ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 62-50

 В.Ф. Щербак

СИНТЕЗ ИНВАРИАНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ НАБЛЮДЕНИЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В работе рассмотрена задача наблюдения вектора угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки. Классический подход в задаче наблюдения состояния динамической системы состоит в построении для нее наблюдателя – вспомогательной системы дифференциальных уравнений, все решения которой асимптотически стремятся к фазовому вектору исходной системы. В работе предлагается другой способ, при котором решение вспомогательной системы стремится к многообразию, на котором задача определения фазового вектора становится алгебраической. Метод основан на построении динамического расширения исходной системы за счет введения уравнений ее управляемого прототипа. Управления в виртуальной управляемой модели выбираются из условия получения инвариантных соотношений, связывающих искомый фазовый вектор с решениями расширеной системы. Применяемый подход основан на методе синтеза управлений, стабилизирующих отклонения от инвариантных многообразий системы дифференциальных уравнений.

1. Сведение задачи наблюдения к задаче построения алгебраической системы уравнений. Рассматривается задача наблюдения вектора угловой скорости твердого тела, вращающегося по инерции вокруг неподвижной точки. Для детерминированных систем традиционный подход к ее решению состоит в определении асимптотической оценки состояния динамической системы по информации об ее выходе. В линейном случае эта задача решается с помощью построения асимптотического наблюдателя Луенбергера [1]. Для нелинейных систем не найдено общего метода построения наблюдателя, хотя выделен класс нелинейных систем [2 – 7], для которых нелинейный наблюдатель существует. В данной работе, с использованием метода множества траекторий в обратных задачах управления [8], задача наблюдения угловой скорости твердого тела сводится к построению вспомогательных алгебраических соотношений, выражающих неизвестные компоненты фазового вектора как функции известных величин: выхода системы и фазового вектора управляемой копии исходной системы. Для этого динамические уравнения системы дополняются уравнениями ее прототипа, содержащего вспомогательные управления. Задача определения фазового вектора решается как задача синтеза закона изменения этих управлений и вида алгебраических связей, при которых порождаемое ими многообразие является инвариантным и глобально притягивающим для всех траекторий расширенной системы.

Рассмотрим уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \dot{\omega_1} = a_1\omega_2\omega_3, \\ \dot{\omega_2} = a_2\omega_3\omega_1, \\ \dot{\omega_3} = a_3\omega_1\omega_2. \end{cases} \tag{1}$$

где $a_1 = \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}$, $\quad a_2 = \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}$, $\quad a_3 = \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}$, A_1, A_2, A_3 – моменты инерции тела относительно главных осей

Предположим, что значения одной из компонент вектора угловой скорости, например $\omega_1(t)$, могут быть измерены в любой момент времени, т. е. выходом является

функция
$$y = \omega_1(t). \tag{2}$$

В задаче наблюдения системы (1) требуется определить по этой информации оставшиеся компоненты вектора угловой скорости – функции $\omega_2(t), \omega_3(t)$.

Уравнения (1) допускают первый интеграл

$$A_1{\omega_1}^2 + A_2{\omega_2}^2 + A_3{\omega_3}^2 = R^2,$$

откуда, в частности, следует ограниченность решений. Будем считать, что постоянная R не является известной и поэтому уравнение (2) не может быть использовано для нахождения $\omega_2(t), \omega_3(t)$. Однако, естественно предположить, что при решении конкретных задач наблюдения величина R может быть оценена. Поэтому далее будем считать, что $R \in [R^{min}; R^{max}]$, где R^{min}, R^{max} заданы. Тогда аналогичные оценки легко привести и для компонент $\omega_i: \quad \omega_i \in [\omega_i^{min}; \omega_i^{max}], \quad i = 1, 2, 3.$

В дальнейшем будем считать выполненным следующее условие.

Предположение. Для рассматриваемой траектории системы (1) $\omega_1^{min}, \omega_1^{max}$ имеют один и тот же знак, иными словами, в течение всего процесса наблюдения величина $\omega_1(t)$ отделена от нуля. Для определенности будем считать, что $\omega_1(t) > 0$.

Приведем систему (1) к треугольному виду с помощью замены переменных

$$x_1 = \omega_1, \qquad x_2 = a_1\omega_2\omega_3, \qquad x_3 = a_1\omega_1(a_2{\omega_3}^2 + a_3{\omega_2}^2). \tag{3}$$

При $\omega_1 \neq 0$ преобразование (3) является взаимно однозначным и уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = x_2x_3/x_1 + 4a_2a_3x_1^2x_2. \end{cases} \tag{4}$$

Выходом системы (4) является функция $x_1(t) = \omega_1(t)$. Таким образом, задача определения $\omega_2(t), \omega_3(t)$ свелась к задаче наблюдения $x_2(t), x_3(t)$ в системе (4).

Расширим систему (4) за счет добавления уравнений ее прототипа, в правых частях которых содержатся неопределенные пока функции $u_1(.), u_2(.), u_3(.)$ и введена переменная $x_1(t)$ вместо $z_1(t)$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + u_1(.), \\ \dot{z}_2 = z_3 + u_2(.), \\ \dot{z}_3 = z_2z_3/x_1 + 4a_2a_3x_1^2z_2 + u_3(.). \end{cases} \tag{5}$$

Рассматривая совместно уравнения (4), (5), получаем систему шесть дифференциальных уравнений, из которых первые три описывают реальный объект с измеряемыми значениями координаты $x_1(t)$, а последние три – некоторую модельную систему, управляемую функциями $u_1(.), u_2(.), u_3(.)$.

Будем считать управления допустимыми, если выполнены следующие условия:

А1) функции $u_i(.), \quad i = 1, 2, 3$ могут зависеть лишь от известной величины $x_1(t)$ и фазового вектора системы (5) – координат $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$;

А2) для замкнутой системы (5), полученной в результате подстановки функций $u_i(x_1, z_1, z_2, z_3), \quad i = 1, 2, 3$ в ее правые части, выполнены условия, гарантирующие существование и единственность решения задачи Коши $\forall z(0) \in R^3, t > 0$.

С учетом этих соглашений можем считать, что решения системы (5), соответствующие допустимым управлениям, являются известными функциями времени. Обозначим $e_i = z_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3$. Вычитая из (5) уравнения (4), получим уравнения для отклонений траекторий системы (4) от (5):

$$\begin{cases} \dot{e_1} = e_2 + u_1, \\ \dot{e_2} = e_3 + u_2, \\ \dot{e_3} = \dfrac{z_2 e_3 + z_3 e_2 e_3 - e_1 e_2}{x_1} + 4a_2 a_3 x_1^2 x_2 + u_3. \end{cases} \tag{6}$$

Предположим, что нам удалось подобрать функции $\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3), \ \Psi(x_1, z_1, z_2, z_3)$ такие, что для некоторого решения $x(t), z(t)$ системы (4), (5) в любой момент времени выполнены соотношения

$$e_2 - \Phi(x_1, z_1, z_2, z_3) = 0, \qquad e_3 - \Psi(x_1, z_1, z_2, z_3) = 0. \tag{7}$$

Тогда задачу наблюдения для такой траектории можно было бы считать решенной, так как, определяя с помощью (7) значения $e_2 = z_2 - x_2, \ e_3 = z_3 - x_3$, мы тем самым находим искомые x_2, x_3.

Чтобы этот способ решения задачи наблюдения мог быть реализован для любой траектории, достаточно подобрать управления $u_i(x_1, z_1, z_2, z_3), \ i = 1, 2, 3$, так, чтобы выполнялись условия:

1) Уравнения (7) описывают инвариантное многообразие.

2) Указанное многообразие обладает свойством асимптотического притяжения.

2. Синтез инвариантных многообразий расширенной системы. Покажем, что любые непрерывно дифференцируемые функции $\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3), \ \Psi(x_1, z_1, z_2, z_3)$ будут описывать инвариантное многообразие вида (7) для траекторий расширенной системы при соответствующих допустимых законах управления $u_i(x_1, z_1, z_2, z_3), \quad i = 1, 2, 3$.

Для доказательства введем переменные

$$\phi = e_2 - \Phi(x_1, z_1, z_2, z_3), \qquad \psi = e_3 - \Psi(x_1, z_1, z_2, z_3),$$

которые характеризует отклонение траекторий системы (4),(5) от многообразия, определяемого формулами(7). С учетом (5),(6) эти отклонения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \Phi_{x_1}\phi + \psi + v_2, \\ \dot{\psi} = (\dfrac{z_3 - \Psi}{x_1} + 4a_2 a_3 {x_1}^2 + \Psi_{x_1})\phi + \dfrac{z_2 - \Phi}{x_1}\psi - \dfrac{\phi\psi}{x_1} + v_3. \end{cases} \tag{8}$$

где через Φ_{x_1}, Ψ_{x_1} обозначены якобиевы матрицы $\Phi_{x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad \Psi_{x_1} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}$.

Функции $v_i(x_1, z_1, z_2, z_3, u_1, u_2, u_3) \ \ (i = 2, 3)$, содержат члены, не зависящие от ϕ, ψ, и могут быть рассмотрены как допустимые управления. Выберем управления u_1, u_2, u_3 такими, чтобы $v_i(x_1, z_1, z_2, z_3, u_1, u_2, u_3) = 0, \ \ (i = 2, 3)$. Тогда функции $\phi = 0, \ \psi = 0$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (8). Следовательно, если в некоторый момент времени равенства (7) выполнены, то они будут выполняться тождественно.

Тем самым показано, что любые наперед заданные многообразия, описываемые равенствами (7), могут быть сделаны инвариантными с помощью синтеза соответствующих управлений.

3. Выбор многообразия, обладающего свойством асимптотического притяжения. Так как управления уже выбраны, то для обеспечения свойства притяжения в нашем распоряжении остается выбор функций $\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3), \Psi(x_1, z_1, z_2, z_3)$. Рассмотрим локальный случай, когда переменные ϕ, ψ малы. Тогда линейное приближение отклонений траекторий системы (4), (5) от инвариантного многообразия (7) описывается системой

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \Phi_{x_1}\phi + \psi, \\ \dot{\psi} = (\dfrac{z_3 - \Psi}{x_1} + 4a_2a_3{x_1}^2 + \Psi_{x_1})\phi + \dfrac{z_2 - \Phi}{x_1}\psi. \end{cases} \tag{9}$$

В качестве меры отклонения возьмем функцию $V = \dfrac{1}{2}(\phi^2 + \psi^2)$. Выберем функции $\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3), \Psi(x_1, z_1, z_2, z_3)$ такими, чтобы производная от функции V в силу системы дифференциальных уравнений (9) была определенно-отрицательна. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = \Phi_{x_1}\phi^2 + (\frac{z_3 - \Psi}{x_1} + 1 + 4a_2a_3{x_1}^2 + \Psi_{x_1})\phi\psi + \frac{z_2 - \Phi}{x_1}\psi^2. \tag{10}$$

Пусть функция $\Psi(x_1, z_1, z_2, z_3)$ является каким-либо решением уравнения в частных производных первого порядка

$$\Psi_{x_1} + \frac{z_3 - \Psi}{x_1} + 1 + 4a_2a_3{x_1}^2 = 0,$$

общее решение которого задается формулой

$$\Psi(x_1, z_1, z_2, z_3) = [-2a{x_1}^2 - \ln(x_1) + z_3/x_1 + F(z_1, z_2, z_3)]x_1, \tag{11}$$

где $F(z_1, z_2, z_3)$ – произвольная функция.

Для отрицательной определенности выражения (10) достаточно подобрать функцию $\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3)$ такую, чтобы значения Φ_{x_1} и $(z_2 - \Phi)/x_1$ были строго меньше нуля на траекториях системы (4),(5). Пусть

$$\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3) = z_2 + \lambda - x_1, \tag{12}$$

где константа $\lambda > 1 + \omega_1^{max}$. Тогда

$$\Phi_{x_1} = -1, \qquad (z_2 - \Phi)/x_1 = 1 - \frac{\lambda}{x_1} < -1$$

и справедлива следующая оценка

$$\frac{dV}{dt} < -\phi^2 - \psi^2.$$

В результате можно утверждать, что для функций $\Phi(x_1, z_1, z_2, z_3)$, $\Psi(x_1, z_1, z_2, z_3)$, заданных формулами (11), (12), многообразие, описываемое формулами (7), является притягивающим, по крайней мере, локально.

Тем самым доказано, что формулами

$$x_2(t) = z_2(t) - \Phi(x_1(t), z_1(t), z_2(t), z_3(t)), \quad x_3(t) = z_3(t) - \Psi(x_1(t), z_1(t), z_2(t), z_3(t)) \quad (13)$$

определяется асимптотическая оценка значений переменных $x_2(t), x_3(t)$. Таким образом, по измерениям выхода $x_1(t)$, полученным при движении системы (1), можно найти $z(t)$ – решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (5), соответствующее выбранным допустимым управлениям u_1, u_2, u_3 и произвольному начальному условию $z(0)$. Тогда по формулам (13) находим искомые $x_2(t), x_3(t)$.

Заключение. В работе предлагается метод сведения задачи наблюдения вектора угловой скорости твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, к задаче получения дополнительных алгебраических уравнений для компонент этого вектора. Подход основан на использовании метода управляемой стабилизации нелинейных систем по части переменных. Уравнения исходной системы дополняются уравнениями ее управляемого прототипа. Для полученной расширенной системы решается задача синтеза управлений, при которых многообразие, описываемое системой дополнительных соотношений, становится интегральным многообразием. Дополнительные алгебраические соотношения выбираются так, чтобы полученное инвариантное многообразие стало глобально притягивающим.

1. *Luenberger D.* Introduction to observers // IEEE Trans. Aut. Contr. – 1977. – **3**. – P. 47-52.
2. *Krener A., Isidori A.* Linearization by output injection and nonlinear observers // Systems and Control Letters. – 1983. – **3**. – P. 47-52.
3. *Krener A., Respondek W.* Nonlinear observers with linearizable error dynamics // SIAM J. Control Optim. – 1985. – **23**, № 2. – P. 197-216.
4. *Dawson D., Qu Z., Carroll J.* On the state observation and output feedback problems for nonlinear uncertain dynamic systems // Systems and Control Letters. – 1992. – **18**. – P. 217-222.
5. *Gautier J., Kupka I.* Observability and observers for nonlinear systems // SIAM J. Control Optim. – 1994. – **32**, № 4. – P. 975-994.
6. *Besancon G. and Hammouri H.* On uniform observation of nonuniformly observable systems // Systems and Control Letters. – 1996. – **29**. – P. 9-19.
7. *Hou M., Pugh A.* Observer with linear error dynamics for nonlinear multi-output systems // Systems and Control Letters. – 1999. – **37**. – P. 1-9.
8. *Ковалев А. М., Щербак В. Ф.* Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем. – Киев: Наук. думка, 1993. – 285 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 21.04.2005