ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2006. Вып. 36

УДК 62-50

©2006. **В.Ф. Щербак**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА ГИРОСКОП

Рассматривается вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при действии на него неизвестного момента сил относительно оси, фиксированной в теле. Задача определения величины момента внешней возмущающей силы решается по неполной информации о состоянии системы (известны две компоненты вектора угловой скорости из трех). Предлагается способ синтеза динамического расширения исходной системы, путем введения уравнений ее управляемого прототипа. Управления в дополнительной системе выбираются из условия получения инвариантных соотношений, которые выражают вектор состояния и внешнее воздействие через известный выход и решения расширеной системы. При выполнении условий экспоненциального притяжения траекторий к полученным инвариантным многообразиям эти соотношения рассматриваются как дополнительные алгебраические уравнения для определения неизвестных переменных модели объекта.

1. Сведение задачи восстановления неопределенных переменных математической модели объекта к задаче синтеза инвариантных соотношений. В работе рассматривается задача, связанная с задачами наблюдения и идентификации нелинейных динамических систем по имеющимся измерениям выхода системы. В задачах наблюдения детерминированных систем традиционный подход к решению состоит в определении асимптотической оценки состояния динамической системы по информации о ее выходе. В линейном случае эта задача решается с помощью построения асимптотического наблюдателя Луенбергера [1]. Для нелинейных систем не найдено общего метода построения наблюдателя, хотя выделен ряд классов нелинейных систем, для которых нелинейный наблюдатель существует. Адаптивные асимптотические наблюдатели линейных систем применяются также для идентификации параметров. В настоящей работе используется подход, разработанный для задач наблюдения систем, линейных по неизвестным компонентам фазового вектора [4]. Предлагается способ синтеза динамического расширения исходной системы за счет введения уравнений ее управляемого прототипа. Управления в дополнительной системе выбираются из условия получения инвариантных соотношений, которые выражают вектор состояния и внешнее воздействие через известный выход и решения расширенной системы.

При наличии неопределенностей в описании модели объекта стандартно рассматривается следующая задача наблюдения [2]: требуется асимптотически точно восстановить (оценить) полный фазовый вектор x динамической системы

$$\dot{x} = f(x, d), \quad x(0) = x_0 \in R^n \tag{1}$$

по измерениям ее выхода

$$y = h(x), \quad y \in R^k \tag{2}$$

при неизвестном возмущении $d(t) \in R^m$, удовлетворяющем некоторым естественным ограничениям, гарантирующим, в частности, существование и бесконечную продолжимость решений вправо.

Решение предполагает указание условий разрешимости задачи, а также синтез динамической системы (наблюдателя), которая по известной информации формирует оценку $\tilde{x}(t)$ фазового вектора $x(t)$ такую, что $\tilde{x}(t) - x(t) \to 0, \quad t \to \infty$.

В данной работе задача определения неизвестных величин в математической модели (1) решается путем введения вспомогательой системы

$$\dot{p} = F(p, h(x), u(p, h(x))), \quad p(0) = x_0 \in R^n. \tag{3}$$

Правые части уравнений (3) при подстановке управлений $u(p, h(x))$ не содержат неопределенностей, поэтому далее можем считать, что решение задачи Коши для системы (3) с любым начальным условием $p(t_0) = p_0$ является известной функцией времени.

Рассматривая совместно уравнения (1), (3), получаем систему $2n$ дифференциальных уравнений, зависящих от управлений u указанной структуры. Далее будем предпологать выполненными следующие условия:

а) управления u могут зависеть лишь от известных величин $h(x(t))$ и фазового вектора системы (3) – $p(t)$;

б) для замкнутой системы (3), полученной в результате подстановки функций u, выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши $\forall p(0) \in R^n, t > 0$. Будем называть такие управления допустимыми.

Целью синтеза является построение инвариантного многообразия, описываемого равенствами $\Psi(x, p) = 0$. При наличии у этого многообразия свойства глобального притяжения для всех траекторий системы (1), (3) эти соотношения рассматриваются как дополнительные алгебраические уравнения для определения неизвестных переменных объекта.

2. Определение угловой скорости гироскопа при наличии возмущающего момента сил. Рассмотрим уравнения, описывающие вращение по инерции осесимметричного твердого тела вокруг неподвижной точки, совпадающей с центром тяжести тела. Обозначим через A_1, A_2, A_3 моменты инерции тела относительно главных осей. С учетом $A_1 = A_2$, инерционные характеристики уравнений движения тела определяются величиной $a = (A_1 - A_3)/A_1$. Без ограничения общности, положим $a = 1$. Предполагается, что на тело действует внешняя сила, момент которой расположен в экваториальной плоскости и определен единичным вектором $\mathbf{d} = (\alpha_1, \alpha_2, 0), \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$, фиксированным в теле. Величины α_1, α_2 известны, модуль вектора момента $d(t)$ неопределен и далее будем считать его некоторой функцией времени. Уравнения Эйлера в этом случае имеют вид

$$\dot{x_1} = x_2 x_3 + \alpha_1 d, \quad \dot{x_2} = -x_1 x_3 + \alpha_2 d, \quad \dot{x_3} = 0, \tag{4}$$

где $x(t) = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор угловой скорости тела.

Предположим, что первые две компоненты $x_1(t), x_2(t)$ вектора угловой скорости $x(t)$ известны. Задача состоит в определении по этой информации значения постоянной x_3 и функции $d(t)$.

Расширим исходную систему, для чего составим вспомогательную систему, правые части которой не зависят от возмущений, но содержат дополнительное управление u. Управление является допустимым, т.е. может зависеть от известных компонент вектора угловой скорости $x_1(t), x_2(t)$ и фазового вектора вспомогательной системы $p = (p_1, p_2, p_3)^T : u(x_1, x_2, p)$.

$$\dot{p_1} = a x_2 p_3, \quad \dot{p_2} = -a x_1 p_3, \quad \dot{p_3} = u. \tag{5}$$

Как уже отмечалось, метод связан с получением дополнительных алгебраических соотношений, которые описывают инвариантное многообразие для расширенной системы (4), (5). В частности, будем искать управление $u(x_1, x_2, p)$ таким, чтобы любое соотношение вида

$$p_3 = x_3 + \Phi(x_1, x_2, p), \tag{6}$$

определяемое дифференцируемой функцией $\Phi(x_1, x_2, p)$, являлось инвариантным соотношением, т.е. описывало инвариантное многообразие. Обозначив $e(t) = p_3(t) - x_3$, получаем, что эта величина удовлетворяет уравнению

$$\dot{e} = u(x_1, x_2, p). \tag{7}$$

Сделаем замену переменной e по формуле $e = \Phi(x_1, x_2) + \eta$, где η характеризует отклонение от искомого многообразия. На первом шаге конструирования вспомогательной системы потребуем, чтобы управление u удовлетворяло равенству

$$u = (x_2\Phi_{x_1} - x_1\Phi_{x_2})(p_3 - \Phi). \tag{8}$$

Правая часть (8) не зависит от переменных x_3, e, η, а значить такое управление является допустимым. В новых переменных уравнение (7), с учетом (8), будет иметь вид

$$\dot{\eta} = (x_2\Phi_{x_1} - x_1\Phi_{x_2})\eta - (\alpha_1\Phi_{x_1} + \alpha_2\Phi_{x_2})d, \tag{9}$$

Для невозмущенной системы (4) $(d(t) \equiv 0)$ уравнение (9) является однородным относительно η. А так как $\eta = 0$ является решением, то любое многообразие, определяемое равенством $x_3 = p_3 - \Phi(x_1, x_2, p)$, является инвариантным для системы (3), (4) с управление (8).

Уравнение (9) является линейным относительно отклонения η. Для того, чтобы оно обеспечивало постоянную степень затухания переходного процесса потребуем выполнение условия

$$x_2\Phi_{x_1} - x_1\Phi_{x_2} = -\lambda, \tag{10}$$

где λ положительная константа.

Общее решение уравнения в частных производных первого порядка (10) имеет вид

$$\Phi(x_1, x_2) = -\lambda \operatorname{arctg}(x_1/x_2) + F(x_1^2 + x_2^2), \tag{11}$$

где $F\left(x_1^2 + x_2^2\right)$ – произвольная дифференцируемая функция. В отсутствии возмущений $\dot{\eta}(t) = -\lambda\eta(t)$ и $\eta(t)$ экспоненциально убывает к нулю с показателем затухания λ. Следовательно, в этом случае любое решение системы (5) с управлением (8) по формуле (6) определяет экспоненциальную оценку переменной x_3.

Для исключения влияния возмущений на оценку x_3 достаточно, чтобы множитель при d в уравнении (9) был равен нулю. С этой целью воспользуемся имеющейся возможностью выбора функции $F\left(x_1^2 + x_2^2\right)$. Сделаем замену переменных x_1, x_2:

$$x_1 = \sqrt{z}\sin\theta, \quad x_2 = \sqrt{z}\cos\theta. \tag{12}$$

Тогда $\Phi(z, \theta) = -\lambda\theta + F(z)$, а уравнение $\alpha_1\Phi_{x_1} + \alpha_2\Phi_{x_2} = 0$ преобразуется к виду

$$2\frac{dF(z)}{dz}(tg\theta + \alpha) + \frac{\lambda(\alpha - tg\theta)}{z} = 0, \tag{13}$$

где $\alpha = \alpha_1/\alpha_2$. Интегрируя уравнение (13), получаем формулу для соотношений, определяющих искомое инвариантное многообразие, которое обладает свойством глобального притяжения для всех траекторий расширенной системы. В частности, для $\alpha = 1$ она имеет вид

$$\Phi(z,\theta) = -\lambda\,\theta + \frac{\lambda\,\ln(z)\,(-\cos\theta + \sin\theta)}{2(\sin\theta + \cos\theta)}. \tag{14}$$

3. Оценка модуля момента сил. Строго говоря, полученное выше равенство

$$x_3 = p_3(t) - \Phi(z,\theta) + ({x_3}^0 - {p_3}^0)e^{-\lambda t} \tag{15}$$

не является инвариантным соотношением между перемными системы (4), (5), поскольку отличается от него на величину $(p_3(0) - x_3)\exp(-\lambda t)$. Но так как рассогласование убывает со временем по экспоненциальному закону, то его можно рассматривать как формулу, определяющую экспоненциальную оценку неизвестной компоненты угловой скорости x_3. Метод инвариантных соотношений в обратных задачах управления [3] основан на построении системы алгебраических связей между переменными системы, получаемых в результате последовательного дифференцирования в силу рассматриваемой системы уравнений одного из них. С учетом того, что (15) отличается от искомого соотношения на величну $Ce^{-\lambda t}$ где C – константа, этим свойством будет обладать и выражение, полученное в результате дифференцирования (15) в силу системы (4), (5). Если при этом полученное выражение будет явно зависеть от величины возмущающего момента, то тем самым оно может быть использовано для получения оценки этой величины.

Легко видеть, что производная от (15) содержит неизвестную величину момента возмущающей силы $d(t)$. В частности, при $\alpha = 1$ производная (15) в силу системы (4), (5) приводится к виду

$$d\,(t)\,(\sin\theta - \sin 3\,\theta - \cos\theta - \cos 3\,\theta) = 2\,p_3(t)\,\sqrt{z}\,(1 - \sin 2\,\theta + \ln(z)) \tag{16}$$

Как и формула (15), полученное выражение отличается от тождественного равенства на величину порядка $O(e^{-\lambda t})$. Следовательно, (16) может быть использовано для получения экспоненциальных оценок модуля вектора внешних возмущений $d(t)$.

1. *Luenberger D.* Introduction to observers //IEEE Trans. Aut. Contr. – 1977. – **3**. – P. 47-52.
2. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В., Хлавенка А.* Наблюдатели для линейных динамических систем с неопределенностью // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 11. – С. 1443-1457.
3. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 285 с.
4. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Механика тведого тела. – 2004. – **33**, – С. 197 -216.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
`shvf@iamm.ac.donetsk.ua`

Получено 11.04.06