УДК 531.38, 531.08, 517.977.1

©2005. **А.Л. Зуев**

СИНТЕЗ ДИНАМИЧЕСКОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ ДЛЯ МОДЕЛИ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

Исследуется управляемая система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая динамику упругого манипулятора с нагрузкой. Получены условия наблюдаемости системы относительно выходного сигнала в виде угла наклона и компоненты тензора напряжений в фиксированной точке манипулятора. Предложена явная схема синтеза динамического наблюдателя Луенбергера, основанная на теореме Барбашина–Красовского.

Введение. Задачам управления механическими системами с упругими элементами посвящен ряд работ отечественных и зарубежных авторов [7 – 9, 13, 16, 17]. Распространенной математической моделью упругого элемента в таких исследованиях является балка Эйлера–Бернулли. Эта модель обладает следующим асимптотическим распределением собственных значений λ_1, λ_2,... задачи Штурма-Лиувилля: λ_n растет пропорционально n^4 с ростом n [9, с. 176]. Это означает, что соответствующие модальные частоты упругих колебаний $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ приближенно распределены как n^2 при возрастании n. Однако, экспериментальные испытания гибкого манипулятора [11] в виде управляемой пожарной лестницы показывают, что модальные частоты ω_n растут почти линейно в зависимости от номера n. Это означает, что для адекватного описания колебаний такой системы следует использовать модель, отличную от балки Эйлера-Бернулли. Возможным уточнением модели манипулятора является балка С.П. Тимошенко [2], для которой модальные частоты $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ допускают линейную по n оценку в случае балки со свободным концом [5].

Управляемость и стабилизация балки Тимошенко исследовались в работах [4 – 6, 10, 14, 15], [9, Chap. 5.1.2]. Во всех этих работах один из концов балки предполагается свободным. В статье [12] доказана стабилизируемость модели балки Тимошенко в случае управления, приложенного к точечной массе на конце балки.

В статье [1] предложена модель гибкого манипулятора в виде балки Тимошенко, несущей твердое тело-нагрузку в поле силы тяжести. Для приближенных по Галеркину уравнений движения в цитируемой работе построено управление в виде обратной связи по состоянию, обеспечивающее стабилизацию положения равновесия. Для реализации такого управления необходима информация о полном фазовом векторе системы в каждый момент времени. Поскольку измерение фазового вектора недоступно на практике, то необходимо решить задачу наблюдения для оценки недостающих координат по доступным значениям выхода системы.

В настоящей статье решена задача наблюдения фазового вектора модели манипулятора, предложенной в [1].

1. Динамические уравнения. С помощью метода Галеркина в статье [1] были получены приближенные уравнения движения упругого манипулятора в вертикальной плоскости. В цитируемой работе использована модель балки Тимошенко [2, с. 389], к нижнему концу которой приложен управляющий момент $M(t)$, а верхний конец несет твердое тело-нагрузку массы m. Постоянному значению управляющего момента $M(t) =$

$= M_0$ соответствует положение равновесия системы, определяемое величинами

$$\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const},\ w(x,t) = w_0(x),\ \psi(x,t) = \psi_0(x),\ x \in [0,l], \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ – угол между центральной линией балки и горизонтальным направлением в точке приложения управляющего момента; $w(x,t)$ – отклонение центральной линии балки относительно прямой, характеризующей ее недеформированное положение; $\psi(x,t)$ – угол поворота поперечного сечения балки в точке с лагранжевой координатой $x \in [0,l]$ в момент времени $t \geq 0$; l – длина балки. Формулы, определяющие положение равновесия (1) в зависимости от момента M_0, приведены в [1]. В указанной статье по произвольному наперед заданному числу $N \geq 1$ определяются функции

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \tilde{\varphi}(t),\ w(x,t) = w_0(x) + \sum_{i=1}^{N} w_i(x) q_i(t),\ \psi(x,t) = \psi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} \psi_i(x) q_i(t) \tag{2}$$

для приближенного описания движения системы в окрестности положения равновесия (1). Число N характеризует количество степеней свободы, представляющих колебания упругой балки. Функции $q_i(t)$ в формуле (2) являются обобщенными координатами i-й моды колебаний балки; $(w_1(x),\psi_1(x))$, $(w_2(x),\psi_2(x))$,..., $(w_N(x),\psi_N(x))$ – собственные функции, соответствующие N минимальным собственным числам $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_N$ задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{gathered}
K(\psi_i'(x) - w_i''(x)) - \lambda_i \rho w_i(x) = 0,\\
K(\psi_i(x) - w_i'(x)) - EI\psi_i''(x) - \lambda_i I_\rho \psi_i(x) = 0,\ x \in (0,l),\\
w_i(0) = \psi_i(0) = 0,\\
K(w_i'(l) - \psi_i(l)) - m\lambda_i w_i(l) = 0,\ EI\psi_i'(l) - \lambda_i J_c \psi_i(l) = 0,\ i = \overline{1,N},
\end{gathered} \tag{3}$$

где ρ – линейная плотность (масса на единицу длины балки), E – модуль Юнга, I – момент инерции поперечного сечения, $I_\rho = \rho I/A$ – массовый момент инерции поперечного сечения балки, m – масса твердого тела-нагрузки, J_c – центральный момент инерции твердого тела-нагрузки. Коэффициент K равен kGA, где G – модуль сдвига, A – площадь поперечного сечения балки, k – геометрическая константа, определяемая формой поперечного сечения балки. Функции $w_i(x)$ и $\psi_i(x)$ описывают соответственно отклонение центральной линии балки и угол поворота поперечного сечения в i-й моде упругих колебаний. Будем считать все величины ρ, EI, K, I_ρ положительными константами, полагая также, что тело-нагрузка прикреплено к балке в своем центре масс ($c = 0$ в обозначениях работы [1]).

Линеаризованные уравнения движения [1], полученные с помощью метода Галеркина, записываются в матричном виде следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u,\\
\dot{z}_2 &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u,
\end{aligned} \tag{4}$$

где $z_1 = (\tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\varphi}})^T$, $z_2 = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, ..., q_N, \dot{q}_N)^T$, $z = (z_1^T, z_2^T)^T$ – фазовый вектор; управление u связано с моментом M линейным преобразованием

$$u = (M - M_0)\left(J_0 + \int_0^l {w_0}^2(x)\rho\, dx + m{w_0}^2(l)\right)^{-1},$$

J_0 – момент инерции опоры манипулятора относительно оси действия момента M. Коэффициенты системы (4) таковы:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & d_2 & 0 & \ldots & d_N & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 - b_1 d_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_2 - b_2 d_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ a_N - b_N d_0 & 0 \end{pmatrix},\ A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 - b_1 d_1 & 0 & -b_1 d_2 & 0 & \ldots & -b_1 d_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ -b_2 d_1 & 0 & -\lambda_2 - b_2 d_2 & 0 & \ldots & -b_2 d_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -b_N d_1 & 0 & -b_N d_2 & 0 & \ldots & -\lambda_N - b_N d_N & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ B_2 = (0, -b_1, \ldots, 0, -b_N)^T\ ,$$

где

$$a_j = \frac{\int_0^l \rho w_j\,dx + m w_j(l)}{\int_0^l (\rho {w_j}^2 + I_\rho {\psi_j}^2)dx + m {w_j}^2(l) + J_c {\psi_j}^2(l)} g \sin\varphi_0,$$

$$b_j = \frac{\int_0^l (\rho x w_j + I_\rho \psi_j)dx + m l w_j(l) + J_c \psi_j(l)}{\int_0^l (\rho {w_j}^2 + I_\rho {\psi_j}^2)dx + m {w_j}^2(l) + J_c {\psi_j}^2(l)},$$

$$d_0 = \frac{\int_0^l \rho w_0\,dx + m w_0(l)}{J_0 + \int_0^l {w_0}^2(x)\rho\,dx + m {w_0}^2(l)} g \cos\varphi_0,$$

$$d_j = \frac{\lambda_j \left(\int_0^l (\rho x w_j + I_\rho \psi_j)dx + m l w_j(l) + J_c \psi_j(l)\right) + g \left(\int_0^l \rho w_j\,dx + m w_j(l)\right) \sin\varphi_0}{J_0 + \int_0^l {w_0}^2(x)\rho\,dx + m {w_0}^2(l)},\ j = \overline{1, N}\ ,$$

g – ускорение свободного падения.

2. Условия наблюдаемости. Конструкция реального манипулятора не предполагает возможность измерения значений функций $w(x,t)$ и $\psi(x,t)$ в каждой точке $x \in (0,l)$. Следовательно, оценку значений фазового вектора системы (4) можно получить только путем решения задачи наблюдения по неполной информации измерений. К таким измерениям на практике относятся показания датчиков напряжений, расположенных в некоторой точке манипулятора с координатой $x = l_0$, $0 \le l_0 \le l$. Учитывая только главную часть тензора напряжений в точке $x = l_0$, можно считать, что датчик обеспечивает измерения функции $\psi'(x,t)\big|_{x=l_0}$ при всех $t \ge 0$. Вычитая из функций $\varphi(t)$, $\psi'(x,t)\big|_{x=l_0}$ их значения, соответствующие положению равновесия (1), зададим выход системы (4) следующим образом:

$$y_1(t) = \tilde{\varphi}(t),\ y_2(t) = \sum_{j=1}^{N} {\psi_j}'(l_0) q_j(t). \tag{5}$$

Выражения (5) перепишем в виде

$$y_1 = C_1 z_1,\ y_2 = C_2 z_2, \quad C_1 = (1, 0),\ C_2 = (\chi_1, 0, \chi_2, 0, \ldots, \chi_N, 0), \tag{6}$$

где $\chi_j = {\psi_j}'(l_0)$.

Цель данной работы состоит в решении задачи наблюдения, т.е. необходимо оценить полный фазовый вектор $z(t)$ системы (4) при известной информации о значениях u, y. Сформулируем достаточные условия разрешимости такой задачи.

Лемма 1. *Система (4) с выходом (6) наблюдаема, если*

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NN} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

где $\pi_{1,j} = \chi_j, \quad \pi_{k,j} = -\lambda_j \pi_{k-1,j} - d_j \sum_{i=1}^{N} \pi_{k-1,i} b_i, \quad j = \overline{1,N}, \quad k = \overline{2,N}$.

В частности, при $N = 1$ *условие (7) эквивалентно неравенству* $\chi_1 \neq 1$*, а при* $N = 2$ *– следующему:*

$$\chi_1\chi_2(\lambda_1 - \lambda_2 + b_1 d_1 - b_2 d_2) + b_2 \chi_2^2 d_1 - b_1 \chi_1^2 d_2 \neq 0.$$

Доказательство. Используя выход y_1, запишем систему (4), (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} & z_1 = (y_1, \dot y_1)^T, \\ & \dot z_2 = A_{22} z_2 + B_2 u + (0, a_1 - b_1 d_0, \dots, 0, a_N - b_N d_0)^T y_1, \\ & y_2 = C_2 z_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда следует, что компоненты вектора $z_1(t)$ однозначно определяются через функцию y_1, а подсистема относительно z_2 наблюдаема, если пара (A_{22}, C_2) удовлетворяет ранговому условию наблюдаемости Калмана [3, Теорема 3.1]:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 A_{22} \\ \vdots \\ C_2 A_{22}^{2N-1} \end{pmatrix} = 2N.$$

Непосредственные выкладки показывают, что

$$\det \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 A_{22} \\ \vdots \\ C_2 A_{22}^{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NN} \end{vmatrix}^2 .$$

Таким образом, из соотношения (7) следует ранговое условие наблюдаемости для системы (4), (6). □

3. Синтез динамического наблюдателя. При выполненни условий Леммы 1 возможно построить наблюдатель Луенбергера явным образом для любого количества N упругих координат. Процедура синтеза наблюдателя описана ниже.

Теорема. *Предположим, что система (4), (6) удовлетворяет условию наблюдаемости (7), а также* $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$, $b_j d_j > 0$ *для всех* $j = \overline{1,N}$.

Тогда для любого управления $u(\cdot) \in L^1([0,+\infty) \to \mathbb{R})$ *и начальных условий* $z(0)$, $\bar{z}(0) \in \mathbb{R}^{2N+2}$ *соответствующее решение* $z(t)$ *системы (4) при* $t \to +\infty$ *экспоненциально стремится к решению* $\bar{z}(t)$ *системы*

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (A_{11} - F_1 C_1)\bar{z}_1 + A_{12}\bar{z}_2 + F_1 y_1 + B_1 u, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= (A_{22} - F_{22} C_2)\bar{z}_2 + F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + B_2 u, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered} F_1 = (\phi_1, d_0 + \phi_2)^T, \\ F_{21} = (0, a_1 - b_1 d_0,\ 0, a_2 - b_2 d_0, ..., 0, a_N - b_N d_0)^T, \\ F_{22} = (f_1, 0,\ f_2, 0, ..., f_N, 0)^T, \\ (f_1, f_2, ..., f_N)^T = \gamma Q^{-1} (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_N)^T, \\ Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 d_1}{b_1} + d_1^2 & d_1 d_2 & ... & d_1 d_N \\ d_2 d_1 & \frac{\lambda_2 d_2}{b_2} + d_2^2 & ... & d_2 d_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_N d_1 & d_N d_2 & ... & \frac{\lambda_N d_N}{b_N} + d_N^2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь ϕ_1, ϕ_2, γ *– произвольные положительные константы.*

Доказательство. Введем ошибки наблюдений: $e_1 = z_1 - \bar{z}_1$, $e_2 = z_2 - \bar{z}_2$. Вычитая уравнения (9) из (4), получим следующую систему:

$$\dot{e}_1 = H_1 e_1 + A_{12} e_2,\ \dot{e}_2 = H_2 e_2,$$

где $H_1 = A_{11} - F_1 C_1$, $H_2 = A_{22} - F_{22} C_2$. Все корни полинома

$$\det(H_1 - \mu I) = \begin{vmatrix} -\phi_1 - \mu & 1 \\ -\phi_2 & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \phi_1 \mu + \phi_2,$$

очевидно, имеют отрицательные вещественные части при выполнении условий $\phi_1 > 0$, $\phi_2 > 0$. Покажем, что вещественные части всех собственных значений матрицы

$$H_2 = \begin{pmatrix} -f_1 \chi_1 & 1 & ... & -f_1 \chi_N & 0 \\ -\lambda_1 - b_1 d_1 & 0 & ... & -b_1 d_N & 0 \\ -f_2 \chi_1 & 0 & ... & -f_2 \chi_N & 0 \\ -b_2 d_1 & 0 & ... & -b_2 d_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -f_N \chi_1 & 0 & ... & -f_N \chi_N & 1 \\ -b_N d_1 & 0 & ... & -\lambda_N - b_N d_N & 0 \end{pmatrix}$$

отрицательны при выполнении условий теоремы. Обозначим $e_2 = (\xi_1, \eta_1, ..., \xi_N, \eta_N)^T$ и рассмотрим квадратичную форму

$$2W(e_2) = \sum_{j=1}^{N} \frac{d_j \eta_j^2}{b_j} + (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N) Q (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N)^T.$$

Убедимся в том, что форма $2W(e_2)$ определена положительно в случае $\lambda_j > 0$, $b_j d_j > 0$. Действительно, все главные миноры Δ_j матрицы Q положительны:

$$\Delta_j = \frac{(\lambda_1 d_1)(\lambda_2 d_2)\cdots(\lambda_j d_j)}{b_1 b_2 \cdots b_j}\left(1 + \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i d_i}{\lambda_i}\right) > 0, \ j = \overline{1, N}.$$

Тогда форма W положительно определена по критерию Сильвестра. Из неравенства $\det(Q) = \Delta_N > 0$ следует также существование Q^{-1} в формуле (10). Вычисляя производную W в силу системы $\dot{e}_2 = H_2 e_2$, получим

$$\dot{W}(e_2) = -\gamma (C_2 e_2)^2 \le 0.$$

Поскольку $\dot{W}$ обнуляется на множестве $\operatorname{Ker} C_2 = \{e_2 \in \mathbb{R}^{2N} : C_2 e_2 = 0\}$, проверим существование нетривиальных полутраекторий системы $\dot{e}_2 = H_2 e_2$ на $\operatorname{Ker} C_2$. Пусть $C_2 e_2(t) \equiv 0$, $t \ge 0$, тогда

$$\frac{d^k}{dt^k} C_2 e_2(t) = C_2 (A_{22} - F_{22} C_2)^k e_2(t) = C_2 A_{22}^k e_2(t) = 0$$

для $t \ge 0$, $k \ge 0$. Отсюда следует, что для любого $t \ge 0$ вектор $e_2(t)$ является решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$C_2 A_{22}^k e_2(t) = 0, \quad k = \overline{0, 2N-1}. \tag{11}$$

Система (11) допускает только тривиальное решение $e_2(t) = 0$ при выполнении рангового условия (7). Следовательно, линейная система $\dot{e}_2 = H_2 e_2$ асимптотически устойчива по теореме Барбашина–Красовского.

Итак, матрицы H_1 и H_2 гурвицевы при выполнении условий теоремы. Динамика ошибок наблюдения для систем (4), (9) описывается следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & A_{12} \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Легко видеть, что спектр матрицы системы (12) является объединением спектров H_1 и H_2. Следовательно, тривиальное решение системы (12) экспоненциально устойчиво, $\|z(t) - \bar{z}(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. □

4. Заключение. В статье предложена явная схема синтеза динамического наблюдателя фазового вектора для приближенной по Галеркину системы с N упругими степенями свободы и двумерным вектором выхода. Этот результат обосновывает возможность практической реализации стабилизирующего управления в виде обратной связи по состоянию, построенного в статье [1].

This work is supported in part by the Alexander von Humboldt Foundation.

1. *Зуев А.Л.* Управление упругим манипулятором в рамках модели балки Тимошенко // Прикл. механика. – 2005. – **41**, № 12. – С. 107-115.
2. *Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
3. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. – М.: Наука, 1980. – 376 с.

4. *Kim J.U., Renardy Y.* Boundary control of the Timoshenko beam // SIAM J. Control. Optim. – 1987. – **25**. – P. 1417-1429.
5. *Krabs W. and Sklyar G.M.* On the Controllability of a Slowly Rotating Timoshenko Beam // J. for Anal. and Appl. – 1999. – **18**, № 2. – P. 437-448.
6. *Krabs W. and Sklyar G.M.* On the stabilizability of a slowly rotating Timoshenko beam // Z. Anal. Anwend. – 2000. – **19**, № 1. – P. 131-145.
7. *Lagnese J.E.and Leugering G.* Controllability of Thin Elastic Beams and Plates // In: The control handbook (ed.: W.S. Levine). – Boca Raton: CRC Press, 1996. – P. 1139-1156.
8. *Lasiecka I. and Triggiani R.* Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. 2: Abstract hyperbolic-like systems over a finite time horizon. – Cambrigde: Cambridge University Press, 2000. – 1067 p.
9. *Luo Z.-H., Guo B.-Z. and Morgul O.* Stability and Stabilization of Infinite Dimensional Systems. – London: Springer-Verlag, 1999. – 403 p.
10. *Morgül O.* Boundary control of a Timoshenko beam attached to a rigid body: planar motion // Int. J. Control. – 1991. – **54**, № 4. – P. 763-791.
11. *Sawodny O., Aschemann H. and Bulach A.* Mechatronical designed control of fire-rescue turntable ladders as flexible link robots // Proc. 15th IFAC World Congress. – Barcelona, 2002. – **D**. – P. 139–144.
12. *Shi D.-H., Hou S.H. and Feng D.-X.* Feedback stabilization of a Timoshenko beam with an end mass // Int. J. Control. – 1998. – **69**, № 2. – P. 285-300.
13. *Talebi H.A., Patel R.V. and Khorasani K.* Control of Flexible-link Manipulators Using Neural Networks. – London: Springer-Verlag, 2001. – 142 p.
14. *Taylor S.W.* A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability // J. of Comput. and Appl. Math. – 2000. – **114**. – P. 23-40.
15. *Taylor S.W. and Yau S.C.B.* Boundary control of a rotating Timoshenko beam // Australian and New Zealand Industrial and Appl. Math. J. – 2003. – **44**(E). –P. 143-184.
16. *Xu C.Z. and Baillieul J.* Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1993. – **38**. – P. 754–1765.
17. *Zuyev A.* Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems // Automatica. – 2005. – **41**, № 1. – P. 1-10.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
al_zv@mail.ru

Получено 15.02.2005