

УДК 531.36

©2006. А.Я. Савченко*, А.Е. Позднякович**, В.Е. Пузырев*

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСИЯ МАЯТНИКОВОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ТРЕМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Получены условия устойчивости верхнего положения равновесия двухзвенного математического маятника с дополнительной степенью свободы (линейный осциллятор с вязким трением). Дана оценка скорости затухания возмущенных движений.

1. Постановка задачи. Уравнения движения. В статье рассматривается задача о пассивной стабилизации [1, 2] двухзвенного упругого маятника, верхнее положение равновесия которого устойчиво, но не асимптотически.

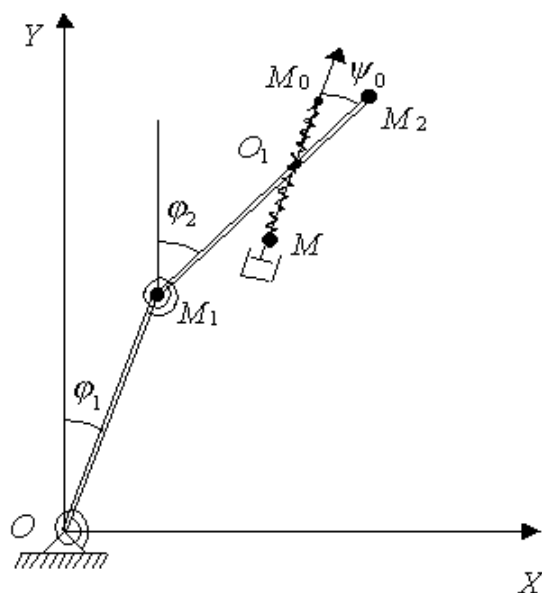


Рис. 1.

Задача заключается в добавлении в систему стабилизирующего устройства (СУ) с таким расчетом, чтобы движение исходной (основной) системы стало асимптотически устойчивым. В статьях [2 – 4] подобная задача была решена для математического и физического маятников, при этом СУ моделировалось материальной точкой, имеющей одну степень свободы (системой материальных точек в [4]), а ось колебаний этой точки совпадала с осью маятника. Было установлено, что задача решается для любых значений коэффициентов жесткости и трения СУ. Вместе с тем, исследуемая система была существенно нелинейной, а именно – имел место критический случай чисто мнимых корней.

В настоящей работе рассматривается случай, когда материальная точка совершает колебания вдоль некоторой, жестко связанной со вторым звеном маятника прямолинейной направляющей, неколлинеарной этому звену. Хотя, на первый взгляд, такое размещение создает асимметрию в системе и может способствовать ее "раскачиванию", оно позволяет решить задачу в линейном приближении.

Механическая система, изображенная на рис. 1, состоит из двух невесомых, недеформируемых стержней OM_1 и M_1M_2 длиной \tilde{l}_1 и \tilde{l}_2 соответственно. Стержни могут отклоняться от вертикали на углы φ_1 и φ_2 . На концах стержней в точках M_1 и M_2 находятся грузы с массами \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 соответственно. В нижних концах O , M_1 обоих звеньев размещены упругие шарниры, которые моделируются спиральными пружинами с жесткостями $\tilde{\kappa}_1$ и $\tilde{\kappa}_2$; пружины при верхнем вертикальном положении маятника находятся в недеформируемом состоянии. Вдоль прямой, проходящей через точку O_1 звена M_1M_2 под углом ψ_0 , совершает колебательное движение материальная точка M .

Механическая система, изображенная на рис. 1, состоит из двух невесомых, недеформируемых стержней OM_1 и M_1M_2 длиной \tilde{l}_1 и \tilde{l}_2 соответственно. Стержни могут отклоняться от вертикали на углы φ_1 и φ_2 . На концах стержней в точках M_1 и M_2 находятся грузы с массами \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 соответственно. В нижних концах O , M_1 обоих звеньев размещены упругие шарниры, которые моделируются спиральными пружинами с жесткостями $\tilde{\kappa}_1$ и $\tilde{\kappa}_2$; пружины при верхнем вертикальном положении маятника находятся в недеформируемом состоянии. Вдоль прямой, проходящей через точку O_1 звена M_1M_2 под углом ψ_0 , совершает колебательное движение материальная точка M .

На эту точку действуют, наряду с силой тяжести, линейная упругая сила и сила вязкого трения. Обозначим $|M_1O_1| = \tilde{l}_0$, массу точки M примем за \tilde{m} , жесткость пружины за $\tilde{\varkappa}$, коэффициент трения за \tilde{h} .

Выберем в качестве обобщенных координат углы φ_1, φ_2 , а также координату \tilde{u} точки M на оси O_1M_0 (с началом отсчета в точке O_1).

Выпишем кинетическую и потенциальную энергии.

$$T = \frac{1}{2} \tilde{m}_1 v_{M_1}^2 + \frac{1}{2} \tilde{m}_2 v_{M_2}^2 + \frac{1}{2} \tilde{m} v_M^2,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \tilde{\varkappa}_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{\varkappa}_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} \tilde{\varkappa} (\tilde{u} - \tilde{u}_0)^2 + \tilde{m}_1 g y_{M_1} + \tilde{m}_2 g y_{M_2} + \tilde{m} g y_M,$$

где

$$r_{M_1} = (\tilde{l}_1 \sin \varphi_1, \tilde{l}_1 \cos \varphi_1), \quad r_{M_2} = (\tilde{l}_1 \sin \varphi_1 + \tilde{l}_2 \sin \varphi_2, \tilde{l}_1 \cos \varphi_1 + \tilde{l}_2 \cos \varphi_2),$$

$$r_M = (\tilde{l}_1 \sin \varphi_1 + \tilde{l}_0 \sin \varphi_2 + \tilde{u} \sin(\varphi_2 - \psi_0), \tilde{l}_1 \cos \varphi_1 + \tilde{l}_0 \cos \varphi_2 + \tilde{u} \cos(\varphi_2 - \psi_0)),$$

радиусы-векторы точек M_1, M_2, M соответственно.

Запишем уравнения движения данной механической системы в форме Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j(\dot{q}_s, q_s) \quad (j, s = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} L = T - \Pi = & \frac{1}{2} \tilde{m}_1 \tilde{l}_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{m}_2 (\tilde{l}_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tilde{l}_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 \tilde{l}_1 \tilde{l}_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) + \\ & + \frac{1}{2} \tilde{m} (\tilde{l}_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \tilde{l}_0^2 \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\tilde{u}}^2 + \tilde{u}^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 \tilde{u} \dot{\varphi}_2 (\tilde{l}_0 \dot{\varphi}_2 \cos \psi_0 + \tilde{l}_1 \dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2 + \psi_0)) - \\ & - 2 \tilde{u} (\tilde{l}_0 \dot{\varphi}_2 \sin \psi_0 + \tilde{l}_1 \dot{\varphi}_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \psi_0)) + 2 \tilde{l}_0 \tilde{l}_1 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) - \\ & - \frac{1}{2} \tilde{\varkappa}_1 \varphi_1^2 - \frac{1}{2} \tilde{\varkappa}_2 (\varphi_2 - \varphi_1)^2 - \tilde{m}_1 g \tilde{l}_1 \cos \varphi_1 - \tilde{m}_2 g (\tilde{l}_1 \cos \varphi_1 + \tilde{l}_2 \cos \varphi_2) - \\ & - \tilde{m} g (\tilde{l}_1 \cos \varphi_1 + \tilde{l}_0 \cos \varphi_2 + \tilde{u} \cos(\varphi_2 - \psi_0)) - \frac{1}{2} \tilde{\varkappa} (\tilde{u} - \tilde{u}_0)^2. \end{aligned}$$

Если пружина закреплена таким образом, что $\tilde{u}_0 = \tilde{m} g \cos \psi_0 / \tilde{\varkappa}$, то уравнения (1) допускают решение

$$\varphi_1^{(0)} = 0, \quad \varphi_2^{(0)} = 0, \quad \tilde{u}^{(0)} = 0, \quad \dot{\varphi}_1^{(0)} = 0, \quad \dot{\varphi}_2^{(0)} = 0, \quad \dot{\tilde{u}}^{(0)} = 0, \quad (2)$$

которому соответствует положение равновесия изучаемой механической системы. Введем безразмерные время и параметры по формулам

$$\tau = \sqrt{g/\tilde{l}_2} t, \quad u = \tilde{u}/\tilde{l}_2, \quad m = \tilde{m}/\tilde{m}_2, \quad m_1 = \tilde{m}_1/\tilde{m}_2, \quad l_0 = \tilde{l}_0/\tilde{l}_2, \quad l_1 = \tilde{l}_1/\tilde{l}_2, \quad (3)$$

$$\varkappa_1 = \tilde{\varkappa}_1/(g\tilde{m}_2\tilde{l}_2), \quad \varkappa_2 = \tilde{\varkappa}_2/(g\tilde{m}_2\tilde{l}_2), \quad \varkappa = \tilde{\varkappa}\tilde{l}_2/g\tilde{m}, \quad h = \sqrt{\tilde{l}_2/g\tilde{h}/\tilde{m}}.$$

Переходя в (1) к возмущениям

$$\varphi_1 = x_1, \quad \varphi_2 = x_2, \quad u = y, \quad \dot{\varphi}_1^{(0)} = \dot{x}_1, \quad \dot{\varphi}_2^{(0)} = \dot{x}_2, \quad \dot{u} = \dot{y}$$

и обозначая штрихом дифференцирование по τ , получаем уравнения в вариациях:

$$\begin{aligned} l_1^2 (m_1 + 1 + m) x_1'' + l_1 (1 + m l_0) x_2'' - m l_1 \sin \psi_0 y'' - \varkappa_2 x_2 - \\ - x_1 (-\varkappa_1 - \varkappa_2 + l_1 (m_1 + 1 + m)) = 0, \\ l_1 (1 + m l_0) x_1'' + (1 + m l_0^2) x_2'' - m l_0 \sin \psi_0 y'' - \varkappa_2 x_1 - \\ - x_2 (-\varkappa_2 + 1 + m l_0) + m \sin \psi_0 y = 0, \\ -m l_1 \sin \psi_0 x_1'' - m l_0 \sin \psi_0 x_2'' + m y'' + m \sin \psi_0 x_2 + \varkappa y = -h y'. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Анализ условий устойчивости. Условиями асимптотической устойчивости решения (2) является существование у характеристического уравнения

$$c_0 \lambda^6 + c_1 \lambda^5 + c_2 \lambda^4 + c_3 \lambda^3 + c_4 \lambda^2 + c_5 \lambda + c_6 = 0 \quad (5)$$

системы (4) только корней с отрицательными вещественными частями. Здесь

$$\begin{aligned} c_0 = l_1^2 [m_1 (m l_0^2 \cos^2 \psi_0 + 1) + m (l_0 - 1)^2 \cos^2 \psi_0], \quad c_1 = l_1^2 h [m_1 (m l_0^2 + 1) + m (l_0 - 1)^2], \\ c_2 = \varkappa_1 (m l_0^2 \cos^2 \psi_0 + 1) + \varkappa_2 [m (l_0 + l_1)^2 \cos^2 \psi_0 + m_1 l_1^2 + (l_1 + 1)^2] + \varkappa [m_1 l_1^2 (m l_0^2 + 1) + m l_1^2 (l_0 - 1)^2] - \\ - m_1 l_1 (m l_0^2 \cos^2 \psi_0 + m l_0 l_1 \cos 2\psi_0 + l_1 + 1) - l_1 [m^2 l_0 (l_0 + l_1) \cos^2 \psi_0 + m l_0 (l_0 \cos^2 \psi_0 + l_1 \cos 2\psi_0) + \\ + m l_1 (1 + \sin^2 \psi_0) + m + l_1 + 1], \quad c_3 = h \{ \varkappa_1 (m l_0^2 + 1) + \varkappa_2 [m_1 l_1^2 + m (l_0 + l_1)^2 + (l_1^2 + 1)] - \\ - m l_0 l_1 (m_1 + m) (l_0 + l_1) - m l_1 (l_0^2 + l_0 l_1 + l_1 + 1) - l_1 (m_1 + 1) (l_1 + 1), \\ c_4 = \varkappa \{ \varkappa_1 (m l_0^2 + 1) + \varkappa_2 [m_1 l_1^2 + m (l_0 + l_1)^2 + (l_1 + 1)^2] - m l_0 l_1 (m_1 + m) (l_0 + l_1) - \\ - l_1 (m_1 + 1) (l_1 + 1) - m l_1 (l_0^2 + l_0 l_1 + l_1 + 1) \} + \varkappa_1 \varkappa_2 - \varkappa_1 (m l_0 \cos 2\psi_0 + 1) - \\ - \varkappa_2 [m_1 l_1 + m (l_0 + l_1) \cos 2\psi_0 + l_1 + 1] + m_1 l_1 (m l_0 \cos 2\psi_0 - m l_1 \sin^2 \psi_0 + 1) + \\ + l_1 (m + 1) [m (l_0 \cos 2\psi_0 - l_1 \sin^2 \psi_0) + 1], \quad c_5 = h \{ \varkappa_1 \varkappa_2 - \varkappa_1 (m l_0 + 1) - \varkappa_2 [m l_0 + 1 + \\ + l_1 (m_1 + m + 1)] + l_1 (1 + m l_0) (m_1 + m + 1) \}, \quad c_6 = \varkappa \{ \varkappa_1 \varkappa_2 - \varkappa_1 (m l_0 + 1) - \varkappa_2 [m l_0 + 1 + \\ + l_1 (m_1 + m + 1)] \} + l_1 \varkappa (m l_0 + 1) (m_1 + m) - [m (\varkappa_1 + \varkappa_2) - m l_1 (m_1 + m + 1)] \sin^2 \psi_0. \end{aligned}$$

Эти условия получим на основе критерия Лъенара–Шипара [5]:

$$c_1 > 0, \quad c_3 > 0, \quad c_5 > 0, \quad c_6 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_5 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & 0 & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & 0 \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 & c_6 \\ 0 & 0 & c_1 & c_3 & c_5 \end{vmatrix} > 0, \quad (6)$$

После подстановки соответствующих выражений и вычислений приходим к представлению

$$\Delta_3 = l_1^2 h^2 \sin^2 \psi_0 [(l_0 - 1)^2 (ml_0^2 + 1) \varkappa_1^2 + 2(l_0 - 1) s_1 s_2 \varkappa_1 \varkappa_2 + s_1^2 s_3 \varkappa_2^2 + 2l_1 (l_0 - 1)^2 (m_1 + m + 1) \varkappa_1 - 2l_1 (l_0 - 1) (m_1 + m + 1) s_1 s_2 \varkappa_2 + l_1^2 (l_0 - 1)^2 (m_1 + m + 1)^2 s_3],$$

$$\Delta_5 = m^4 l_1^2 h^3 \sin^4 \psi_0 \{ l_0 (l_0 - 1) \varkappa_1^2 \varkappa_2 + (l_0 + l_1) [m_1 l_0 l_1 + (l_0 - 1) (l_1 + 1)] \varkappa_1 \varkappa_2^2 - (l_0 - 1)^2 \varkappa_1^2 - 2(l_0 - 1) [m_1 l_1 (3l_0 + l_1) + ml_1 (l_0 + l_1) + 3l_0 l_1 + 2l_0 + l_1^2 - 2l_1 - 2] \varkappa_1 \varkappa_2 + [m_1^2 l_0^2 l_1^2 - 2m_1 l_0 l_1 (l_0 - 1) (l_1 + 1) - (l_0 - 1)^2 (l_1 + 1)^2] \varkappa_2^2 + 2l_1 (m_1 + m + 1) (l_0 - 1)^2 - 2l_1 (l_0 - 1) [m_1^2 l_0 l_1 + m_1 (ml_0 l_1 - 2l_0 l_1 + l_1 - l_0 + 1)] \varkappa_2 + l_1^2 (l_0 - 1)^2 [(m_1 + m - 1)^2 - 2] \}^2,$$

где

$$s_1 = m_1 l_0 l_1 + (l_0 - 1) (l_1 + 1), \quad s_2 = ml_0^2 + 1 + l_1 (ml_0 + 1), \quad s_3 = m_1 l_1^2 + m (l_0 + l_1)^2 + (l_1 + 1)^2.$$

С помощью тождественных преобразований выражение для Δ_3 может быть приведено к виду

$$\Delta_3 = \frac{l_1^2 h^2 \sin^2 \psi_0}{ml_0^2 + 1} \{ [(l_0 - 1) (ml_0^2 + 1) \varkappa_1 + s_1 s_2 \varkappa_2 - l_1 (l_0 - 1) (m_1 + m + 1) s_2]^2 + l_1^2 (l_0 - 1)^2 (m_1 + m + 1)^2 [m_1 (ml_0^2 + 1) + m (l_0 - 1)^2] \},$$

откуда следует его положительность (напомним, что по предположению $\sin \psi_0 \neq 0$).

Нетрудно видеть, что $c_1 > 0$. Найдем условия положительности коэффициентов c_3, c_5, c_6 . С этой целью введем обозначения

$$\varkappa_1^* = \varkappa_1 - l_1 (m_1 + 1 + m) - 1 - ml_0 - (1 + ml_0) / \varkappa_2^*, \quad \varkappa_2^* = \varkappa_2 - 1 - ml_0.$$

Тогда

$$c_3 = h \{ \varkappa_1^* (ml_0^2 + 1) + \varkappa_2^* [l_1^2 (m_1 + m + 1) + ml_0 (l_0 + l_1 + 1) + l_1 + 2] + m^2 l_0^2 (2l_0 + l_1 + 1) + 2ml_0 (l_0 + l_1 + 2) + l_1 + 3 + \frac{1}{\varkappa_2^*} (ml_0^2 + 1) (ml_0 + 1)^2 \},$$

$$c_5 = h \varkappa_1^* \varkappa_2^*, \quad c_6 = \varkappa_1^* \varkappa_2^* - m \sin^2 \psi_0 [\varkappa_1^* + \varkappa_2^* + 2(ml_0 + 1) + \frac{1}{\varkappa_2^*} (ml_0 + 1)^2].$$

Как следует из условия $c_5 > 0$, для выполнения неравенств (6) необходимо чтобы $\varkappa_1^* > 0, \varkappa_2^* > 0$ (если обе эти величины отрицательны, то тогда не выполняется условие $c_3 > 0$). Очевидно также, что при $\varkappa_1^* > 0, \varkappa_2^* > 0$ выражение для c_3 положительно. Как показывает несложный, хотя и достаточно громоздкий анализ, при этом выражение в фигурных скобках в записи Δ_5 не может обращаться в нуль). Условие же положительности c_6 можно записать в виде

$$\Delta \varkappa = \varkappa - \varkappa_{kp} > 0, \tag{7}$$

где

$$\varkappa_{kp} = m^2 [(\varkappa_2^* + 1)^2 + ml_0 (ml_0 + 2 + 2\varkappa_2^*) + \varkappa_1^* \varkappa_2^*] \sin^2 \psi_0 / (\varkappa_1^* \varkappa_2^{*2}),$$

и рассматривать его как ограничение на жесткость СУ. Заметим, что положительность величин \varkappa_1^* , \varkappa_2^* является необходимым и достаточным условием [6] устойчивости основной системы, т. е. маятника без СУ.

Таким образом, условия положительности величин \varkappa_1^* , \varkappa_2^* и $\Delta\varkappa$ являются необходимыми и достаточными для выполнения неравенств (6). Как следует из вышеприведенных рассуждений, положение равновесия двухзвенного упругого маятника пассивно стабилизируемо при произвольном значении коэффициента трения \tilde{h} и угла ψ_0 . В отличие от работ [1 – 4], имеем ограничение снизу на жесткость пружины осциллятора, которое определяется неравенством (7).

Представляется интересным вопрос об оптимальном выборе параметров СУ – таких значений массы, жесткости, коэффициента трения и угла ψ_0 , которые обеспечивали бы наиболее быстрое затухание возмущенных движений. Как показывают численные расчеты, "хорошо" выбранные параметры (в сравнении со "случайно" выбранными) дают рост скорости затухания на порядки. Если пытаться давать заключение, основываясь на виде характеристического уравнения (5) и общих механических соображениях, то можно ожидать, что величина v , характеризующая скорость затухания, является возрастающей функцией аргумента m . Относительно влияния коэффициента трения на скорость затухания можно утверждать только, что $v \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$. Что же касается возможности неограниченного возрастания v при возрастании h , то, как это имеет место и для системы с одной степенью свободы, v ограничена сверху величиной, зависящей от жесткостей шарниров и не зависящей от h . Действительно, если уравнение (5) имеет комплексный корень λ_0 , то оно также имеет и корень $\bar{\lambda}_0$, другими словами характеристический многочлен системы (4) представим в виде произведения

$$(\lambda^2 + a_1\lambda + b_1)(\lambda^2 + a_2\lambda + b_2)(\lambda^2 + a_3\lambda + b_3).$$

При этом все величины a_j, b_j ($j = 1, 2, 3$) положительны (иначе будет хотя бы один корень с неотрицательной вещественной частью), а $2v \leq \min(a_1, a_2, a_3)$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} c_4 &= a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + b_1 + b_2 + b_3 > a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 \geq \\ &\geq \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3)^2 \geq \frac{1}{2} [3 \min(a_1, a_2, a_3)]^2 = 18v^2. \end{aligned}$$

С другой стороны, как следует из явного представления для коэффициента c_4 , он не зависит от h . Ниже этот вопрос исследован более подробно для однозвенного маятника.

3. Оптимизация скорости затухания колебаний однозвенного маятника.

Ограничимся случаем, когда система состоит из одного звена M_1M и СУ. Уравнения в вариациях для однозвенного маятника совпадают со вторым и третьим уравнениями системы (4), в которых формально следует положить $x_1 \equiv 0$ (также, с целью избежать переобозначений в формулах (3), примем массу, длину и жесткость шарнира маятника соответственно за $\tilde{l}_2, \tilde{m}_2, \tilde{\varkappa}_2$). Характеристическое уравнение имеет при этом вид

$$\tilde{\lambda}^4 + \tilde{c}_1\tilde{\lambda}^3 + \tilde{c}_2\tilde{\lambda}^2 + \tilde{c}_3\tilde{\lambda} + \tilde{c}_4 = 0, \quad (8)$$

где

$$\tilde{c}_1 = \frac{1 + \mu}{1 + \mu\delta} h_1, \quad \tilde{c}_2 = \frac{\nu + \varkappa(1 + \mu) + (1 - 2\delta)\mu}{1 + \mu\delta}, \quad \tilde{c}_3 = \frac{\nu - \mu}{1 + \mu\delta} h_1, \quad \tilde{c}_4 = \frac{\varkappa(\nu - \mu) - \mu(1 - \delta)}{1 + \mu\delta},$$

$$\mu = ml_0^2, \quad \nu = l_0(\varkappa_2 - 1), \quad \tilde{\lambda} = \sqrt{l_0}\lambda, \quad h_1 = \sqrt{l_0}h, \quad \varkappa = l_0\varkappa, \quad \delta = \cos^2 \psi_0. \quad (9)$$

Ниже в целях удобства записи знак " \sim " над коэффициентами \tilde{c}_j ($j = \overline{1;4}$) опускаем. Уравнение (8) значительно легче для анализа, чем (4), причем не столько за счет меньшей степени, сколько по причине отсутствия четырех параметров: \varkappa_1 , m_1 , l_0 , l_1 . Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть \mathbf{d} – линейный дифференциальный оператор, которому соответствует λ -матрица

$$\mathbf{D}(\lambda) = \begin{pmatrix} (1 + \alpha^2)(\lambda^2 + \beta^2) & \alpha(\lambda^2 - 1) \\ \alpha(\lambda^2 - 1) & \lambda^2 + h\lambda + \varkappa \end{pmatrix},$$

где α , β , h , \varkappa – параметры, принадлежащие области G

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad h > 0, \quad \varkappa > \frac{\alpha^2}{\beta^2(1 + \alpha^2)} \quad (10)$$

пространства R^4 . Обозначим вещественные части собственных значений оператора \mathbf{d} через $-\sigma_j$ ($j = 1, 2$) и введем в рассмотрение функцию $p(\alpha, \beta, h, \varkappa) = \min(\sigma_1, \sigma_2)$. Тогда в области

$$\alpha < \frac{2\beta^2}{1 + \beta^2} \quad (11)$$

точной верхней гранью для p по всевозможным наборам аргументов из (10) является выражение $\sigma = \alpha(1 + \beta^2)/2\beta$, которое достигается только на гиперповерхности

$$\varkappa = \frac{\alpha^2 + \beta^4}{\beta^2(1 + \alpha^2)}, \quad h = \frac{2\alpha(1 + \beta^2)}{\beta(1 + \alpha^2)}. \quad (12)$$

На границе области (11) σ принимает предельное значение β , если же неравенство (11) имеет противоположный знак, то $p < \sigma$.

Доказательство. Отметим вначале, что уравнение

$$\det \mathbf{D}(\lambda) \equiv \lambda^4 + c_1^0 \lambda^3 + c_2^0 \lambda^2 + c_3^0 \lambda + c_4^0 = 0,$$

где

$$c_1^0 = (1 + \alpha^2)h, \quad c_2^0 = (1 + \alpha^2)(\beta^2 + \varkappa) + 2\alpha^2, \quad c_3^0 = (1 + \alpha^2)\beta^2 h, \quad c_4^0 = (1 + \alpha^2)\beta^2 \varkappa - \alpha^2,$$

имеет только корни с отрицательными вещественными частями, поскольку для него выполняются условия критерия Ляенара–Шипара (или критерия Гурвица). В самом деле, условия положительности коэффициентов этого уравнения описываются неравенствами (10), а в положительности выражения $\Delta = c_1^0 c_2^0 c_3^0 - (c_1^0)^2 c_4^0 - (c_3^0)^2$ легко убедиться непосредственно. Сделаем замену $\lambda = \check{\lambda} - \sigma$ и покажем, что для уравнения

$$\check{\lambda}^4 + \check{c}_1^0 \check{\lambda}^3 + \check{c}_2^0 \check{\lambda}^2 + \check{c}_3^0 \check{\lambda} + \check{c}_4^0 = 0$$

с положительными коэффициентами

$$\check{c}_1^0 = (1 + \alpha^2)h - 4\sigma, \quad \check{c}_2^0 = (1 + \alpha^2)(\beta^2 + \varkappa) + 2\alpha^2 - 3(1 + \alpha^2)h\sigma + 6\sigma^2,$$

$$\check{c}_3^0 = (1 + \alpha^2)\beta^2 h - 2[(1 + \alpha^2)(\beta^2 + \varkappa) + 2\alpha^2]\sigma + 3(1 + \alpha^2)h\sigma^2 - 4\sigma^3,$$

$\check{c}_4^0 = (1 + \alpha^2)\beta^2\kappa - \alpha^2 - (1 + \alpha^2)\beta^2h\sigma + (1 + \alpha^2)(\beta^2 + \kappa) + 2\alpha^2\sigma^2 - (1 + \alpha^2)h\sigma^3 + \sigma^4$
 нарушается условие $\check{\Delta} = \check{c}_1^0 \check{c}_2^0 \check{c}_3^0 - (\check{c}_1^0)^2 \check{c}_4^0 - (\check{c}_3^0)^2 > 0$.

Подставим в $\check{\Delta}$ выражения для коэффициентов \check{c}_j и с помощью тождественных преобразований получим следующее представление

$$\check{\Delta} = 2\sigma[2\sigma - h(1 + \alpha^2)][\kappa(1 + \alpha^2) + \alpha^2(3\beta^2 + 6 + \frac{2}{\beta^2}) - 2h\sigma(\alpha^2 + 1) - \beta^2]^2 - [h(1 + \alpha^2) - 4\sigma]^2\{\alpha^2(1 + \beta^2)^2 + 2\beta^2\sigma[h(1 + \alpha^2) - 4\sigma]\}.$$

Если, согласно предположению, $\check{c}_1 > 0$, то множитель $[2\sigma - h(1 + \alpha^2)]$ отрицателен, а выражение в фигурных скобках положительно – как следствие имеем $\check{\Delta} < 0$. Заметим, что и при $\check{c}_1 \leq 0$ условия критерия также не выполняются.

Следовательно, $\min(\sigma_1, \sigma_2) \leq \sigma$. Предположим теперь, что выполняются равенства (12). Тогда характеристический многочлен представим в виде

$$\det \mathbf{D}(\lambda) = [\lambda^2 + \frac{\alpha(1 + \beta^2)}{\beta}\lambda + \beta^2]^2$$

и, если выполняется неравенство (11), то оператор \mathbf{d} имеет две пары одинаковых комплексно сопряженных собственных значений с вещественными частями, равными $-\sigma$. Если $\alpha = 2\beta^2/(1 + \beta^2)$, то дискриминант квадратного трехчлена в квадратных скобках в последней записи равен нулю, и \mathbf{d} имеет четырехкратное собственное значение $-\beta$. Если $\alpha > 2\beta^2/(1 + \beta^2)$, то этот дискриминант положителен, а поскольку $\sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma$ ($\sigma_1 \neq \sigma_2$), то, $p < \sigma$.

Применительно к изучаемой в настоящем пункте механической системе, имеем

$$\alpha^2 = \frac{\mu(1 - \delta)}{1 + \mu\delta}, \quad \beta^2 = \frac{\nu - \mu}{1 + \mu},$$

и неравенство (11) записывается следующим образом

$$(4 - \mu)\nu^2 - 10\mu\nu + \mu(4\mu - 1) + \mu\delta[5\nu^2 + 2(1 - 4\mu)\nu + 1 + 4\mu^2] > 0.$$

Выражение в квадратных скобках, очевидно, положительно при любых μ и ν , а группа слагаемых, не содержащих множителя δ , может быть представлена в виде произведения

$$[2\nu - 2\mu - \sqrt{\mu}(\nu + 1)][2\nu - 2\mu + \sqrt{\mu}(\nu + 1)].$$

Поскольку, по предположению, $\nu > \mu$, то это произведение положительно тогда и только тогда, когда

$$\nu > \frac{\sqrt{\mu}(1 + 2\sqrt{\mu})}{2 - \sqrt{\mu}}. \quad (13)$$

Если исходить из прикладных соображений, то величина m – отношение массы СУ к массе маятника – является малой порядка 10^{-1} , величина l_0 имеет порядок единицы. Поэтому неравенство (13) заведомо выполняется (исключая случай "медленных" колебаний основной системы, когда величина ν также мала), что обеспечивает выполнение условия (11).

Таким образом, считая параметры основной системы $\tilde{m}_2, \tilde{l}_2, \tilde{\varkappa}_2$ заданными, с учетом формул (9) получаем задачу о нахождении наибольшего значения функции

$$\Phi(\delta, m, l_0) = \frac{m(1 - \delta)[l_0(\varkappa_2 - 1) + 1]^2}{(1 + ml_0^2\delta)(1 + ml_0^2)(\varkappa_2 - 1 - ml_0)}.$$

Последняя представляет собой выражение σ^2 , отнесенное к l_0 , что объясняется изменением масштаба времени – переходом от $\tilde{\lambda}$ назад к λ . Переменная δ принимает значения из полуоткрытого интервала $[0, 1)$. В силу конструктивных соображений, переменные m, l_0 ограничены сверху некоторыми фиксированными значениями m^*, l_0^* . Нетрудно убедиться в том, что функция Φ не имеет точек экстремума внутри области изменения своих аргументов и принимает наибольшее значение при $\delta = 0, m = m^*, l_0 = l_0^*$. Другими словами, для любых значений аргументов из области

$$0 \leq \delta < 0, \quad 0 < m \leq m^*, \quad 0 < l_0 \leq l_0^*$$

выполняется неравенство

$$\Phi(\delta, m, l_0) = \frac{m(1 - \delta)[l_0(\varkappa_2 - 1) + 1]^2}{(1 + ml_0^2\delta)(1 + ml_0^2)(\varkappa_2 - 1 - ml_0)} \leq \frac{m^*[l_0^*(\varkappa_2 - 1) + 1]^2}{(1 + m^*l_0^{*2})(\varkappa_2 - 1 - m^*l_0^*)}.$$

Отметим, что полученное неравенство является ожидаемым с механической точки зрения – чем больше масса и "плечо" СУ, тем быстрее скорость затухания колебаний. Что же касается коэффициента трения и жесткости СУ, то их оптимальные значения в соответствии с формулами (11), (9), (3) равны

$$h_{\text{опт}} = 2\sqrt{\frac{\tilde{m}\tilde{m}_2(\tilde{m}_2\tilde{l}_2^2 + ml_0^2)}{m_2[\varkappa_2 - g(\tilde{m}_2\tilde{l}_2 + \tilde{m}\tilde{l}_0)]}} \frac{\tilde{l}_2[\tilde{l}_0\tilde{\varkappa}_2 + \tilde{m}_2g\tilde{l}_2(\tilde{l}_2 - \tilde{l}_0)]}{(\tilde{m}_2\tilde{l}_2^2 + \tilde{m}\tilde{l}_0^2)^2}, \quad (14)$$

$$\varkappa_{\text{опт}} = \frac{\tilde{m}_2\tilde{l}_2\tilde{l}_0[\tilde{\varkappa}_2 - g(\tilde{m}_2\tilde{l}_2 + \tilde{m}\tilde{l}_0)]}{g(\tilde{m}_2\tilde{l}_2^2 + \tilde{m}\tilde{l}_0^2)} + \frac{\tilde{m}g\tilde{l}_0}{\tilde{\varkappa}_2 - g(\tilde{m}_2\tilde{l}_2 + \tilde{m}\tilde{l}_0)}.$$

На рис. 2, 3 представлены результаты численного анализа. Так, на рис. 2 изображена поверхность $p(h, \varkappa)$ (при фиксированных значениях $m = 0, 1, \varkappa_2 = 2$).

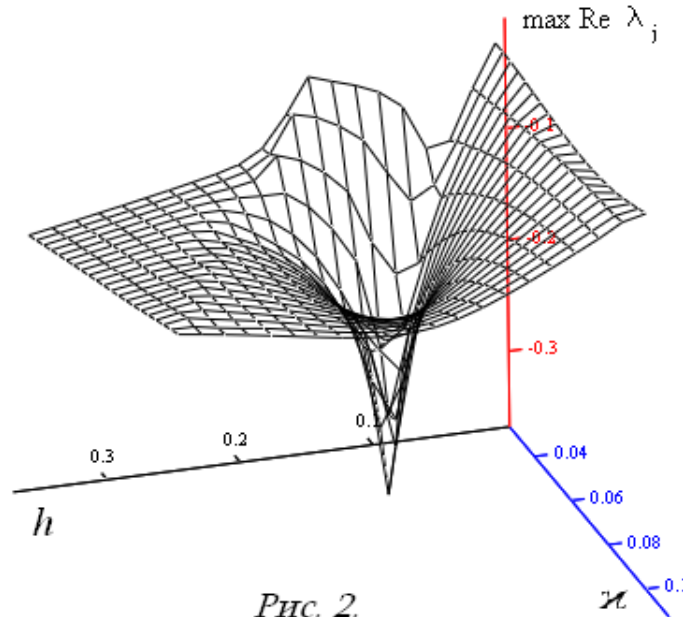


Рис. 2.

Можно видеть, что значение $p = \sigma$ в вершине конусообразной части поверхности, которое соответствует значениям $h_{\text{опт}}$, $\varkappa_{\text{опт}}$, определяемым по формулам (14), существенно меньше, чем для любой другой пары (h, \varkappa) , даже достаточно близкой к $(h_{\text{опт}}, \varkappa_{\text{опт}})$.

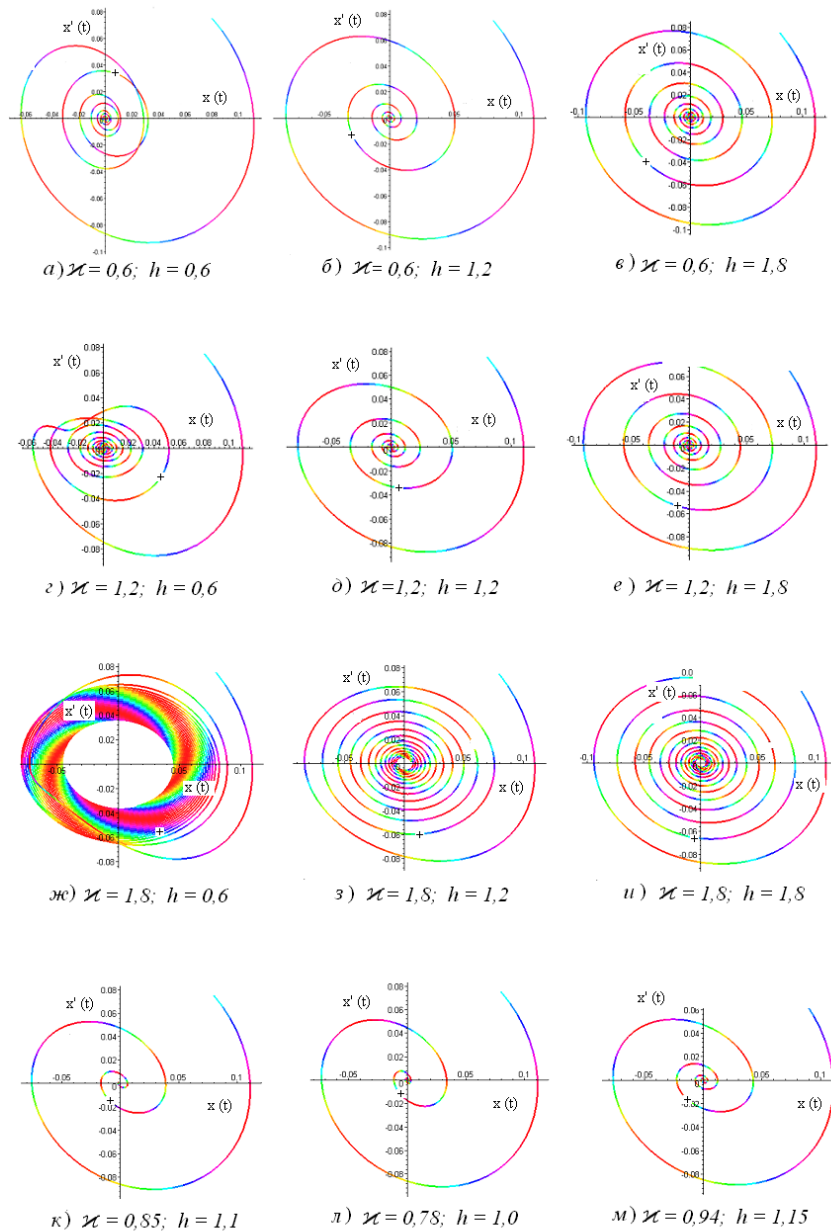


Рис. 3.

На рис. 3 для различных значений величин h, \varkappa представлены траектории в фазовой плоскости x, x' (по основной переменной), характеризующие поведение возмущенного движения для полной нелинейной системы. При этом зафиксированы параметры: \varkappa_2 — приведенная жесткость основной системы, m и l_0 ($\varkappa_2 = 1, m = 10^{-1}, l_0 = 0,9$). Крестиком отмечен момент времени $\tau = 10$. Значениям $h_{\text{опт}}, \varkappa_{\text{опт}}$ соответствует траектория в случае к). Траектории, описывающие движение точки M , выглядят аналогично и на рисунке не представлены.

Замечание. Как можно видеть на рис. 3, в случае m) траектория притягивается к началу даже несколько быстрее, чем для пары значений $(h_{\text{опт}}, \kappa_{\text{опт}})$. Это объясняется следующим обстоятельством. Хотя наименьшее характеристическое число уравнений в вариациях в случае κ) больше наименьшего характеристического числа для случая m), но соответствующие собственные значения при этом кратные. Поэтому имеем две функции $f_1(\tau) = \tau e^{-\sigma\tau}$, $f_2(\tau) = e^{-(\sigma-\varepsilon)\tau}$, и в течение некоторого "переходного" промежутка времени $[0, \tau_*]$ функция f_2 принимает значения меньше, чем f_1 . Здесь $\tau_* \approx 36$, что при порядке величины $\tilde{l}_2 \sim 1$ соответствует временному интервалу порядка 10 с.

Отметим в заключение, что изученная в данном разделе в линейной постановке задача достаточно хорошо описывает ситуацию и для нелинейной системы. На рис. 4

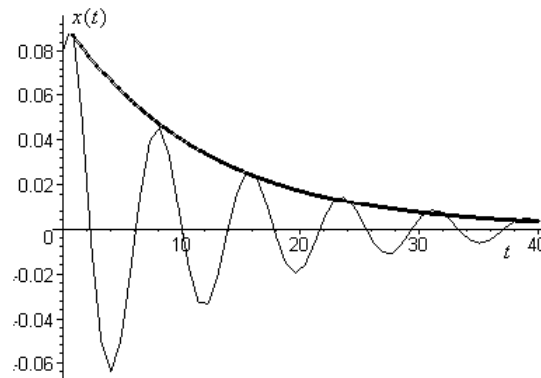


Рис. 4.

представлена траектория $x(\tau)$ и ее огибающая $f(\tau)$. Нетрудно убедиться в том, что кривая $\ln f(\tau)$ представляет собой "почти" прямую – в линейной постановке ей соответствует прямая $f = -\sigma\tau + \text{const}$.

1. Peiffer K., Savchenko A.Ya. On passive stabilization in critical cases // J. of Math. Analysis and Applications. – 2000. – 244. – P. 106-119.
2. Peiffer K., Savchenko A.Ya. On the some asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable // Rend. Acc. Sc. fis. mat. Napoli. – 2000 – LXVII. – P. 157-168.
3. Позднякович А.Е., Савченко А.Я. Пассивная стабилизация малых колебаний физического маятника относительно наклонной оси // Механика твердого тела. – 2003. – Вып. 33. – С. 97-100.
4. Савченко А.Я., Кравченко В.В. О скорости затухания малых колебаний физического маятника в окрестности положения его равновесия в режиме пассивной стабилизации // Там же. – 2004. – Вып. 34. – С. 106-111.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
6. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк

Получено 01.03.06

**Донбасская национальная акад. строительства и архитектуры, Макеевка