивых переменных.

Перейдем к рассмотрению следующего примера, который выявляет сложности при решении задачи 1 в двух вариантах.

Пример 2. Исследуем устойчивость нулевого решения системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \quad \dot{x}_2 = 5x_1 - 3x_2, \quad \dot{x}_3 = 6x_1 - 4x_3. \tag{6}$$

Функция Ляпунова $V = x_1^2$ имеет производную $\dot{V} = 4x_1^2$ и удовлетворяет теореме 2. На основании этого нулевое решение системы (2) неустойчиво и, более того, переменная x_1 – неустойчива. Сделать заключение относительно переменных x_2, x_3 с использованием функций Ляпунова довольно сложно ввиду трудности их построения. Однако, воспользовавшись формулой общего решения

$$x_1 = c_1 e^{2t}, \quad x_2 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}, \quad x_3 = c_1 e^{2t} + c_3 e^{-4t},$$

получаем, что все переменные x_1, x_2, x_3 являются неустойчивыми. Этот факт кажется удивительным, имея ввиду собственные числа системы (6): $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -4$. Это объясняется тем, что решалась задача 1 в первом варианте, а собственные числа сыграют свою роль при получении решения второго варианта.

Сделаем в системе (6) замену переменных

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - x_1, \quad y_3 = x_3 - x_1. \tag{7}$$

В переменных (7) система (6) принимает вид

$$\dot{y}_1 = 2y_1, \quad \dot{y}_2 = -3y_2, \quad \dot{y}_3 = -4y_3. \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что переменная y_1 является неустойчивой, переменные y_2, y_3 являются асимптотически устойчивыми. В системе (8) сделаем еще одну замену, которая является нелинейной:

$$z_1 = y_1 y_2^2, \quad z_2 = y_2, \quad z_3 = y_3. \tag{9}$$

Получаем

$$\dot{z}_1 = -4z_1, \quad \dot{z}_2 = -3z_2, \quad \dot{z}_3 = -4z_3. \tag{10}$$

Очевидно, что все переменные z_1, z_2, z_3 системы (10) являются асимптотически устойчивыми. Изучая поведение системы (6) при заменах (7), (9), отмечаем, что переменные x_i, y_i, z_i сильно меняются: все переменные x_i – неустойчивые; переменные y_2, y_3 – асимптотически устойчивые, переменная y_1 – неустойчивая; все переменные z_i – асимптотически устойчивые. Это есть решение задачи 1 во втором варианте и фактически решение задачи 2. Таким образом, Примеры 1, 2 демонстрируют свойства координатной устойчивости и возникающие ее новые качества.

3. Построение системы с заданными свойствами. Примеры 1, 2 показывают, что свойство устойчивости системы зависит от выбора переменных. В Примере 1 все исследование выполняется при исходных переменных, на основании чего и делается заключение об устойчивости, точнее, координатной устойчивости (по переменной x). В Примере 2 рассматривается устойчивость системы относительно трех видов координат x, y, z. Оказывается, что устойчивость системы изменяется при замене координат, причем в двух случаях – на прямо противоположные (с x на z). Возникает вопрос, как охарактеризовать движение изучаемой системы с точки зрения ее устойчивости. Отсюда естественно приходим к понятию координатной устойчивости, которое однозначно определяет характер движения изучаемой системы, описываемой принятыми переменными. С другой стороны изменение переменных приводит к изменению изучаемой системы в ее материальном представлении. Таким образом, для построения заданного объекта с нужными свойствами, а также точного описания существующего явления разработчики и исследователи должны вплотную работать с математиками.

Итак, требование современности: введение математических методов в науку и практику. Для реализации этого необходимо разработать математическую терминологию для выбранной области деятельности, причем она может быть как промышленной, так и гуманитарной и финансовой, что очень актуально. Разработанную терминологию можно назвать начальной, как и динамическую систему, описывающую изучаемый процесс. Для начальной системы ставится и решается задача устойчивости, а также формулируются требования к поведению системы с точки зрения устойчивости. В случае невыполнения начальной системой заданных требований с помощью методов координатного подхода начальная система преобразуется в новую систему (система 1), удовлетворяющую заданным требованиям. При этом может оказаться, что полученное поведение новых переменных требует введения дополнительных координат. Тогда разрабатывается усовершенствованная модель, процесс исследования устойчивости повторяется и строится новая система (система 2), удовлетворяющая заданным требованиям. Из разработанных систем выбирается система, наиболее удовлетворяющая специалистов-практиков.

Предложенная выше схема исследования требует серьезных усилий как со стороны производственника, так и со стороны специалиста-математика. Покажем на примере системы (6) математическую часть процесса.

Пример 3. Для нужд производства требуется получить решение следующей задачи.

Задача 3. Для системы (6) необходимо построить два набора переменных таких, чтобы все переменные одного набора были асимптотически устойчивыми, а второго – неустойчивыми.

Решение задачи начнем с того, что систему (6) с помощью замены (7) приведем к виду (8). С помощью замены (9) получаем систему (10), все переменные этой системы асимптотически устойчивые. Для получения неустойчивых переменных сделаем замену

$$v_1 = x_1, \quad v_2 = x_2 - x_1, \quad v_3 = x_3 + x_1. \tag{11}$$

Система (6) в переменных (11) принимает вид

$$\dot{v}_1 = 2x_1, \quad \dot{v}_2 = -3v_2, \quad \dot{v}_3 = -4v_3 + 12v_1. \tag{12}$$

Сделаем еще одну замену

$$w_1 = v_1, \quad w_2 = v_2 v_1^2, \quad w_3 = v_3 v_1^2. \tag{13}$$

В переменных (13) система (12) имеет вид

$$\dot{w}_1 = 2w_1, \quad \dot{w}_2 = w_2, \quad \dot{w}_3 = 12w_1^3. \tag{14}$$

Все переменные (13) системы (14), описывающей систему (12) и исходную систему (6), являются неустойчивыми, как и переменные системы (6).

Таким образом, решение задачи 3 получено. При этом для неустойчивых переменных имеются два решения: решение в переменных x, а также решение в переменных (13). При этом выбор неустойчивых переменных будет во многом зависеть от производственника, учитывающего качество функционирования соответствующих систем.

Полученные решения задачи 3 имеют простой вид, что очень важно для производственников при их анализе в производственных терминах. Попытки автора получить такой же результат для системы (2) не увенчались успехом, что подтверждает сложность решения таких задач.

Заключение. 1. Достижения последних лет, связанные с введением в теорию устойчивости дополнительных функций [2, 4] и координатного подхода [2, 3], привели к необходимости нового построения теории устойчивости. В настоящей работе предложено выделить в теории устойчивости три части, причем в каждой из них серьезное значение имеют дополнительные функции (первая часть), координатный подход (вторая часть) и координатная устойчивость (третья часть). При этом понятие координатной устойчивости впервые вводится в данной статье и, как показано на примерах, имеет важное значение как для теории, так и для практики.

2. Рождается новый подход к изучению свойств устойчивости: оказалось, что устойчивость существенно зависит от переменных, описывающих поведение изучаемой системы, особенно в случае, когда замена переменных является нелинейной. Возникает (пока недоказанная автором) теорема о существовании таких переменных для изучаемой системы, которые удовлетворяют любым наперед заданным свойствам их устойчивости. Возможны некоторые исключения.

3. В связи с п. 1 (вышестоящим) необходимо отметить, что и в третьей части происходит деление вопросов устойчивости на два направления: 1) координатный подход приводит к разделению переменных по свойству их устойчивости и неустойчивости; 2) координатная устойчивость порождает задачу

построения системы с заданными свойствами, что связано с практическими требованиями и с появлением нового подхода к изучению дифференциальных уравнений при использовании замены переменных, особенно в нелинейном случае.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 472 с.; *Ляпунов А.М.* Собр. соч. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2. – 476 с.
2. *Зуев А.Л., Игнатьев А.О., Ковалев А.М.* Устойчивость и стабилизация нелинейных систем. – Киев: Наукова думка, 2013. – 428 с.
3. *Ковалев А.М.* Теория неустойчивости: от Ляпунова к Четаеву и до наших дней // Аналит. механика, устойчивость и управление: Тр. X Междунар. Четаев. конф. (Казань, 12–16 июня 2012 г.). – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – Т. 5: Пленар. докл. – С. 26–39.
4. *Ковалев А.М.* Решение задач устойчивости для нелинейных систем с известной функцией со знакопостоянной производной // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 3–28.
5. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

Alexander M. Kovalev

Coordinate stability of dynamical systems

The concept of the coordinate stability of dynamical systems is introduced, by means of whom the brand new section of the stability theory is formulated. This formulation is caused by the modern requirements connected with the introduction of mathematical methods into the science and practice. The division of the stability theory into three sections relating to the substantive and temporal characteristics of the results is proposed. The new tasks and examples, confirming the importance of new section of the theory of stability are formulated.

Keywords: *mathematical methods, coordinate stability, system transformation.*

ГУ "Ин-т прикл. математики и механики", Донецк
Получено 05.06.15
kovalev@iamm.su