ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2006. Вып. 36

УДК 531.38

©2006. **М.П. Харламов**

ОСОБЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО СЛУЧАЯ ДЕЛОНЕ

Рассматривается аналог случая Делоне для задачи о вращении волчка Ковалевской в двойном силовом поле. Уравнения движения на инвариантном многообразии, указанном О.И. Богоявленским, представляют собой вполне интегрируемую гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Множество точек зависимости двух первых интегралов состоит из трех однопараметрических семейств периодических траекторий. Для этих решений все фазовые переменные алгебраически выражены через одну вспомогательную переменную, зависимость которой от времени находится в эллиптических функциях. Исследованы условия вещественности решений и количество траекторий для всех значений параметров. Для примера выполнено полное интегрирование в функциях Якоби на одном из семейств.

Введение. В интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе множество точек фазового пространства, на котором ранг интегрального отображения равен единице, состоит из особых периодических решений и, при наличии на соответствующем уровне энергии критических точек гамильтониана, бифуркаций периодических решений – траекторий, двоякоасимптотических к положениям равновесия. В работе [1] такие траектории полностью перечислены для задачи о движении волчка типа Ковалевской в двойном постоянном силовом поле. Это дало возможность найти граничные условия для двумерных листов бифуркационной диаграммы трех первых интегралов в инволюции. Оказалось, что в предположении $K \neq 0$, где K – первый интеграл, указанный О.И. Богоявленским [2] и обобщающий интеграл Ковалевской [3], множество таких траекторий полностью исчерпывается шестью семействами маятниковых движений тела, отмеченными в [4] (см. также формулы (6)–(8) работы [1]). Соответствующие зависимости всех фазовых переменных от времени легко выписываются в эллиптических функциях.

В предлагаемой работе, для завершения полного описания особых периодических траекторий рассматриваемой задачи, выполнено явное интегрирование уравнений движения волчка для периодических решений случая $K = 0$.

Эти решения в контексте топологического анализа случая О.И. Богоявленского обнаружены и классифицированы Д.Б. Зотьевым. В работах [5, 6] приведены их уравнения в некоторой специальной системе локальных координат на многообразии $\{K = 0\}$ (координаты выражены через одну переменную ρ – квадрат модуля проекции кинетического момента на экваториальную плоскость тела), содержащие четыре физических константы исходной задачи, две постоянные первых интегралов, связанные между собой неявным полиномиальным уравнением высокой степени, и ряд промежуточных констант, зависящих от уже перечисленных. Указанные уравнения неалгебраические, и выражения специальных координат содержат обратные тригонометрические функции. Несмотря на это, Д.Б. Зотьеву удалось найти образ периодических траекторий на плоскости (ρ, y) (через y обозначена величина потенциальной энергии, взятая с обратным знаком), аналитически исследовать условия их существования, количество и характер устойчивости для всех кривых бифуркационной диаграммы ограничения гамильтоновой системы на нулевой уровень интеграла K. Выражения для исходных фазовых переменных через ρ на этих траекториях автор не выписывает, хотя из сопоставления формул видно, что они должны получиться алгебраическими. Характер зависимости ρ от времени в цитированных работах также не изучался, дифференциальное уравнение, определяющее эту зависимость, не приведено.

Очевидно, однако, что при фиксированных физических характеристиках тела и силовых полей эти движения организованы в однопараметрические семейства и должны фактически содержать лишь один произвольный параметр. Сама же исходная задача путем подходящего выбора базисов и единиц измерения приводится к системе с двумя физическими параметрами [4], в качестве которых выступают модули a, b векторов напряженностей силовых полей, приведенных к ортогональной паре. При этом один из них, в свою очередь, может быть принят за единицу измерения (ниже это не делается для сохранения определенных правил контроля размерностей). Поэтому желательно, сохраняя без ограничения общности лишь существенные параметры, получить достаточно простые алгебраические выражения исходных фазовых переменных через вспомогательную, зависимость которой от времени выражается стандартными эллиптическими функциями.

1. Предварительные сведения. Уравнения движения волчка Ковалевской в двойном силовом поле

$$\begin{gathered}
2\dot\omega_1 = \omega_2\omega_3 + \beta_3, \qquad 2\dot\omega_2 = -\omega_1\omega_3 - \alpha_3, \qquad \dot\omega_3 = \alpha_2 - \beta_1,\\
\dot\alpha_1 = \alpha_2\omega_3 - \alpha_3\omega_2, \qquad \dot\beta_1 = \beta_2\omega_3 - \beta_3\omega_2,\\
\dot\alpha_2 = \alpha_3\omega_1 - \alpha_1\omega_3, \qquad \dot\beta_2 = \beta_3\omega_1 - \beta_1\omega_3,\\
\dot\alpha_3 = \alpha_1\omega_2 - \alpha_2\omega_1, \qquad \dot\beta_3 = \beta_1\omega_2 - \beta_2\omega_1
\end{gathered} \tag{1}$$

можно без ограничения общности рассматривать на совместном уровне геометрических интегралов

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = a^2, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = b^2, \quad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0 \tag{2}$$

с постоянными $a > b > 0$. Соответствующая процедура "ортогонализации силовых полей" приведена в работе [4] (более общее ее изложение имеется в [7]). Случай О.И. Богоявленского [2], обобщающий 1-й класс движений Г.Г. Аппельрота (класс Делоне) [8], характеризуется соотношениями

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 + \alpha_1 - \beta_2 = 0, \quad 2\omega_1\omega_2 + \alpha_2 + \beta_1 = 0. \tag{3}$$

При этом система (1) имеет частный интеграл [2]

$$F = (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega_3 + 2(\omega_1\alpha_3 + \omega_2\beta_3), \tag{4}$$

постоянную которого обозначим через f.

Уравнения (2), (3) задают гладкое четырехмерное многообразие $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathbf{R}^9(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ [5, 6]. Особые периодические решения отвечают случаям бифуркации первых интегралов H, F на $\mathfrak{M}$ (H – интеграл энергии), а также, как показано в [1] (теорема 4), исчерпывают все случаи равенства единице ранга общего интегрального отображения в точках многообразия $\mathfrak{M}$. Уравнение бифуркационной диаграммы отображения $H \times F : \mathfrak{M} \to \mathbf{R}^2$ найдено в [6] и приведено в предложении 3 работы [1].

В то же время, согласно теореме 4 работы [1], рассматриваемые траектории также принадлежат исследованному в работе [9] многообразию, обобщающему семейство особо замечательных движений 4-го класса Аппельрота. Следовательно, для них имеют место установленные в [9] частные интегралы S, T, постоянные которых в соответствии с работой [9] обозначим через s, τ. При этом, как показано в [9], постоянные h, g, k общих интегралов H, G, K (см. формулы (3) работы [1]) выражаются через s, τ в виде

$$h = s + \frac{p^2 - \tau}{2s}, \qquad g = \frac{1}{2}(p^2 - \tau)s + \frac{p^4 - r^4}{4s}, \qquad k = \tau + \frac{\tau^2 - 2p^2\tau + r^4}{4s^2}. \tag{5}$$

Здесь введены обозначения $p^2 = a^2 + b^2$, $r^2 = a^2 - b^2 \quad (p > r > 0)$.

Кроме того, известно (см., например, работу [6]), что при условии $K = 0$ имеет место следующая связь частного интеграла F с интегралом энергии H и интегралом G А.Г. Реймана – М.А. Семенова-Тян-Шанского:

$$F^2 = 2(p^2 H - 2G). \tag{6}$$

Условия существования критических периодических решений на $\mathfrak{M}$ получены в [1] как условия на постоянную s. Полагая $k = 0$, из (5), (6) получаем следующую параметризацию трех кривых, заданных уравнением Д.Б. Зотьева (уравнение (10) работы [1]):

$$\delta_1 : \begin{cases} h = 2s - \dfrac{1}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} \\ f = \pm\sqrt{-\dfrac{2}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}(\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})} \\ \tau = (\sqrt{a^2 - s^2} + \sqrt{b^2 - s^2})^2 \end{cases}, \quad s \in [-b, 0); \tag{7}$$

$$\delta_2 : \begin{cases} h = 2s + \dfrac{1}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)} \\ f = \pm\sqrt{\dfrac{2}{s}\sqrt{(a^2 - s^2)(b^2 - s^2)}(\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})} \\ \tau = (\sqrt{a^2 - s^2} - \sqrt{b^2 - s^2})^2 \end{cases}, \quad s \in (0, b]; \tag{8}$$

$$\delta_3 : \begin{cases} h = 2s - \dfrac{1}{s}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)} \\ f = \pm\sqrt{\dfrac{2}{s}\sqrt{(s^2 - a^2)(s^2 - b^2)}(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})} \\ \tau = -(\sqrt{s^2 - b^2} - \sqrt{s^2 - a^2})^2 \end{cases}, \quad s \in [a, +\infty). \tag{9}$$

При использовании формул работы [9] для введенных в ней постоянных $\chi = \sqrt{k}$, $\sigma = \tau^2 - 2p^2\tau + r^4$ при условии $k = 0$ следует положить

$$\chi = 0, \quad \sigma = -4s^2\tau^2. \tag{10}$$

Введем замену переменных

$$\begin{gathered} x_1 = (\alpha_1 - \beta_2) + i(\alpha_2 + \beta_1), \quad x_2 = (\alpha_1 - \beta_2) - i(\alpha_2 + \beta_1), \\ y_1 = (\alpha_1 + \beta_2) + i(\alpha_2 - \beta_1), \quad y_2 = (\alpha_1 + \beta_2) - i(\alpha_2 - \beta_1), \\ z_1 = \alpha_3 + i\beta_3, \quad z_2 = \alpha_3 - i\beta_3, \\ w_1 = \omega_1 + i\omega_2, \quad w_2 = \omega_1 - i\omega_2, \quad w_3 = \omega_3. \end{gathered} \tag{11}$$

Условия (3) примут вид

$$x_1 = -w_1^2, \qquad x_2 = -w_2^2, \tag{12}$$

а соотношения (2) с учетом этого преобразуются так

$$z_1^2 - w_1^2 y_2 = r^2, \quad z_2^2 - w_2^2 y_1 = r^2, \quad w_1^2 w_2^2 + y_1 y_2 + 2z_1 z_2 = 2p^2. \tag{13}$$

Выполним подстановку (12) в уравнения (22) работы [9], определяющие совместный уровень первых интегралов S, T. Получим

$$\begin{array}{l} (y_2 + 2s)w_1 - w_1^2 w_2 + z_1 w_3 = 0, \\ (y_1 + 2s)w_2 - w_2^2 w_1 + z_2 w_3 = 0, \end{array} \tag{14}$$

$$(\tau - w_1^2 w_2^2)w_3 - z_1 w_1 w_2^2 - z_2 w_1^2 w_2 = 0, \tag{15}$$

$$(w_1^2 w_2^2 + z_1 z_2) - 2s w_1 w_2 = \tau. \tag{16}$$

Систему (13)–(16) дополним уравнением интеграла F:

$$w_1 w_2 w_3 + z_2 w_1 + z_1 w_2 = f. \tag{17}$$

Отсюда и из (15) сразу же следует равенство

$$\tau w_3 = f w_1 w_2. \tag{18}$$

Замечание. Равенство (18) означает, что на рассматриваемых решениях имеет место частный интеграл $\omega_3/(\omega_1^2 + \omega_2^2) = \mathrm{const}$. Этот факт следует и из уравнений (4.5) работы [6], описывающих множество критических точек отображения $H \times F$ в специальных координатах.

2. Квадратура. Введем константы r_1, r_2 (вещественные или мнимые), полагая

$$r_1^2 = a^2 - s^2, \qquad r_2^2 = b^2 - s^2$$

и выбирая их знаки так, чтобы во всех случаях (7)–(9) оказалось

$$\tau = (r_1 + r_2)^2, \qquad f = \sqrt{-\frac{2r_1 r_2}{s}}(r_1 + r_2). \tag{19}$$

Из уравнений (1) в подстановке (11) найдем

$$\frac{d}{dt}(w_1 w_2) = \frac{i}{2}(w_1 z_2 - w_2 z_1).$$

Введем вспомогательную переменную

$$\xi = \frac{w_1 w_2}{r_1 + r_2}. \tag{20}$$

Из (16) имеем

$$z_1 z_2 = (1 - \xi^2)\tau + 2s\xi\sqrt{\tau}, \tag{21}$$

а следствием (14), (17), (20) является равенство

$$w_1 z_2 + w_2 z_1 = (1-\xi^2) f. \tag{22}$$

Поскольку, согласно (19), (20),

$$w_1 w_2 = \xi\sqrt{\tau}, \tag{23}$$

из (22) с учетом (21) находим

$$\begin{aligned}(w_1 z_2 - w_2 z_1)^2 &= (1-\xi^2)^2 f^2 - 4[(1-\xi^2)\tau + 2s\xi\sqrt{\tau}\,]\,\xi\sqrt{\tau} = \\ &= -\frac{2(r_1+r_2)^2}{s} \qquad \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi),\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\varphi_1(\xi) = r_1(1-\xi^2) + 2s\xi, \quad \varphi_2(\xi) = r_2(1-\xi^2) + 2s\xi. \tag{25}$$

Таким образом, для зависимости $\xi(t)$ получаем уравнение

$$\Big(\frac{d\xi}{dt}\Big)^2 = \frac{1}{2s}\,\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi), \tag{26}$$

которое, ввиду (25), интегрируется в эллиптических функциях.

3. Выражения для фазовых переменных. Для формального решения задачи необходимо явно выразить исходные переменные через переменную ξ. Удобные выражения удается получить для комплексных переменных (11), после чего $\omega_i, \alpha_i, \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ находятся обратным линейным преобразованием.

Из (14) имеем следующие равенства:

$$\begin{aligned}&w_1 w_2 (y_1 - y_2) + (w_1 z_2 - w_2 z_1) w_3 = 0,\\ &w_1 w_2 (y_1 + y_2 + 4s) + (w_1 z_2 + w_2 z_1) w_3 - 2 w_1^2 w_2^2 = 0.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (20), (22), (24) получаем

$$y_1 - y_2 = -\frac{2}{s}\sqrt{r_1 r_2 \varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi)}, \qquad y_1 + y_2 + 4s = 2(r_1+r_2)\xi + \frac{2r_1 r_2}{s}(1-\xi^2). \tag{27}$$

Поскольку все радикалы алгебраические, выбор знака $y_1 - y_2$ в полученном выражении определяет знаки и в последующих формулах.

Заметим, что имеет место тождество

$$2s[(r_1+r_2)\xi + \frac{r_1 r_2}{s}(1-\xi^2)] \equiv r_1\varphi_2(\xi) + r_2\varphi_1(\xi),$$

в силу которого равенства (27) дают

$$\begin{aligned}y_1 &= \frac{1}{2s}\,[\sqrt{r_2\varphi_1(\xi)} - \sqrt{r_1\varphi_2(\xi)}\,]^2 - 2s,\\ y_2 &= \frac{1}{2s}\,[\sqrt{r_2\varphi_1(\xi)} + \sqrt{r_1\varphi_2(\xi)}\,]^2 - 2s.\end{aligned} \tag{28}$$

Для нахождения остальных переменных воспользуемся выражениями, полученными в [9]:

$$\begin{aligned}&r^2(z_1+z_2)^2 = \Phi_+(x,z), \quad r^2(z_1-z_2)^2 = \Phi_-(x,z),\\ &(\sqrt{2s(r^2x_1 - \tau y_1) + \sigma} + \sqrt{2s(r^2x_2 - \tau y_2) + \sigma}\,)^2 = \Psi_+(x,z),\\ &(\sqrt{2s(r^2x_1 - \tau y_1) + \sigma} - \sqrt{2s(r^2x_2 - \tau y_2) + \sigma}\,)^2 = \Psi_-(x,z).\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь

$$\begin{aligned} &x^2 = x_1 x_2, \quad z^2 = z_1 z_2, \\ &\Phi_\pm(x,z) = (x^2+z^2 \pm r^2)^2 - 2(p^2 \pm r^2)x^2, \\ &\Psi_\pm(x,z) = (x^2+z^2 - \tau \pm 2s\chi)^2 - 4s^2x^2. \end{aligned}$$

В нашем случае из (12), (21), (23) имеем

$$x^2 = \tau\xi^2, \qquad z^2 = (1-\xi^2)\tau + 2s\xi\sqrt{\tau}, \tag{30}$$

откуда с учетом (10) сразу же следуют тождества $\Psi_\pm \equiv 0$, и, значит,

$$r^2 x_1 - \tau(y_1 + 2s) = 0, \qquad r^2 x_2 - \tau(y_2+2s) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(r_1+r_2)^2}{2sr^2}\,[\sqrt{r_2\varphi_1(\xi)} - \sqrt{r_1\varphi_2(\xi)}\,]^2, \\ x_2 &= \frac{(r_1+r_2)^2}{2sr^2}\,[\sqrt{r_2\varphi_1(\xi)} + \sqrt{r_1\varphi_2(\xi)}\,]^2, \end{aligned} \tag{31}$$

а тогда из (12), (18), (20) получаем

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{(r_1+r_2)i}{r\sqrt{2s}}\,[\sqrt{r_2\varphi_1(\xi)} - \sqrt{r_1\varphi_2(\xi)}\,], \\ w_2 &= \frac{(r_1+r_2)i}{r\sqrt{2s}}\,[\sqrt{r_2\varphi_1(\xi)} + \sqrt{r_1\varphi_2(\xi)}\,], \\ w_3 &= \sqrt{-\frac{2r_1r_2}{s}}\,\xi. \end{aligned} \tag{32}$$

Преобразуем многочлены $\Phi_\pm$ в силу (10), (30). Получим $\Phi_+ = 4r_1(r_1+r_2)^2\varphi_1(\xi)$, $\Phi_- = 4r_2(r_1+r_2)^2\varphi_2(\xi)$. Поэтому первая группа уравнений (29) дает

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{r_1+r_2}{r}\,[\sqrt{r_1\varphi_1(\xi)} - \sqrt{r_2\varphi_2(\xi)}\,], \\ z_2 &= \frac{r_1+r_2}{r}\,[\sqrt{r_1\varphi_1(\xi)} + \sqrt{r_2\varphi_2(\xi)}\,]. \end{aligned} \tag{33}$$

Здесь уже нет кажущегося произвола в выборе знаков, так как должны выполняться равенства (19), (22), (26).

Этим завершается формальное интегрирование уравнений движения волчка Ковалевской в двойном силовом поле на критических решениях случая О.И. Богоявленского. С учетом результатов [4, 1] получено явное описание всех особых периодических движений волчка.

4. Условия вещественности и количество решений. Заметим, что уравнения (1) инвариантны относительно подстановки $\boldsymbol{\omega} \to -\boldsymbol{\omega}, t \to -t$. При этом постоянная f интеграла (4) меняет знак. Поэтому достаточно рассмотреть какой-либо определенный знак f на каждом множестве параметров (7)–(9).

В случае (7), считая $f \geqslant 0$, положим для удовлетворения соотношений (19)

$$r_1 = \sqrt{a^2 - s^2} > 0, \; r_2 = \sqrt{b^2 - s^2} \geqslant 0 \tag{34}$$

(напомним, что в этом случае $-b \leqslant s < 0$). Согласно (11), произведение $w_1 w_2$ вещественно и неотрицательно, поэтому из (20) получаем неравенство $\xi \geqslant 0$. Одновременно из (26) следует, что на вещественных решениях $\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi) \leqslant 0$.

Корни многочленов φ_1, φ_2 имеют вид

$$\xi_+^{(1)} = \sqrt{\frac{a+s}{a-s}}, \quad \xi_-^{(1)} = -\sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad \xi_+^{(2)} = \sqrt{\frac{b+s}{b-s}}, \quad \xi_-^{(2)} = -\sqrt{\frac{b-s}{b+s}}.$$

При этом, очевидно, выполнены неравенства

$$-\infty \leqslant \xi_-^{(2)} < \xi_-^{(1)} < -1, \qquad 0 \leqslant \xi_+^{(2)} < \xi_+^{(1)} < 1. \tag{35}$$

Поэтому переменная $\xi(t)$ осциллирует в отрезке

$$\xi \in [\sqrt{\frac{b+s}{b-s}}, \sqrt{\frac{a+s}{a-s}}],$$

на котором $\varphi_1(\xi) \geqslant 0$ и $\varphi_2(\xi) \leqslant 0$. В верхней границе этого отрезка периодически меняет знак алгебраический радикал $R_1 = \sqrt{\varphi_1(\xi)}$, а в нижней – радикал $R_2 = \sqrt{-\varphi_2(\xi)}$.

Фазовые переменные, согласно формулам (28), (31)–(33), являются однозначными функциями точки трехмерного пространства переменных ξ, R_1, R_2. Поэтому фазовые траектории в точности соответствуют траекториям в этом пространстве. Последние же задаются уравнениями

$$R_1^2 = \varphi_1(\xi), \quad R_2^2 = -\varphi_2(\xi), \quad \xi \in [\xi_+^{(2)}, \xi_+^{(1)}].$$

Это – пересечение двух цилиндров с взаимно перпендикулярными образующими. В силу выбора (34) первый цилиндр эллиптический, второй – гиперболический (параболический при $s = -b$). При расположении корней (35) вершина $R_2 = 0, \xi = \xi_+^{(2)}$ направляющей гиперболы второго цилиндра в плоскости $R_1 = 0$ лежит между корнями трехчлена φ_1, т. е. строго внутри первого цилиндра. Поэтому пересечение цилиндров состоит из одной замкнутой кривой (см. рис. 1 *a*). Итак, для каждого из значений констант (7) периодическое решение одно.

Рассмотрим случай (8). Здесь следует положить

$$r_1 = \sqrt{a^2 - s^2} > 0, \quad r_2 = -\sqrt{b^2 - s^2} \leqslant 0.$$

Поскольку $a > b$, то $\sqrt{a^2 - s^2} > \sqrt{b^2 - s^2}$. Вновь выбираем $f \geqslant 0$, полагая радикал в (19) неотрицательным. Тогда из (20), (26) следует, что на вещественных решениях $\xi \geqslant 0$ и $\varphi_1(\xi)\varphi_2(\xi) \geqslant 0$.

Корни многочленов φ_1, φ_2 таковы:

$$\xi_+^{(1)} = \sqrt{\frac{a+s}{a-s}}, \quad \xi_-^{(1)} = -\sqrt{\frac{a-s}{a+s}}, \quad \xi_+^{(2)} = \sqrt{\frac{b-s}{b+s}}, \quad \xi_-^{(2)} = -\sqrt{\frac{b+s}{b-s}}.$$

При этом

$$-\infty \leqslant \xi_-^{(2)} < -1 < \xi_-^{(1)} < 0, \qquad 0 \leqslant \xi_+^{(2)} < 1 < \xi_+^{(1)}.$$

Следовательно, переменная $\xi(t)$ совершает периодические колебания в отрезке

$$\xi \in [\sqrt{\frac{b-s}{b+s}}, \sqrt{\frac{a+s}{a-s}}],$$

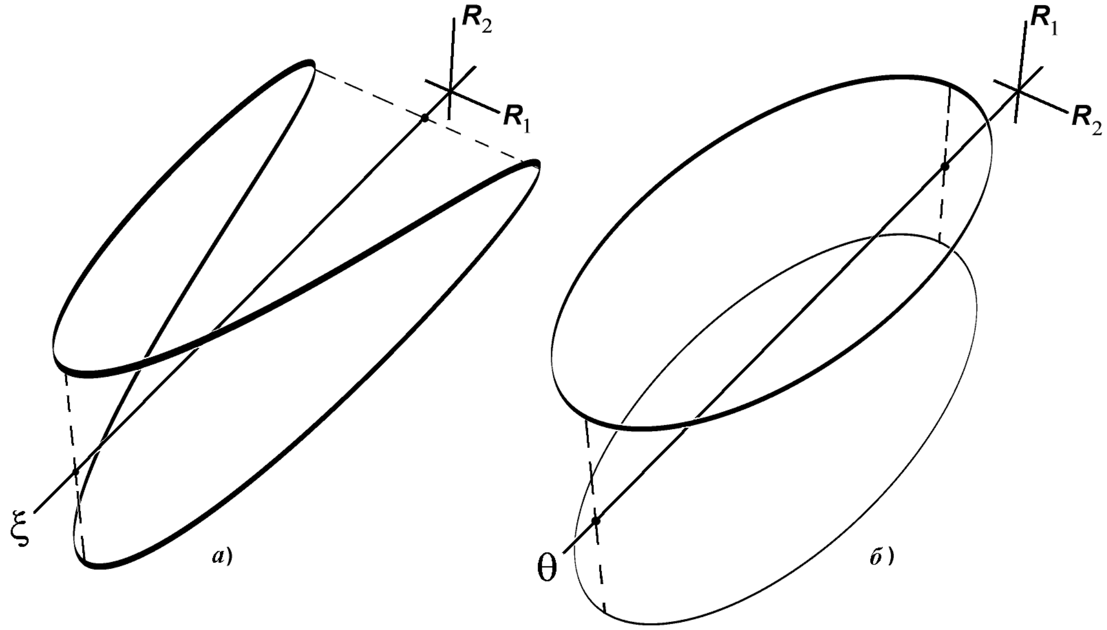

Рис. 1. Траектории в изображающем пространстве: а) $0 < |s| \leqslant b$;   б) $s \geqslant a$.

на котором $\varphi_1(\xi) \geqslant 0$ и $\varphi_2(\xi) \geqslant 0$. На концах отрезках поочередно меняют знаки алгебраические радикалы $R_1 = \sqrt{\varphi_1(\xi)}$ (верхний конец), $R_2 = \sqrt{\varphi_2(\xi)}$ (нижний конец). Траектория в пространстве переменных ξ, R_1, R_2 полностью аналогична предыдущему случаю (рис. 1 *а*). Таким образом, каждому набору значений (8) в исходном фазовом пространстве также соответствует одно периодическое решение.

Рассмотрим последний случай (9). Здесь $\tau = (r_1 + r_2)^2 < 0$, r_1, r_2 – мнимые. Для вещественности f в (19) полагаем

$$r_1 = ir_1^*, \qquad r_2 = -ir_2^*, \qquad 0 \leqslant r_1^* = \sqrt{s^2 - a^2} < r_2^* = \sqrt{s^2 - b^2}. \tag{36}$$

Чтобы получить, как и ранее, $f \geqslant 0$, нужно в равенстве (19) выбрать значение корня

$$\sqrt{-\frac{2}{s} r_1 r_2} = -i(\frac{2}{s} r_1^* r_2^*)^{\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Теперь в определении (20) переменная ξ оказывается мнимой. Положим

$$\xi = i\theta, \quad \varphi_1(\xi) = i\varphi_1^*(\theta), \quad \varphi_2(\xi) = -i\varphi_2^*(\theta), \tag{38}$$

где

$$\varphi_1^*(\theta) = r_1^*(1 + \theta^2) + 2s\theta, \quad \varphi_2^*(\theta) = r_2^*(1 + \theta^2) - 2s\theta.$$

Подстановка этих выражений в (20), (26) приводит к следующим условиям вещественности решений: $\theta \geqslant 0$ и $\varphi_1^*(\theta)\varphi_2^*(\theta) \leqslant 0$.

Корни φ_1^*, φ_2^* имеют вид

$$\theta_+^{(1)} = -\sqrt{\frac{s-a}{s+a}}, \quad \theta_-^{(1)} = -\sqrt{\frac{s+a}{s-a}}, \quad \theta_+^{(2)} = \sqrt{\frac{s+b}{s-b}}, \quad \theta_-^{(2)} = \sqrt{\frac{s-b}{s+b}}, \tag{39}$$

а их расположение таково:

$$-\infty \leqslant \theta_-^{(1)} < -1 < \theta_+^{(1)} < 0, \qquad 0 \leqslant \theta_-^{(2)} < 1 < \theta_+^{(2)}.$$

Переменная $\theta(t)$ совершает периодические колебания в отрезке

$$\theta \in [\sqrt{\frac{s-b}{s+b}}, \sqrt{\frac{s+b}{s-b}}], \tag{40}$$

на котором

$$\varphi_1^*(\theta) > 0, \qquad \varphi_2^*(\theta) \leqslant 0. \tag{41}$$

В отличие от предыдущих случаев здесь из двух вещественных алгебраических радикалов $R_1 = \sqrt{\varphi_1^*(\theta)}$, $R_2 = \sqrt{-\varphi_2^*(\theta)}$ периодически меняет знак лишь второй, а первый в нуль не обращается. Поэтому, выбирая начальные условия с различными знаками R_1, получаем две траектории в изображающем пространстве переменных θ, R_1, R_2, показанные на рис. 1 *б*. Следовательно, и в исходном фазовом пространстве этому случаю соответствуют два периодических решения.

В качестве примера выполним в этом случае явное интегрирование. Обозначим через c_1, c_2, c_3, c_4 значения корней (39) в порядке убывания. Тогда

$$\varphi_1^*(\theta) = r_1^*(\theta - c_3)(\theta - c_4), \qquad \varphi_2^*(\theta) = -r_2^*(c_1 - \theta)(\theta - c_2), \tag{42}$$

а уравнение (26) с учетом (36)–(38), (40) запишется в виде

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{r_1^* r_2^*}{2s}(c_1 - \theta)(\theta - c_2)(\theta - c_3)(\theta - c_4)}, \qquad \theta \in [c_2, c_1]. \tag{43}$$

Оно интегрируется подстановкой

$$\theta = \frac{c_2 - c_3\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u} = \frac{\sqrt{(s+a)(s-b)} - \sqrt{(s-a)(s+b)}\alpha^2 \operatorname{sn}^2 u}{\sqrt{(s+a)(s+b)}(1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u)}, \tag{44}$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{c_1 - c_2}{c_1 - c_3}} = \sqrt{\frac{2b\sqrt{s+a}}{\sqrt{s+b}\,[\sqrt{(s+a)(s+b)} + \sqrt{(s-a)(s-b)}]}}, \tag{45}$$

а модуль κ функции Якоби равен

$$\kappa = \sqrt{\frac{(c_1 - c_2)(c_3 - c_4)}{(c_1 - c_3)(c_2 - c_4)}} = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{(s+a)(s+b)} + \sqrt{(s-a)(s-b)}} < \alpha < 1. \tag{46}$$

В формулах (44)–(46) и всюду ниже знак корня уже означает его арифметическое значение.

Для R_1, R_2 из (42), (44) получаем однозначные вдоль траектории вещественные выражения

$$R_1 = \pm\frac{\lambda_1 \operatorname{dn} u}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u}, \quad R_2 = \frac{\lambda_2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{1 - \alpha^2 \operatorname{sn}^2 u}, \tag{47}$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{r_1^*(c_2-c_3)(c_2-c_4)} = \frac{\sqrt{2\left[\sqrt{s^2-a^2}+\sqrt{s^2-b^2}\,\right]s}}{\sqrt{s+b}},$$

$$\lambda_2 = (c_1-c_2)\sqrt{r_2^*\frac{c_2-c_3}{c_1-c_3}} = 2b\,\frac{\sqrt{b\sqrt{s^2-a^2}+a\sqrt{s^2-b^2}}}{\sqrt{(a+b)(s+b)s}}.$$

Выбранный в начальный момент знак R_1 сохраняется вдоль всей траектории. Для определенности считаем $R_1 > 0$. Подстановка (44), (47) в (43) дает

$$u = \lambda(t-t_0), \quad \lambda = \frac{\sqrt{r_1^* r_2^*(c_1-c_3)(c_2-c_4)}}{2\sqrt{2s}} = \frac{\sqrt{(s+a)(s+b)}+\sqrt{(s-a)(s-b)}}{2\sqrt{2s}}. \quad (48)$$

Теперь все зависимости от времени выписываются явно. Так, для компонент угловой скорости из (11), (32) имеем

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{r_2^*}{2s}}\,\frac{r_2^*-r_1^*}{r}\,R_1, \quad \omega_2 = -\sqrt{\frac{r_1^*}{2s}}\,\frac{r_2^*-r_1^*}{r}\,R_2, \quad \omega_3 = -\sqrt{\frac{2r_1^*r_2^*}{s}}\,\theta,$$

откуда в подстановке (44), (47), (48) получим явные выражения

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{\lambda_1\sqrt{r_2^*}\,(r_2^*-r_1^*)\,\mathrm{dn}\,\lambda(t-t_0)}{r\sqrt{2s}\,[1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,\lambda(t-t_0)]},\\
\omega_2 &= -\frac{\lambda_2\sqrt{r_1^*}\,(r_2^*-r_1^*)\,\mathrm{sn}\,\lambda(t-t_0)\,\mathrm{cn}\,\lambda(t-t_0)}{r\sqrt{2s}\,[1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,\lambda(t-t_0)]},\\
\omega_3 &= -\frac{\sqrt{2r_1^*r_2^*}\,[\sqrt{(s+a)(s-b)}-\sqrt{(s-a)(s+b)}\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,\lambda(t-t_0)]}{\sqrt{s(s+a)(s+b)}\,[1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2\,\lambda(t-t_0)]}.
\end{aligned}$$

Аналогично находятся и выражения для $\alpha_i(t), \beta_i(t)$. Ограничимся их записью через величины (44), (47):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -s + \frac{r_1^*}{r_1^*+r_2^*}\,[(r_2^*-r_1^*)\theta + \frac{r_1^*r_2^*}{s}(1+\theta^2)],\\
\alpha_2 &= -\frac{r_1^*}{r_1^*+r_2^*}\frac{\sqrt{r_1^*r_2^*}}{s}\,R_1R_2,\\
\alpha_3 &= \sqrt{r_1^*\,\frac{r_2^*-r_1^*}{r_1^*+r_2^*}}\,R_1,\\
\beta_1 &= \frac{r_2^*}{r_1^*+r_2^*}\frac{\sqrt{r_1^*r_2^*}}{s}\,R_1R_2,\\
\beta_2 &= -s + \frac{r_2^*}{r_1^*+r_2^*}\,[(r_2^*-r_1^*)\theta + \frac{r_1^*r_2^*}{s}(1+\theta^2)],\\
\beta_3 &= \sqrt{r_2^*\,\frac{r_2^*-r_1^*}{r_1^*+r_2^*}}\,R_2.
\end{aligned}$$

Период решения равен $\mathrm{K}/(2\lambda)$, где K – вещественный период функций Якоби с модулем (46).

Замечание. Полученные утверждения о количестве траекторий совпадают с соответствующим результатом работы [5]. При этом в [5] утверждается, что относительно гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, индуцированной на многообразии решения О.И. Богоявленского $\mathfrak{M} = \{K = 0\}$, траектория случая (7) имеет на соответствующей изоэнергетической поверхности $H^{-1}(h) \cap \mathfrak{M}$ эллиптический тип, траектория случая (8) – гиперболическая, а каждая из двух траекторий случая (9) имеет гиперболический тип на ограниченном отрезке кривой (9) в плоскости (h, f) между точками возврата и эллиптический тип на двух оставшихся ветвях этой кривой, на которых $h \to +\infty$ при $s \to +\infty$. Воспользовавшись результатами работы [9], можно показать, что для гамильтоновой системы, индуцированной на другом критическом многообразии $\mathfrak{O}$, содержащем траектории обобщения 4-го класса Аппельрота, все перечисленные здесь периодические решения в пределах своей изоэнергетической поверхности $H^{-1}(h) \cap \mathfrak{O}$ имеют эллиптический тип. При этом, естественно, из рассмотрения необходимо исключить конечное число значений энергии, для которых второй из выбранных для исследования интегралов перестает быть боттовским.

В заключение отметим, что все перечисленные выше решения были получены добавлением к уравнениям работы [9] условий (12), или, что то же самое, уравнения (17). Никакие дополнительные предположения о зависимости функций или уравнений не вводились. Этим непосредственно доказано, что пересечение двух критических четырехмерных многообразий $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{O}$ состоит в точности из изученных здесь семейств периодических траекторий.

1. *Харламов М.П.* Области существования критических движений обобщенного волчка Ковалевской и бифуркационные диаграммы // См. статью в наст. сб. – С. 13–22.
2. *Богоявленский О.И.* Два интегрируемых случая динамики твердого тела в силовом поле // Докл. АН СССР. – 1984. – **275**, № 6. – С. 1359–1363.
3. *Ковалевская С.В.* Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1940. – С. 11-60.
4. *Харламов М.П.* Критическое множество и бифуркационная диаграмма задачи о движении волчка Ковалевской в двойном поле // Механика твердого тела. – 2004. – Вып. 34. – С. 47–58.
5. *Zotev D.B.* Fomenko-Zieschang invariant in the Bogoyavlenskyi case // Регулярная и хаотическая динамика. – 2000. – **5**, № 4. – С. 437–458.
6. *Зотьев Д.Б.* Фазовая топология 1-го класса Аппельрота волчка Ковалевской в магнитном поле // Фундамент. и прикл. математика. – 2006. – **12**, № 1. – С. 95-128.
7. *Kharlamov M.P.* Bifurcation diagrams of the Kowalevski top in two constant fields // Регулярная и хаотическая динамика. – 2005. – **10**, № 4. – С. 381-398.
8. *Аппельрот Г.Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы // Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, – 1940. – С. 61–156.
9. *Харламов М.П.* Бифуркационная диаграмма обобщения 4-го класса Аппельрота // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 38–48.

Волгоградская академия гос. службы, Россия
mharlamov@vags.ru
Получено 19.05.06