УДК 531.38

©2006. **Е.К. Щетинина**

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИЗОКОНИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ГИРОСТАТА В СЛУЧАЕ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА

Проведен анализ условий существования изоконических движений гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил при условии, что уравнения Кирхгофа допускают три линейных инвариантных соотношения, а инвариантное соотношение изоконичности является следствием интеграла момента количества движения.

Введение. Изоконические движения гиростата с неподвижной точкой – движения, для которых подвижный и неподвижный годографы вектора угловой скорости симметричны друг другу относительно касательной к ним плоскости [1, 2]. Эти движения выявлены в результате систематического применения метода годографов, основанного на уравнениях П.В. Харламова [3]. Обзор результатов, полученных в кинематическом истолковании движения гиростата в частных случаях интегрируемости уравнений динамики твердого тела, изложен в книге [4]. Препринт [5] посвящен анализу всех известных к тому времени изоконических движений гиростата с неподвижной точкой. В работах [1, 2] изучены изоконические движения гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил в случае, когда дифференциальные уравнения Кирхгофа (различные представления этих уравнений даны в [6]) допускают три линейных инвариантных соотношения, а инвариантное соотношение изоконичности движения при учете в нем линейных инвариантных соотношений приводится к геометрическому интегралу. В данной статье рассмотрен вариант, для которого инвариантное соотношение изоконичности движения линейно зависит от интеграла момента количества движения.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил, которая описывается дифференциальными уравнениями класса Г. Кирхгофа [6, 7]

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\times a\mathbf{x} + a\mathbf{x}\times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times(C\boldsymbol{\nu}-\mathbf{s}), \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}\times a\mathbf{x}, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ – вектор момента количества движения гиростата; $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силового поля; $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ – гиростатический момент, характеризующий движение носимых тел; $\mathbf{s}=(s_1,s_2,s_3)$ – вектор, сонаправленный с вектором обобщенного центра масс; $a=\mathrm{diag}(a_1,a_2,a_3)$ – гирационный тензор инерции, вычисленный в неподвижной точке; $B=(B_{ij})$, $C=(C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка; точка над переменными обозначает относительную производную по времени t. Уравнения (1), (2) имеют первые интегралы

$$(\mathbf{x}\cdot a\mathbf{x}) - 2(\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\nu}) + (C\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 2E, \quad (\mathbf{x}+\boldsymbol{\lambda})\cdot\boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2}(B\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}) = k, \quad \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\nu}=1. \tag{3}$$

Здесь E и k – произвольные постоянные.

Необходимым и достаточным условием существования изоконического движения гиростата является инвариантное соотношение [5]

$$\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\nu} - \mathbf{e}) = 0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega} = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3)$ – вектор угловой скорости гиростата, $\mathbf{e}$ – единичный вектор, неизменно связанный с телом.

Поставим задачу изучения условий существования у дифференциальных уравнений (1), (2) инвариантного соотношения (4) при условии, что уравнения (1), (2) допускают три линейных инвариантных соотношения

$$\begin{gathered} x_1 = b_0 + b_1\nu_1 + b_2\nu_2 + b_3\nu_3, \\ x_2 = c_0 + c_1\nu_1 + c_2\nu_2 + c_3\nu_3, \\ x_3 = d_0 + d_1\nu_1 + d_2\nu_2 + d_3\nu_3. \end{gathered} \tag{5}$$

Следуя работе [8], считаем, что условиями существования инвариантных соотношений (5) у системы (1), (2) являются равенства [8]

$$\begin{gathered} a_3d_0\beta_2 - a_2c_0\beta_3 = 0, \quad a_2c_0\beta_{13} - a_3d_0\beta_{12} + a_3d_1\beta_2 - a_2c_1\beta_3 = 0, \\ a_2c_0\beta_{23} - a_3d_0\beta_{22} + a_3d_2\beta_2 - a_2c_2\beta_3 + \gamma_3 = 0, \\ a_2c_0\beta_{33} - a_3d_0\beta_{23} + a_3d_3\beta_2 - a_2c_2\beta_3 - \gamma_2 = 0, \\ a_2c_1\beta_{13} - a_3d_1\beta_{12} = 0, \quad a_2c_2\beta_{23} - a_3d_2\beta_{22} + \gamma_{23} = 0, \\ a_2c_3\beta_{33} - a_3d_3\beta_{23} - \gamma_{23} = 0, \\ a_2c_1\beta_{23} + a_2c_2\beta_{13} - a_3d_2\beta_{12} - a_3d_1\beta_{22} + \gamma_{13} = 0, \\ a_2c_1\beta_{33} + a_2c_3\beta_{13} - a_3d_1\beta_{23} - a_3d_3\beta_{12} - \gamma_{12} = 0, \\ a_2c_2\beta_{33} + (a_2c_3 - a_3d_2)\beta_{23} - a_3d_3\beta_{22} + \gamma_{33} - \gamma_{22} = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} a_1b_0\beta_3 - a_3d_0\beta_1 = 0, \quad a_3d_0\beta_{11} - a_1b_0\beta_{13} + a_1b_1\beta_3 - a_3d_1\beta_1 - \gamma_3 = 0, \\ a_3d_0\beta_{12} - a_1b_0\beta_{23} + a_1b_2\beta_3 - a_3d_2\beta_1 = 0, \\ a_3d_0\beta_{13} - a_1b_0\beta_{33} + a_1b_3\beta_3 - a_3d_3\beta_1 + \gamma_1 = 0, \\ a_3d_1\beta_{11} - a_1b_1\beta_{13} - \gamma_{13} = 0, \quad a_3d_2\beta_{12} - a_1b_2\beta_{23} = 0, \\ a_3d_3\beta_{13} - a_1b_3\beta_{33} + \gamma_{13} = 0, \quad a_3d_1\beta_{12} + a_3d_2\beta_{11} - a_1b_1\beta_{23} - a_1b_2\beta_{13} - \gamma_{23} = 0, \\ a_3d_1\beta_{13} + a_3d_3\beta_{11} - a_1b_1\beta_{13} - a_1b_3\beta_{13} + \gamma_{11} - \gamma_{33} = 0, \\ a_3d_2\beta_{13} + a_3d_3\beta_{12} - a_1b_2\beta_{33} - a_1b_3\beta_{23} + \gamma_{12} = 0, \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} a_2c_0\beta_1 - a_1b_0\beta_2 = 0, \quad a_1b_0\beta_{12} - a_2c_0\beta_2 - a_1b_1\beta_2 + a_2b_2\beta_1 + \gamma_2 = 0, \\ a_1b_0\beta_{22} - a_2c_0\beta_{12} + a_2c_2\beta_1 - a_1b_2\beta_2 - \gamma_1 = 0, \\ a_1b_0\beta_{23} - a_2c_0\beta_{13} + a_2c_3\beta_1 - a_1b_3\beta_2 = 0, \end{gathered}$$

$$a_1b_1\beta_{12} - a_2c_1\beta_{11} + \gamma_{12} = 0, \quad a_1b_2\beta_{22} - a_2c_2\beta_{12} - \gamma_{12} = 0, \tag{8}$$
$$a_1b_3\beta_{23} - a_2c_3\beta_{13} = 0, \quad a_1b_1\beta_{22} + (a_1b_2 - a_2c_1)\beta_{12} - a_2c_2\beta_{11} - \gamma_{11} + \gamma_{22} = 0,$$
$$a_1b_1\beta_{23} + a_1b_3\beta_{12} - a_2c_1\beta_{13} - a_2c_3\beta_{11} + \gamma_{23} = 0,$$
$$a_1b_2\beta_{23} + a_1b_3\beta_{22} - a_2c_2\beta_{13} - a_2c_3\beta_{12} - \gamma_{13} = 0.$$

Отметим, что каждая из систем (6) – (8) содержит по десять уравнений.

В (6)–(8) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = b_0 + \lambda_1, \ \ \beta_2 = c_0 + \lambda_2, \ \ \beta_3 = d_0 + \lambda_3, \ \ \beta_{11} = B_{11} - b_1 + c_2 + d_3,\\
&\beta_{12} = B_{12} - b_2 - c_1, \ \ \beta_{13} = B_{13} - b_3 - d_1, \ \ \beta_{23} = B_{23} - c_3 - d_2,\\
&\beta_{22} = B_{22} + b_1 - c_2 + d_3, \ \ \beta_{33} = B_{33} + b_1 + c_2 - d_3,\\
&\gamma_1 = a_1b_0b_1 + a_2c_0c_1 + a_3d_0d_1 - s_1, \ \ \gamma_2 = a_1b_0b_2 + a_2c_0c_2 + a_3d_0d_2 - s_2,\\
&\gamma_3 = a_1b_0b_3 + a_2c_0c_3 + a_3d_0d_3 - s_3, \ \ \gamma_{11} = C_{11} + a_1b_1^2 + a_2c_1^2 + a_3d_1^2,\\
&\gamma_{12} = C_{12} + a_1b_1b_2 + a_2c_1c_2 + a_3d_1d_2, \ \ \gamma_{13} = C_{13} + a_1b_1b_3 + a_2c_1c_3 + a_3d_1d_3,\\
&\gamma_{22} = C_{22} + a_1b_2^2 + a_2c_2^2 + a_3d_2^2, \ \ \gamma_{23} = C_{23} + a_1b_2b_3 + a_2c_2c_3 + a_3d_2d_3,\\
&\gamma_{33} = C_{33} + a_1b_3^2 + a_2c_3^2 + a_3d_3^2.
\end{aligned} \tag{9}$$

Первые интегралы (3) на инвариантных соотношениях (5) примут вид

$$2\gamma_1\nu_1 + 2\gamma_2\nu_1 + 2\gamma_3\nu_3 + \gamma_{11}\nu_1^2 + \gamma_{22}\nu_2^2 + \gamma_{33}\nu_3^2 + 2\gamma_{12}\nu_1\nu_2 + 2\gamma_{13}\nu_1\nu_3 + 2\gamma_{23}\nu_2\nu_3 = 2E_*, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&2\beta_1\nu_1 + 2\beta_2\nu_2 + 2\beta_3\nu_3 - (\beta_{11}\nu_1^2 + \beta_{22}\nu_2^2 + \beta_{33}\nu_3^2 + 2\beta_{12}\nu_1\nu_2 +\\ &+2\beta_{13}\nu_1\nu_3 + 2\beta_{23}\nu_2\nu_3) = 2k_*,\end{aligned} \tag{11}$$

$$\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = 1. \tag{12}$$

Здесь E_* и k_* – новые произвольные постоянные, $2E_* = 2E - a_1b_0^2 - a_2c_0^2 - a_3d_0^2$, $2k_* = 2k - (b_1 + c_2 + d_3)$. Звездочку в дальнейшем опускаем.

Распишем условие изоконичности (4) при наличии инвариантных соотношений (5)

$$\begin{aligned}&(a_1b_0 - a_1b_1e_1 - a_2c_1e_2 - a_3d_1e_3)\nu_1 + (a_2c_0 - a_1b_2e_1 - a_2c_2e_2 -\\
&-a_3d_2e_3)\nu_2 + (a_3d_0 - a_1b_3e_1 - a_2c_3e_2 - a_3d_3e_3)\nu_3 + a_1b_1\nu_1^2 + a_2c_2\nu_2^2 +\\
&+a_3d_3\nu_3^2 + (a_1b_2 + a_2c_1)\nu_1\nu_2 + (a_1b_3 + a_3d_1)\nu_1\nu_3 + (a_2c_3 + a_3d_2)\nu_2\nu_3 -\\
&-(a_1b_0e_1 + a_2c_0e_2 + a_3d_0e_3) = 0.\end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку динамические уравнения (1) рассмотрены, то необходимо изучить условия существования решений уравнения Пуассона (2) при наличии соотношений (5), (13). Запишем уравнение (2) с учетом (5), (13):

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times G_c\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times G_{ac}\boldsymbol{\nu}, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{m} = -(a_1b_0, \ a_2c_0, \ a_3d_0), \tag{15}$$

$$G_c = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} \end{pmatrix}, \qquad G_{ac} = \begin{pmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ -g_1 & 0 & g_3 \\ -g_2 & -g_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$
\begin{aligned}
&g_{11} = a_1 b_1, \quad g_{22} = a_2 c_2, \quad g_{33} = a_3 d_3, \\
&g_{12} = \frac{a_1 b_2 + a_2 c_1}{2}, \quad g_{13} = \frac{a_1 b_3 + a_3 d_1}{2}, \quad g_{23} = \frac{a_2 c_3 + a_3 d_2}{2}, \\
&g_1 = \frac{a_1 b_2 - a_2 c_1}{2}, \quad g_2 = \frac{a_1 b_3 - a_3 d_1}{2}, \quad g_3 = \frac{a_2 c_3 - a_3 d_2}{2}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Условия существования изоконических движений. Первые интегралы (10), (11) уравнений (14) зависимы, что вытекает из условий существования (6)–(8). В работах [1, 2] изучен случай, когда соотношение (13) является либо тождеством по ν_i , либо следствием интеграла (12). В данной работе рассмотрим случай, для которого выполняется условие зависимости соотношений (11), (13). Будем считать, что движение гиростата не является прецессионным и поэтому предположим, что соотношения (11), (13) линейно зависимы.

Исключим в системах (6)–(8) параметры γ_i, γ_{ij}. Тогда получим следующую систему равенств

$$
a_3 d_0 \beta_2 - a_2 c_0 \beta_3 = 0, \quad a_1 b_0 \beta_3 - a_3 d_0 \beta_1 = 0, \quad a_2 c_0 \beta_1 - a_1 b_0 \beta_2 = 0, \tag{18}
$$

$$
a_2 c_1 \beta_{13} - a_3 d_1 \beta_{12} = 0, \quad a_3 d_2 \beta_{12} - a_1 b_2 \beta_{23} = 0, \quad a_1 b_3 \beta_{23} - a_2 c_3 \beta_{13} = 0, \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2 c_0 \beta_{13} - a_3 d_0 \beta_{12} = a_2 c_1 \beta_3 - a_3 d_1 \beta_2, \quad a_3 d_0 \beta_{12} - a_1 b_0 \beta_{23} = a_3 d_2 \beta_1 - a_1 b_2 \beta_3, \\
&a_1 b_0 \beta_{23} - a_2 c_0 \beta_{13} = a_1 b_3 \beta_2 - a_2 c_3 \beta_1,
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_1 b_0 (\beta_{33} - \beta_{22}) - a_3 d_0 \beta_{13} + a_2 c_0 \beta_{12} + (a_3 d_3 - a_2 c_2) \beta_1 + a_1 (b_2 \beta_2 - b_3 \beta_3) = 0, \\
&a_2 c_0 (\beta_{33} - \beta_{11}) - a_3 d_0 \beta_{23} + a_1 b_0 \beta_{12} + (a_3 d_3 - a_1 b_1) \beta_2 + a_2 (c_1 \beta_1 - c_3 \beta_3) = 0, \\
&a_3 d_0 (\beta_{22} - \beta_{11}) - a_2 c_0 \beta_{23} + a_1 b_0 \beta_{13} + (a_2 c_2 - a_1 b_1) \beta_3 + a_3 (d_1 \beta_1 - d_2 \beta_2) = 0,
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_2 c_1 (\beta_{33} - \beta_{11}) + (a_1 b_3 - a_3 d_1) \beta_{23} + (a_1 b_1 - a_3 d_3) \beta_{12} = 0, \\
&a_1 b_2 (\beta_{33} - \beta_{22}) + (a_2 c_3 - a_3 d_2) \beta_{13} + (a_2 c_2 - a_3 d_3) \beta_{12} = 0, \\
&a_3 d_2 (\beta_{11} - \beta_{22}) + (a_2 c_1 - a_1 b_2) \beta_{13} + (a_3 c_3 - a_1 b_1) \beta_{23} = 0, \\
&a_2 c_3 (\beta_{11} - \beta_{33}) + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \beta_{12} + (a_3 d_3 - a_1 b_1) \beta_{23} = 0, \\
&a_3 d_1 (\beta_{22} - \beta_{11}) + (a_1 b_2 - a_2 c_1) \beta_{23} + (a_1 b_1 - a_2 c_2) \beta_{13} = 0, \\
&a_1 b_3 (\beta_{22} - \beta_{33}) + (a_3 d_2 - a_2 c_3) \beta_{12} + (a_3 d_3 - a_2 c_2) \beta_{13} = 0,
\end{aligned} \tag{22}
$$

$$
\begin{aligned}
&(a_3 d_2 - a_2 c_3) \beta_{11} + a_1 (b_3 \beta_{12} - b_2 \beta_{13}) = 0, \\
&(a_1 b_3 - a_3 d_1) \beta_{22} + a_2 (c_1 \beta_{23} - c_3 \beta_{12}) = 0, \\
&(a_2 c_1 - a_1 b_2) \beta_{33} + a_3 (d_2 \beta_{13} - d_1 \beta_{23}) = 0,
\end{aligned} \tag{23}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_1 b_1 (\beta_{22} - \beta_{33}) + a_2 c_2 (\beta_{33} - \beta_{11}) + a_3 d_3 (\beta_{11} - \beta_{22}) + (a_1 b_2 - a_2 c_1) \beta_{12} + \\
&+ (a_3 d_1 - a_1 b_3) \beta_{13} + (a_2 c_3 - a_3 d_2) \beta_{23} = 0.
\end{aligned} \tag{24}
$$

Запишем условия линейной зависимости соотношений (11), (13)

$$\begin{aligned}
&(a_1b_0 - a_1b_1e_1 - a_2c_1e_2 - a_3d_1e_3)\chi_0 = 2\beta_1,\\
&(a_2c_0 - a_1b_2e_1 - a_2c_2e_2 - a_3d_2e_3)\chi_0 = 2\beta_2,\\
&(a_3d_0 - a_1b_3e_1 - a_2c_3e_2 - a_3d_3e_3)\chi_0 = 2\beta_3,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
&(a_1b_2 + a_2c_1)\chi_0 = -2\beta_{12}, \quad (a_1b_3 + a_3d_1)\chi_0 = -2\beta_{13},\\
&(a_2c_3 + a_3d_2)\chi_0 = -2\beta_{23},
\end{aligned} \tag{26}$$

$$a_1b_1\chi_0 = -\beta_{11}, \quad a_2c_2\chi_0 = -\beta_{22}, \quad a_3d_3\chi_0 = -\beta_{33}, \tag{27}$$

$$(a_1b_0e_1 + a_2c_0e_2 + a_3d_0e_3)\chi_0 = 2k,$$

где χ_0 – некоторый параметр, подлежащий определению.

Исключая в соотношениях (26) параметр χ_0 и используя системы уравнений (19), (23), получим условия

$$(a_3d_2 - a_2c_3)\beta_{11} = 0, \quad (a_3d_1 - a_1b_3)\beta_{22} = 0, \quad (a_2c_1 - a_1b_2)\beta_{33} = 0. \tag{28}$$

Соотношениям (28) удовлетворим, положив

$$a_2c_1 - a_1b_2 = 0, \quad a_3d_1 - a_1b_3 = 0, \quad a_3d_2 - a_2c_3 = 0. \tag{29}$$

Тогда из (16), (17) вытекает, что $G_{ac} = 0$. Из уравнения (14) следует

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times G_c\boldsymbol{\nu}. \tag{30}$$

Целесообразность изучения случая (29) состоит в том, что он принципиально отличается от случаев [1, 2], для которых выполняются условия $G_{ac} \neq 0$ и G_c – диагональная матрица.

Принимая во внимание равенства (27), (29), из систем (18)–(24) получим следующее решение

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = a_1b_0\chi_0, && \beta_2 = a_2c_0\chi_0, && \beta_3 = a_3d_0\chi_0,\\
&\beta_{12} = -a_1b_2\chi_0, && \beta_{13} = -a_1b_3\chi_0, && \beta_{23} = -a_2c_3\chi_0,\\
&\beta_{11} = -a_1b_1\chi_0, && \beta_{22} = -a_2c_2\chi_0, && \beta_{33} = -a_3d_3\chi_0.
\end{aligned} \tag{31}$$

На основании обозначений (9) из условий (29) и системы (31) вытекают следующие значения параметров инвариантных соотношений (5):

$$\begin{aligned}
&b_1 = \frac{1}{\Delta}[\chi_0(a_2a_3\chi_0 - a_2 - a_3)B_{11} + (2 - a_3\chi_0)B_{22} + (2 - a_2\chi_0)B_{33}],\\
&b_2 = \frac{a_2B_{12}}{a_1 + a_2 - a_1a_2\chi_0}, \quad b_3 = \frac{a_3B_{13}}{a_1 + a_3 - a_1a_3\chi_0}, \quad b_0 = \frac{-\lambda_1}{1 - a_1\chi_0}, \qquad c_0 = \frac{-\lambda_2}{1 - a_2\chi_0},\\
&c_1 = \frac{a_1b_2}{a_2}, \qquad c_2 = \frac{1}{\Delta}[(2 - a_3\chi_0)B_{11} + \chi_0(a_1a_3\chi_0 - a_1 - a_3)B_{22} + (2 - a_1\chi_0)B_{33}],\\
&c_3 = \frac{a_3B_{23}}{a_2 + a_3 - a_2a_3\chi_0}, \qquad d_1 = \frac{a_1b_3}{a_3}, \qquad d_2 = \frac{a_2c_3}{a_3}, \qquad d_0 = \frac{-\lambda_3}{1 - a_3\chi_0},\\
&d_3 = \frac{1}{\Delta}[(2 - a_2\chi_0)B_{11} + (2 - a_1\chi_0)B_{22} + \chi_0(a_1a_2\chi_0 - a_1 - a_2)B_{33}],
\end{aligned} \tag{32}$$

где
$$\Delta = -a_1a_2a_3\chi_0^3 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)\chi_0^2 - 4. \tag{33}$$
В силу (27) и трех первых уравнений системы (31) для определения компонент e_1, e_2, e_3 из системы (25) имеем условия

$$\begin{aligned} a_1b_1e_1 + a_1b_2e_2 + a_1b_3e_3 &= -a_1b_0, \\ a_1b_2e_1 + a_2c_2e_2 + a_2c_3e_3 &= -a_2c_0, \\ a_1b_3e_1 + a_2c_3e_2 + a_3d_3e_3 &= -a_3d_0. \end{aligned} \tag{34}$$

Подставив выражения (31) в соотношения (6)–(8), получим равенства $\gamma_3 = \gamma_2 = \gamma_1 = 0$, $\gamma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $\gamma_{33} = \gamma_{22} = \gamma_{11}$, т. е. в рассматриваемом случае изоконических движений интеграл энергии (10) вырождается в геометрический интеграл (12). На основании обозначений (9) для параметров задачи имеем

$$\begin{aligned} &s_1 = a_1b_0b_1 + a_2c_0c_1 + a_3d_0d_1, && s_2 = a_1b_0b_2 + a_2c_0c_2 + a_3d_0d_2, \\ &s_3 = a_1b_0b_3 + a_2c_0c_3 + a_3d_0d_3, && C_{12} = -(a_1b_1b_2 + a_2c_1c_2 + a_3d_1d_2), \\ &C_{13} = -(a_1b_1b_3 + a_2c_1c_3 + a_3d_1d_3), && C_{23} = -(a_1b_2b_3 + a_2c_2c_3 + a_3d_2d_3), \end{aligned} \tag{35}$$

$$C_{22}-C_{11} = a_1(b_1^2-b_2^2)+a_2(c_1^2-c_2^2)+a_3(d_1^2-d_2^2), \;\; C_{33}-C_{22} = a_1(b_2^2-b_3^2)+a_2(c_2^2-c_3^2)+a_3(d_2^2-d_3^2).$$

Условия (35) с учетом равенств (32), (33) являются условиями существования изоконических движений гиростата, описываемых уравнениями (1), (2). Запишем уравнения (34) в виде
$$G_c\mathbf{e} = \mathbf{m}. \tag{36}$$
Из уравнения (36) можно найти вектор $\mathbf{e} : \mathbf{e} = G_c^{-1}\mathbf{m}$. Здесь, естественно, предполагается выполнение условия невырожденности матрицы G_c: $\det G_c \neq 0$.

Условие $|\mathbf{e}| = 1$ позволяет определить параметр χ_0, входящий в выражения параметров линейных инвариантных соотношений (32). Поскольку получается алгебраическое уравнение на χ_0 18-й степени, поэтому представим это условие в виде

$$\sum_{i,j=1}^{3} \varphi_{ij}(a_i, \chi_0, B_{ij})\lambda_i\lambda_j = 1, \tag{37}$$

где функции $\varphi_{ij}(a_i, \chi_0, B_{ij})$ не выписываем из-за их громоздкости. Если в уравнении (37) считать параметры a_i, χ_0, B_{ij} фиксированными, то в силу того, что компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}$ могут принимать произвольные значения, можно сделать вывод о разрешимости условия (37).

Таким образом, условиями существования изоконических движений рассматриваемого класса являются условия (32), (33), (35) и (37).

Рассмотрим уравнение (30). Это векторное уравнение имеет два первых интеграла (11), (12) и поэтому его интегрирование сводится к квадратурам.

Если воспользоваться соотношениями (5), (10), (12), а также равенствами $\omega_i = a_ix_i$, то из них можно получить два уравнения на компоненты вектора угловой скорости

$$[G_c^{-1}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m})]^2 = 1, \qquad 2[\boldsymbol{\beta} \cdot G_c^{-1}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m})] - DG_c^{-1}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}) \cdot G_c^{-1}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{m}) = 2k,$$

где $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $D = (\beta_{ij})$ $(i, j = \overline{1, 3})$. Из структуры полученных уравнений следует, что подвижный годограф является линией пересечения двух поверхностей второго порядка.

Так, например, в частном случае $B_{11} = B_{22} = B_{33} = b_1$, $B_{12} = B_{13} = B_{23} = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\chi_0 = \dfrac{a_2 + a_3}{a_2 a_3}$, $a_1 > a_2$, $a_1 > a_3$, при этом $\lambda_3 = -\dfrac{b\mu_0}{a_2(a_2 - a_3)}$, геометрический интеграл (12) и интеграл моментов количества движения (11) определяют в пространстве две поверхности второго порядка

$$\frac{\omega_1^2}{(a_1 b)^2} + \frac{\omega_2^2}{\left(\dfrac{\mu_0 b}{a_2 - a_3}\right)^2} + \frac{[(a_2 - a_3)\omega_3 + \mu_0 b]^2}{(\mu_0 b)^2} = 1,$$

$$\omega_1^2 \mu_0 + a_1(a_2 - a_3)\omega_2^2 + a_1(a_3 - a_2)\omega_3^2 = 0,$$

где $\mu_0 = a_1 a_2 + a_1 a_3 - 2a_2 a_3$. Пересечение этих поверхностей и определяет подвижный годограф.

Этим свойством в силу изоконичности обладает и неподвижный годограф вектора угловой скорости. Полученный в данной работе результат существенно отличается от результатов [1, 2], так как подвижный и неподвижный годографы не являются плоскими кривыми.

1. *Горр Г.В., Саркисьянц Е.В., Скрыпник С.В.* Об изоконических движениях тела в случае трех линейных инвариантных соотношений // Механика твердого тела. – 2000. – Вып.30. – С.93-99.
2. *Горр Г.В.* Об одном классе прецессионно-изоконических движений тела под действием потенциальных и гироскопических сил // Там же. – 2001. – Вып.31. – С.30-35.
3. *Харламов П.В.* Кинематическое истолкование движения тела, имеющего неподвижную точку // Прикл. математика и механика. – 1964. – **28**, вып. 3. – С. 502-507.
4. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296с.
5. *Горр Г.В., Саркисьянц Е.В., Узбек Е.К.* Изоконические движения в динамике твердого тела с неподвижной точкой. – Донецк, 2001. – 30 с. – (Препринт / НАН Украины Ин-т прикл. математики и механики; № 03.01).
6. *Харламов П.В., Мозалевская Г.В., Лесина М.Е.* О различных представлениях уравнений Кирхгофа //Механика твердого тела. – 2001. – Вып. 31. – С. 3-17.
7. *Yehia H.M.* On the motion of a rigid body acted upon by potential and gyroscopic forces // J. Teor. and Appl. Mech. – 1986. – **5**, № 5. – P. 755-762.
8. *Горр Г.В., Узбек Е.К.* Дробно-линейный интеграл уравнений Пуассона в случае трех линейных инвариантных соотношений // Междунар. ИФНА-АНН ж. Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2004. – **10**, № 2(21). – С. 54-71.

Донецкий национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского

Получено 05.06.06