ISSN 0321-1975. Механика твердого тела. 2005. Вып. 35

УДК 531.36

©2005. **С.В. Чайкин**

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕТРИВИАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ РАВНОВЕСИЙ ГИРОСТАТА С УПРУГИМ СТЕРЖНЕМ С МАССОЙ НА КОНЦЕ

Рассматривается в ограниченной постановке движение по кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил сложной механической системы, состоящей из гиростата и упругого стержня с массой на свободном конце. Гиростат рассматривается как твердое тело, в котором имеется вращающийся динамически и статически уравновешенный маховик. Однородный, прямолинейный в недеформированном состоянии упругий стержень жестко закреплен одним концом в корпусе гиростата. Ось недеформированного стержня произвольно расположена в главной центральной плоскости инерции гиростата. Относительные перемещения точек системы в результате малой деформации ее упругого звена представляются в виде бесконечного ряда разложения (без его априорного усечения) по заданной системе функций, зависящих от пространственных координат, с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. Ориентация системы на притягивающий центр определяется указанием расположения относительно связанной системы координат ортов нормали к плоскости орбиты и радиуса-вектора центра масс системы, указанная пара ортов располагается при этом в главной центральной плоскости инерции гиростата, содержащей ось недеформированного стержня. Для выделенного таким образом однопараметрического семейства одноосных ориентаций системы на притягивающий центр аналитически определяются деформации стержня, естественно, зависящие от ориентации, гиростатический момент, обеспечивающий равновесие выбранной ориентации (нетривиального равновесия, так как при этом стержень, вообще говоря, деформирован) и условия устойчивости равновесий в смысле Ляпунова.

1. Постановка задачи. Интегралы движения. Рассмотрим в ограниченной постановке [1, 2] движение по кеплеровой круговой орбите в центральном ньютоновском поле сил механической системы, состоящей из гиростата и упругого стержня с массой. Гиростат рассматривается как твердое тело, в котором имеется вращающийся динамически и статически уравновешенный маховик. Однородный, прямолинейный в недеформированном состоянии упругий стержень жестко закреплен одним концом в корпусе гиростата по всей площади его поперечного сечения. На его свободном конце имеется точечная масса M, m_c – масса стержня. Ось недеформированного стержня произвольно расположена в главной центральной плоскости инерции гиростата. При движении системы ее мгновенный центр масс перемещается по кеплеровой круговой орбите вокруг притягивающего центра, а стержень совершает малые пространственные изгибные колебания.

Для описания движения вводятся только правые прямоугольные декартовы системы координат. Система координат Oy_k $(k = 1, 2, 3)$ с полюсом в мгновенном центре масс системы и ортами осей $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ соответственно; орт $\boldsymbol{\beta}$ направлен по нормали к плоскости орбиты, $\boldsymbol{\gamma}$ – по радиусу-вектору мгновенного центра масс относительно притягивающего центра. Постоянный вектор угловой скорости вращения орбитальной системы координат относительно инерциального пространства $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{\beta}$, $\omega > 0$; R – радиус круговой орбиты движения центра масс , L — характерный размер системы, m – ее масса. Система координат O_1x_k с ортами осей $\boldsymbol{i}_k$ $(k = 1, 2, 3)$ жестко связана с корпусом гиростата; O_1 — центр масс недеформированной системы, а оси координат совмещены с главными центральными осями гиростата; $\boldsymbol{\Omega}$ – вектор угловой скорости трехгранника O_1x_k относительно Oy_k.

Пусть в плоскости $O_1x_2x_3$ располагается прямолинейная в недеформированном состоянии ось упругого стержня, для простоты постоянного кругового сечения и единичной длины, ρ – погонная масса стержня, a – расстояние от точки O_1 до точки защемления стержня, а параметр $s \in [0,1]$ определяет точку на оси стержня. Считаем, что в процессе движения стержень подвергается малым пространственным изгибным деформациям в соответствии с гипотезами Кирхгофа: сечения стержня не деформируются, пренебрегают их кручением и изменением нормали поперечного сечения относительно нормали этого же сечения в недеформированном положении стержня.

Для описания деформаций упругого звена системы используем локальную систему координат с ортами $\{\boldsymbol{f}_k\}$, орт $\boldsymbol{f}_3$ располагается вдоль оси недеформированного стержня, проходящей через точку O_1, и направлен от нее. Радиус-вектор произвольной точки стержня, определяемой до деформации относительно точки O_1 вектором $\boldsymbol{r}$, после деформации будет определяться относительно мгновенного центра масс системы выражением $(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{u}(t,s) - \boldsymbol{r}_0)$, где $\boldsymbol{u}(t,s)$ – вектор упругого перемещения точек оси стержня, $\boldsymbol{r}_0 = m^{-1}(\int_0^1 \rho\, \boldsymbol{u}(t,s)ds + M\, \boldsymbol{u}(t,1))$ – радиус-вектор точки относительно точки O_1. Далее будем пренебрегать величиной $\boldsymbol{r}_0$, т.е. считать, что точки O_1 и O совпадают.

Сформулируем четыре используемых в работе предположения (сравни с [3]).

1°. Вектор упругого перемещения оси стержня представи́м следующим образом:

$$\boldsymbol{u}(t,s) = \sum_{p=0}^{\infty}(q_p^{(1)}\chi_p^{(1)}(s)\boldsymbol{f}_1 + q_p^{(2)}\chi_p^{(2)}(s)\boldsymbol{f}_2) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{q}_n(t)\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(s), \tag{1}$$

где

$$\tilde{q}_{2p+i}(t) = q_p^{(i)}, \quad \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{2p+i}(s) = \chi_p^{(i)}(s)\boldsymbol{f}_i, \quad p = 0,1,\ldots;\ i = 1,2.$$

Заметим, что обобщенные координаты $\tilde{q}_{2k-1}(t)$ определяют упругие перемещения вдоль оси $\boldsymbol{f}_1$, а $\tilde{q}_{2k}(t)$ – вдоль оси $\boldsymbol{f}_2$ $(k = 1,2,\ldots)$, лежащей в плоскости $O_1x_2x_3$. Функции параметра s, удовлетворяющие соответствующим краевым условиям (один конец стержня жестко закреплен, а на свободном имеется масса M), представляются следующим образом [4, 5]:

$$\chi_n(s) = \chi_{n-1}^{(1)}(s) = \chi_{n-1}^{(2)}(s) = A_n((\mathrm{sh}\beta_n + \sin\beta_n)(\mathrm{ch}\beta_n s - \cos\beta_n s) -$$

$$-(\mathrm{ch}\beta_n + \cos\beta_n)(\mathrm{sh}\beta_n s - \sin\beta_n s)).$$

Величины β_n $(n = 1,2,\ldots)$ — корни уравнения

$$1 + \cos\beta\,\mathrm{ch}\beta = (M/m_c)\beta(\cos\beta\,\mathrm{sh}\beta - \sin\beta\,\mathrm{ch}\beta),$$

при этом A_n выбираются так, что имеется следующая нормировка

$$(\chi_n, \chi_p) \equiv \int_0^l \rho\chi_n(s)\chi_p(s)ds + M\chi_n(1)\chi_p(1) = \delta_{np}M_n, \quad M_n = 1.$$

Вообще, здесь для любых функций $g(s)$ и $h(s)$, $s \in [0,1]$, их скалярное произведение $(g,h) = \int\limits_0^1 \rho g(s)h(s)ds + Mg(1)h(1)$.

2°. Потенциальная энергия малых упругих деформаций определяется выражением

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{n,p=1}^{\infty} \tilde{c}_{np}\tilde{q}_n\tilde{q}_p, \quad \tilde{c}_{np} = \Lambda_n^2 M_n \delta_{np}, \quad \Lambda_n^2 = \frac{EI\beta_n^4}{\rho}, \tag{2}$$

где $\Lambda_n(M_n, A_n)$ – частота (приведенная масса, амплитуда), соответствующая форме $\chi_n(s)$, EI – жесткость стержня на изгиб, считаем, что $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots,$ δ_{np} – функция Кронекера; также естественно полагать, что в процессе движения потенциальная энергия упругих деформаций остается ограниченной. Если ввести новые переменные $q_n(t) \equiv \tilde{c}_{nn}^{1/2}\tilde{q}_n(t)$ и соответственно $\boldsymbol{\varphi}_n(s) \equiv \tilde{c}_{nn}^{-1/2}\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_n(s)$, то из ограниченности энергии заключаем, что $q(t) \equiv (q_1, q_2, \ldots)$ принадлежит гильбертову пространству l_2 бесконечных последовательностей, ограниченных по норме $||q|| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |q_n|^2\right)^{1/2}$. В осях $\{f_k\}$ функция $\boldsymbol{\varphi}_n(s)$ имеет одну ненулевую компоненту $\varphi_n(s) = \chi_n(s)/\Lambda_n$.

3°. Пренебрегая величинами порядка $(L/R)^3$ и выше, примем приближенное выражение для потенциальной энергии гравитационных сил

$$\Pi_g = -\frac{\mu m}{R} + \frac{1}{2}\omega^2(3\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\gamma} - tr\boldsymbol{J}).$$

Здесь μ – произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего центра, $\boldsymbol{J}$ – тензор инерции системы относительно мгновенного центра масс.

В соответствии с представлением (1)

$$\boldsymbol{J}(q) = \int ((\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u})^2 E - (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}))dm = \boldsymbol{J}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t)\boldsymbol{J}_n + \sum_{n,p=1}^{\infty} q_n q_p \boldsymbol{J}_{np},$$

где $\boldsymbol{J}_0$ — тензор инерции недеформированной системы относительно точки O, E — единичная матрица размера 3×3, двоеточие означает диадное произведение векторов, интеграл берется по области, занимаемой точками системы. Матрицы компонентов тензоров $\boldsymbol{J}_0$, $\boldsymbol{J}_n$,$\boldsymbol{J}_{np}$ приведем в локальной системе координат $\{\boldsymbol{f}_k\}$:

$$[\boldsymbol{J}_0]_F = \left\| \begin{matrix} J_0^{11} & 0 & 0 \\ 0 & J_0^{22} & J_0^{23} \\ 0 & J_0^{23} & J_0^{33} \end{matrix} \right\|, \qquad [\boldsymbol{J}_{2k}]_F = j_k \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$[\boldsymbol{J}_{2k-1}]_F = j_k \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad [\boldsymbol{J}_{2k-1,2k-1}]_F = j_{kk} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

$$[\boldsymbol{J}_{2k,2k-1}]_F = [\boldsymbol{J}_{2k-1,2k}] = j_{kk} \left\| \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad [\boldsymbol{J}_{2k,2k}] = j_{kk} \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$j_k \equiv ((a+s),\chi_k)\Lambda_k^{-1}, \qquad j_{kk} \equiv \Lambda_k^{-2}(\chi_k,\chi_k).$$

Считаем, что главные оси инерции гиростата без стержня относительно точки O_1 при повороте на угол Δ вокруг оси O_1x_1 переходят соответственно в оси с ортами $\{f_i\}$ $(i=1,2,3)$. Тогда

$$J_0^{11} = I_1^K + I_C, \quad J_0^{22} = I_2^K + (I_3^K - I_2^K)\sin^2\Delta + I_C, \quad J_0^{12} = J_0^{13} = 0,$$
$$J_0^{23} = (I_3^K - I_2^K)\sin\Delta\cos\Delta, \quad J_0^{33} = I_3^K + I_C^3 - (I_3^K - I_2^K)\sin^2\Delta,$$

$I_C \equiv \int\limits_0^1 \rho(a+s)^2 ds + M(a+l)^2$ и I_C^3 – моменты инерции недеформированного стержня с массой относительно оси O_1x_1 и его собственной недеформированной оси соответственно, при этом величины I_j^K — моменты инерции корпуса относительно оси $O_1x_j(j=1,2,3)$. Заметим, что все другие матрицы компонентов $[J_{2k-1,p}]_F$ и $[J_{2k,p}]_F$ — нулевые вследствие свойств функций $\{\chi_n\}$ $(k,,n=1,2,\ldots)$.

4°. Центральный эллипсоид инерции гиростата и всей недеформированной системы не является эллипсоидом вращения.

Известно, что уравнения движения, различные методы получения которых для сложных механических систем обсуждаются, например, в [6], допускают в рассматриваемом здесь случае, кроме интегралов направляющих косинусов U_i $(i=1,2,3)$, интеграл типа Якоби U. Имеем

$$U_1 \equiv \boldsymbol{\gamma\gamma} - 1 = 0, \quad U_2 \equiv \boldsymbol{\beta\beta} - 1 = 0, \quad U_3 \equiv \boldsymbol{\gamma\beta} = 0,$$
$$U \equiv T_r + \Pi + \Pi_g - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega J \omega} - \boldsymbol{\omega k} = \mathrm{const}.$$

Здесь $\boldsymbol{k}$ – постоянный гиростатический момент системы, кинетическая энергия определяется выражением

$$T_r \equiv \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega J \Omega} + \boldsymbol{\Omega G} + \frac{1}{2}\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}\dot{q}_n\dot{q}_m,$$

где $a_{nm} = (\varphi_n, \varphi_m)$, а вектор кинетического момента относительно точки O имеет вид

$$\boldsymbol{G} \equiv \int (\boldsymbol{r}+\boldsymbol{u}) \times \dot{\boldsymbol{u}} dm = \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{G}_n\dot{q}_n + \sum_{n,p=1}^{\infty} \dot{q}_n q_p \boldsymbol{G}_{np}.$$

Выражения для $\boldsymbol{G}_n$ и $\boldsymbol{G}_{np}$, как и уравнения движения системы относительно ее мгновенного центра масс , здесь не приводятся (см., например, [6]). Точкой обозначена частная производная по времени.

Определяющее значение имеют следующие свойства частот Λ_n $(n=1,2,\ldots)$.

Утверждение 1. Последовательность частот Λ_n из (2) такова, что $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_1$ (пространство бесконечных последовательностей, суммируемых по модулю), где за счет выбора нумерации корней β_n имеем $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \ldots$.

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно показать, что $\{1/\beta_n^2\} \in l_1$. Построим оценки для корней β_n, записав определяющее уравнение следующим образом ($\beta = 0$ не есть решение, так что полагаем $\beta \neq 0$)

$$\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\beta} + \cos\beta\right) = (M/m_c)(\cos\beta \cdot \mathrm{th}\beta - \sin\beta).$$

Воспользовавшись формулой $\cos\beta \mathrm{th}\beta - \sin\beta = \sqrt{1+\mathrm{th}^2\beta}\sin(B-\beta)$, где $\mathrm{tg}B = \mathrm{th}\beta$, полагая $\beta \gg 1$, так что $\mathrm{th}\beta \simeq 1$, и пренебрегая величинами порядка $(1/\beta)^2$ и выше, определяющее уравнение для корней β_n запишем следующим образом

$$\frac{\cos\beta}{\beta} = (M/m_c)\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$$

Представляя графически левую и правую части последнего уравнения, легко получить следующие оценки на положительные и отрицательные значения β_k при достаточно больших целых положительных k

$$0 < (2k-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \beta_k < (2k-1)\frac{\pi}{2}, \quad -(2k-1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < \beta_k < -(2k-1)\frac{\pi}{2} < 0.$$

Из этих оценок следует, что $\{1/\beta_n^2\} \in l_1$ и, стало быть, $\{1/\beta_n^2\} \in l_2$. Выбор нумерации β_n очевиден. $\square$

2. Семейство равновесий. Для нахождения относительных равновесий системы и исследования их устойчивости воспользуемся теоремой Рауса–Ляпунова [2,7]. Введем в рассмотрение функционалы V и V_1

$$V_1(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\beta}, q, \lambda, \sigma, v) = \left(\Pi + \Pi_g - \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega J \omega} - \boldsymbol{k\omega}\right) + 3\omega^2\lambda U_3 + \frac{1}{2}\omega^2 v U_2 - \frac{3}{2}\omega^2\sigma U_1,$$

$$V(\Omega, \dot{q}, \gamma, \beta, q, \lambda, \sigma, v) = T_r + V_1,$$

где λ, σ, v — неопределенные множители Лагранжа, величина в скобках в правой части выражения для V_1 носит название измененной потенциальной энергии. Производная по времени функционала V — связки интегралов движения, равна нулю.

Пусть переменные с крышкой определяют некоторое невозмущенное движение системы (относительное равновесие при $\hat{\boldsymbol{\Omega}} = 0$, $\hat{\dot{q}} = 0$), малые возмущения соответствующих величин будем обозначать через $\delta\,\boldsymbol{\Omega}$, $\delta\dot{q} \equiv (\delta\dot{q}_1, \delta\dot{q}_2, \ldots)^T$, $\delta q = (\delta q_1, \delta q_2, \ldots)^T$, $\delta\boldsymbol{\gamma}, \delta\boldsymbol{\beta}$. В малой окрестности невозмущенного движения

$$W \equiv V(*) - V(0) = \delta V(0) + \delta^2 V(0) + Q(0),$$

где $V(*)$ и другие величины с аргументом $(*)$ – значения функционала V и других величин на возмущенном движении; $V(0), \delta V(0), \delta^2 V(0)$ и др. — значения функционала V, его первой и второй вариации и др., вычисленные на невозмущенном движении системы, $Q(0)$ – функционал, содержащий величины не ниже третьей степени относительно возмущений. Если невозмущенное движение системы представляет собой относительное равновесие, а именно равновесия будем рассматривать ниже, то можно записать следующее равенство:

$$W \equiv V(*) - V(0) = T_r(*) + V_1(*) - T_r(0) - V_1(0) = T_r(*) + \delta V_1(0) + \delta^2 V_1(0) + Q(0). \quad (4)$$

При соответствующих условиях [2] можно показать, что

$$\exists c_T > 0 : T_r > c_T\left(\boldsymbol{\Omega\Omega} + \sum_{n=1}^{\infty}\dot{q}_n^2\right).$$

Уравнения для отыскания относительных равновесий системы и неопределенных множителей Лагранжа, которые выписываются из условия $\delta V(0) = 0$ ($\delta V(0) = \delta V_1(0)$ при $\hat{\boldsymbol{\Omega}}= 0,\ \hat{\dot{q}} = 0$), могут быть записаны следующим образом:

$$(\boldsymbol{J}(\hat{q}) - \sigma E)\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0 \Leftrightarrow \sigma = \hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \lambda = -\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}} = 0, \tag{5}$$

$$(vE - \boldsymbol{J}(\hat{q}))\hat{\boldsymbol{\beta}} + 3\lambda\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \boldsymbol{\eta} = 0 \Leftrightarrow v = \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} + \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\eta},\ \hat{\boldsymbol{\alpha}}\boldsymbol{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\eta}\hat{\boldsymbol{\alpha}},\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{J}(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\boldsymbol{\eta}\hat{\boldsymbol{\gamma}}/4, \tag{6}$$

$$\hat{q}_n + \omega^2(3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{J}'_n(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \mathrm{tr}\boldsymbol{J}'_n(\hat{q}) - \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{J}'_n(\hat{q})\hat{\boldsymbol{\beta}})/2 = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Здесь использованы обозначения: $\quad \boldsymbol{\eta} \equiv \omega^{-1}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{J}'_n = \boldsymbol{J}_n + 2\sum\limits_{p=1}^{\infty}\hat{q}_p\boldsymbol{J}_{np}.$

Прямыми вычислениями с использованием выражений (3) и свойств системы функций $\{\chi_n(s)\}$ находим, что уравнения (5)–(7) допускают однопараметрическое семейство решений – относительных равновесий гиростата с упругим стержнем, определяющее соответствующие нетривиальные одноосные равновесные ориентации системы на притягивающий центр. Это семейство характеризуется тем, что на притягивающий центр направлена прямая, лежащая в плоскости Ox_2x_3 и составляющая угол Θ_1 (параметр семейства) с ортом $\boldsymbol{f}_2$. (Имеется и другое семейство равновесий, когда плоскость Ox_2x_3 с осью деформированного стержня, лежащей в ней, содержит орты $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$. Рассуждения, касающиеся “другого” семейства, аналогичны приведенным ниже.) В проекциях на оси $\{\ \boldsymbol{f}_k\}$ семейство относительных равновесий определяется следующими уравнениями $(k = 1, 2, \ldots)$:

$$\hat{\alpha}_1 = \pm 1, \quad \hat{\alpha}_2 = 0, \quad \hat{\alpha}_3 = 0; \quad \hat{\beta}_1 = 0, \quad \hat{\beta}_2 = \cos\Theta_1, \quad \hat{\beta}_3 = \sin\Theta_1,$$

$$\hat{\gamma}_1 = 0, \quad \hat{\gamma}_2 = -\hat{\alpha}_1\sin\Theta_1, \quad \hat{\gamma}_3 = \hat{\alpha}_1\cos\Theta_1, \tag{8}$$

$$\hat{q}_{2k-1} = 0, \quad \hat{q}_{2k} = \frac{\omega^2\sin\Theta_1\cos\Theta_1}{2[1 + \omega^2\Lambda_k^{-2}(1 - 4\sin^2\Theta_1)]\Lambda_k}(a + s, \chi_k(s)). \tag{9}$$

Заметим, что знаменатель дроби не обращается в нуль для физически оправданных значений ω и Λ_k, а $\{\hat{q}_{2k}\} \in l_2$, если $\{\Lambda_k^{-1}\} \in l_2$, что содержится в утверждении 1. Действительно, с учетом свойств Λ_k и $\{\chi_k\}$ из равенств (9) выводим простые оценки

$$|\hat{q}_{2k}| < \frac{\omega^2}{2|1 - 3\omega^2\Lambda_1^{-2}|\Lambda_k}\left(\int\limits_0^1 \rho(a + s)^2 ds + M(a + l)^2\right)^{1/2}(\chi_k, \chi_k)^{1/2} = \frac{\omega^2\Lambda_1^2 I_C^{1/2}}{2|\Lambda_1^2 - 3\omega^2|\Lambda_k},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\hat{q}_{2k}^2 < \left(\frac{\omega^2\Lambda_1^2}{2(\Lambda_1^2 - 3\omega^2)}\right)^2 I_C\sum_{k=1}^{\infty}\Lambda_k^{-2}.$$

Для данного семейства равновесий матрица компонентов тензора инерции системы имеет вид

$$[J(\hat{q})]_F = (J_{ij}^F(\hat{q})) = \left\|\begin{array}{ccc} J_0^{11} + \Sigma J_0^{22} & J_0^{23} - \Sigma_2 & \\ 0 & J_0^{23} - \Sigma_2 & J_0^{33} + \Sigma_1 \end{array}\right\|, \tag{10}$$

где $\Sigma_1 \equiv \sum\limits_k \hat{q}_{2k}^2 j_{kk}, \quad \Sigma_2 \equiv \sum\limits_k \hat{q}_{2k} j_k$. Очевидно просто определяются оси с ортами $\{\boldsymbol{e}_k\}$, $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1$, в которых матрица $[J(\hat{q})]_E = (J_{ii}^E)$ диагональна. При этом компоненты векторов $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, естественно, надо пересчитать с помощью соответствующей матрицы перехода.

Неопределенные множители Лагранжа в соответствии с формулами (5) выражаются в виде

$$\lambda(0) = \hat{\alpha}_1(J_{22}^F - J_{33}^F)\sin\Theta_1\cos\Theta_1 - \hat{\alpha}_1(J_{23}^F(\cos^2\Theta_1 - \sin^2\Theta_1),$$
$$\sigma(0) = J_{22}^F\sin^2\Theta_1 - 2J_{23}^F\sin\Theta_1\cos\Theta_1 + J_{33}^F\cos^2\Theta_1. \tag{11}$$

При этом, как типично и для обратной задачи о равновесии гиростата без упругого элемента, параметр v остается неопределенным, поскольку не зафиксирован пока гиростатический момент, а точнее, его проекция на нормаль к плоскости орбиты, см. (6). Ниже воспользуемся выбором v для обеспечения устойчивости равновесий гиростата с упругим стержнем.

Компоненты вектора гиростатического момента $\boldsymbol{k}$ в осях $\{\boldsymbol{f}_k\}$ для реализации равновесий (8), (9) с учетом выражений (11) должны определяться следующими равенствами, полученными из уравнений (6):

$$k_1 = 0, \quad \omega^{-1}k_2 = (v - J_{22}^F(\hat{q}))\cos\Theta_1 - (3\lambda\hat{\alpha}_1 + J_{23}^F(\hat{q}))\sin 2\Theta_1,$$
$$\omega^{-1}k_3 = (3\lambda\hat{\alpha}_1 - J_{23}^F(\hat{q}))\cos\Theta_1 + (v - J_{33}^F(\hat{q}))\sin\Theta_1. \tag{12}$$

3. Устойчивость равновесий семейства. Условия устойчивости равновесий системы в соответствии с теоремой Рауса–Ляпунова и методом нахождения минимума функционала W будут получены как условия определенной положительности второй вариации функционала V_1 (см. (4)), вычисленной на соответствующих равновесиях. Введем величины

$$w_1 \equiv \delta\gamma_1, \quad w_2 \equiv \delta\beta_1, \quad w_3 \equiv \delta\gamma_2, \quad w_4 \equiv \delta\beta_2, \quad w_5 \equiv \delta\gamma_3, \quad w_6 \equiv \delta\beta_3,$$
$$w = (w_1, \ldots, w_6), \quad \delta q = (\delta q_1, \ldots, \delta q_n, \ldots).$$

Полагаем, что $(w, \delta q) \in l_2$, и представим вторую вариацию следующим образом [7]:

$$\delta^2 V_1(0) = \omega^2(w, \delta q)\begin{Vmatrix} A & B \\ B^T & C \end{Vmatrix}(w, \delta q)^T,$$

где при условии, что соответствующие тензоры и векторы задаются своими компонентами в осях $\{\boldsymbol{f}_k\}$, матрица $A \equiv (A_{jj})$ $(i, j = 1, \ldots, 6;\ k = 1, 2, 3)$ имеет лишь такие отличные от нуля компоненты:

$$A_{2k-1,2k-1} = 3(J_{kk}^F - \sigma(0)), \quad A_{2k,2k} = (v - J_{kk}^F),$$
$$A_{12} = A_{21} = A_{34} = A_{43} = A_{56} = A_{65} = 3\lambda(0), \quad A_{35} = 3J_{23}^F = A_{53}, \quad A_{46} = J_{23}^F = A_{64}.$$

Матрица B имеет шесть бесконечных строк $b_i = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots)$ $(i = 1, \ldots, 6;\ k = 1, 2, \ldots)$, элементы которых определяются по формулам (учтено, что $\hat{q}_{2k-1} = 0$)

$$\begin{Vmatrix} b_{1,2k-l} \\ b_{3,2k-l} \\ b_{5,2k-l} \end{Vmatrix} = 3(\boldsymbol{J}_{2k-l} + \hat{q}_{2k}\boldsymbol{J}_{2k-l,2k})\hat{\boldsymbol{\gamma}}, \quad \begin{Vmatrix} b_{2,2k-l} \\ b_{4,2k-l} \\ b_{6,2k-l} \end{Vmatrix} = -(\boldsymbol{J}_{2k-l} + \hat{q}_{2k}\boldsymbol{J}_{2k-l,2k})\hat{\boldsymbol{\beta}}, \quad l = 0, 1. \tag{13}$$

Матрица C, с которой будем также отождествлять линейный оператор C, определенный на l_2, со значениями, вообще говоря, в пространстве S бесконечных последовательностей, является в данном случае блочно-диагональной (размер блоков 2×2) :

$C = \mathrm{diag}(C_1, C_2, \ldots), \;\; C_k = (C^k_{ij}),$
$C^k_{ii} = \omega^{-2} + 3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{J}_{2k-2+i,2k-2+i}\;\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \mathrm{tr}\boldsymbol{J}_{2k-2+i,2k-2+i} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{J}_{2k-2+i,2k-2+i}\;\hat{\boldsymbol{\beta}},$
$C^k_{12} = C^k_{21} = (3\hat{\boldsymbol{\gamma}}\boldsymbol{J}_{2k-1,2k}\hat{\boldsymbol{\gamma}} - \mathrm{tr}\;\boldsymbol{J}_{2k-1,2k} - \hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{J}_{\;2k-1,2k}\hat{\boldsymbol{\beta}})/2, \;\; i,j = 1,2; \; k = 1,2,\ldots.$

Следует также иметь в виду, что на величины w накладываются линейные связи, возникающие из условий $\delta U_i(0) = 0$ $(i = 1,2,3)$, а именно

$$\delta U_1(0) \equiv \hat{\gamma}_1 w_1 + \hat{\gamma}_2 w_3 + \hat{\gamma}_3 w_5 = 0, \quad \delta U_2(0) \equiv \hat{\beta}_1 w_2 + \hat{\beta}_2 w_4 + \hat{\beta}_3 w_6 = 0,$$
$$\delta U_3(0) \equiv \hat{\beta}_1 w_1 + \hat{\gamma}_1 w_2 + \hat{\beta}_2 w_3 + \hat{\gamma}_2 w_4 + \hat{\beta}_3 w_5 + \hat{\gamma}_3 w_6 = 0. \tag{14}$$

Элементы матрицы C даются выражениями $(k = 1,2,\ldots)$

$$C^k_{11} = \omega^{-2}, \quad C^k_{12} = C^k_{21} = 0, \quad C^k_{22} = \omega^{-2} + \Lambda_k^{-2}(4\cos^2\Theta_1 - 3).$$

Из приведенных выражений, очевидно, следует, что условия определенной положительности матрицы C сводятся к условию $\Lambda_1^2 > 3\omega^2$, и можно записать

$$\exists\varepsilon_C > 0 : \Lambda_1^2 > 3\omega^2 + \varepsilon_C, \quad qCq^T > \varepsilon_C||q||^2 \Rightarrow \exists C^{-1}, \quad ||C^{-1}|| < \varepsilon_C^{-1}. \tag{15}$$

Импликация в выражении (15) верна в силу известной теоремы анализа об обратном операторе (см., например, [8]). В данном случае можно привести явное представление для C^{-1} (при условии $\Lambda_1^2 > 3\omega^2$) и можно определить $C^{-1/2}$, но в дальнейшем используется только оценка нормы $||C^{-1}||$. Теперь при выполнении условий (15) справедливо следующее выражение, которое легко проверить непосредственным вычислением при произвольном $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\omega^{-2}\delta^2 V_1(0) = w(A - \varepsilon^{-2}BC^{-1}B^T)w^T + (1-\varepsilon^2)\delta qC\delta q^T +$$
$$+(\varepsilon^{-2}wBC^{-1} + \delta q)\varepsilon^2 C(\delta q^T + \varepsilon^{-2}C^{-1}B^T w^T).$$

Видно, что условия определенной положительности $\delta^2 V_1(0)$ можно получить как условия определенной положительности квадратичной формы с матрицей $(A - \varepsilon^{-2}BC^{-1}B^T)$ при наличии линейных связей (14). Введем в рассмотрение величины

$$d_{ij} \equiv \varepsilon^{-2} b_i C^{-1} b_j^T = d_i^T d_j, \quad d_i = \varepsilon^{-1}C^{-1/2}b_i^T, \;\; i,j = 1,\ldots,6,$$

для которых справедливы оценки $|d_{ij}| \le \varepsilon^{-2}\varepsilon_C^{-1}||b_i|| \cdot ||b_j||$. С использованием неравенства Коши-Буняковского можно показать, что $\{b_i\} \in l_2$ при $\{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2$.

В зависимости от выбора системы координат выражения для d_{ij}, как и для b_i (см. (13)), будут меняться. Вообще говоря, система координат (оси $\{_k\}$ или $\{\boldsymbol{f}_k\}$) при использовании которой вычисляются d_{ij}, b_i и др., будет, если это важно отметить, указываться соответствующим индексом, например, d^F_{ij} или b^E_i и др. Для параметра Θ_1 это соглашение также используется. Заметим, что выражения для элементов матрицы C не меняются от выбора осей, а при использовании осей $\{_k\}$ среди элементов матрицы $A = (A^E_{ij})$ появятся, естественно, дополнительно нулевые: $A^E_{35} = A^E_{53} = 0$, $A^E_{46} = A^E_{64} = 0$, в отличие от значений этих же элементов при использовании осей $\{\boldsymbol{f}_k\}$) (см. выше).

Опуская громоздкие промежуточные вычисления, в соответствии с методом исследования положительной определенности квадратичной формы конечного числа переменных при наличии линейных связей, которые в рассматриваемом случае приводят к требованиям положительности соответствующих определителей седьмого, восьмого и девятого порядков [9] ($\Delta_7(0) > 0,\ \Delta_8(0) > 0,\ \Delta_9(0) > 0$), сформулируем утверждения об устойчивости найденных нетривиальных равновесий.

Утверждение 2. Для того чтобы равновесие семейства (8)–(12) одноосных нетривиальных ориентаций на притягивающий центр гиростата с упругим стержнем и массой на конце было устойчиво, достаточно выполнения следующих условий:

$$\Lambda_1^2 > 3\omega^2, \quad \{\Lambda_n^{-1}\} \in l_2,$$

$$J_{11}^E > J_{22}^E \sin^2\Theta_1^E + J_{33}^E \cos^2\Theta_1^E + \frac{1}{3} d_{11}^E \Leftrightarrow 3(J_{11}^E - \sigma) - d_{11}^E > 0, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} v > J_{33}^E(\hat\beta_2^E)^2 + J_{22}^E(\hat\beta_3^E)^2 - 3(J_{33}^E - \sigma)(\hat\gamma_2^E)^2 - 3(J_{22}^E - \sigma)(\hat\gamma_3^E)^2 + \\ +(d_{16}^E\hat\beta_2^E + d_{15}^E\hat\gamma_2^E - d_{14}^E\hat\beta_3^E - d_{13}^E\hat\gamma_3^E)^2/(3(J_{11}^E - \sigma) - d_{11}^E), \end{aligned} \tag{17}$$

$$v > v_2, \tag{18}$$

где v_2 — больший корень квадратного уравнения относительно v, полученного из условия $\Delta_9(0) = 0$ (выражение для v_2 не выписывается из-за громоздкости).

Отметим, что условия (16), (17) более жесткие по сравнению с аналогичными условиями, которые получаются для механической системы, “затвердевшей” в рассматриваемом равновесии, из-за наличия члена $d_{11} \geq 0$ и, соответственно, из-за наличия неотрицательного последнего слагаемого в неравенстве (17). Условие (16), не зависящее от параметра $v \equiv \hat{\boldsymbol\beta}\boldsymbol J(0)\hat{\boldsymbol\beta} + \omega^{-1}\boldsymbol k\hat{\boldsymbol\beta}$, заведомо не выполняется, если для рассматриваемой равновесной ориентации $J_{11}^E = \min\limits_k J_{kk}^E$, т.е. если эллипсоид инерции системы в равновесии большей осью направлен по касательной к орбите. Очевидно, условия (17), (18) возможно выполнить за счет соответствующего выбора гиростатического момента.

Утверждение 3. Условие (16) можно выполнить лишь за счет подходящего выбора моментов инерции гиростата.

Доказательство. Действительно, на основании формул (9)–(11), с использованием неравенства Коши-Буняковского и оценки для d_{11}, показывается справедливость следующей цепочки неравенств:

$$3(J_{11}^E - \sigma) - d_{11}^E > 0 \Leftrightarrow J_{11}^F - J_{22}^F \sin^2\Theta_1 + 2J_{23}^F \sin\Theta_1\cos\Theta_1 - J_{33}^F\cos^2\Theta_1 - d_{11}^F/3 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (I_1^K - I_2^K)\sin^2\Theta_1 + (I_1^K - I_3^K)\cos^2\Theta_1 + (I_3^K - I_2^K)\sin\Delta\sin(\Delta + 2\Theta_1) +$$

$$+\left(\int \rho(a+s)^2 ds + M(a+l)^2\right)\cos^2\Theta_1 + \sin^2\Theta_1 \sum_k \hat q_{2k}^2 \left(\int \rho\varphi_k^2 ds + M\varphi_k^2(1)\right) -$$

$$-\sin 2\Theta_1 \sum_k \hat q_{2k}(a+s, \varphi_k) - d_{11}^F/3 > 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (I_1^K - I_2^K)\sin^2\Theta_1 + (I_1^K - I_3^K)\cos^2\Theta_1 + (I_3^K - I_2^K)\sin\Delta\sin(\Delta + 2\Theta_1) -$$

$$-\sum_k \hat q_{2k}^2 - \left(\int \rho(a+s)^2 ds + M(a+l)^2\right)\sum_k (\varphi_k, \varphi_k) - d_{11}^F/3 > 0 \Leftarrow$$

$$\Leftarrow (I_1^K - I_l^K) - (I_l^K - I_m^K) - \sum_k \hat q_{2k}^2 - I_C \sum_k \Lambda_k^{-2} - 3\varepsilon^2\varepsilon_C^{-1}\Lambda_1^{-4}\sum_k \hat q_{2k}^2 > 0.$$

В последнем неравенстве считаем, что $I_1^K > I_l^K > I_m^K,\ l,m = 2,3,\ l \neq m$, а при учете оценки для $\sum \hat{q}_{2k}^2$ заключаем, что оно и, стало быть, неравенство (16) выполнятся, если

$$I_1^K - I_l^K > I_l^K - I_m^K + \left((1+3\varepsilon^{-2}\varepsilon_C^{-1})\left(\frac{\omega^2\Lambda_1^2}{2(\Lambda_1^2-3\omega^2)}\right)^2+1\right) I_C \sum_k \Lambda_k^{-2}. \qquad (19)$$

Отсюда видно, что для выполнения условия (16) достаточно, чтобы разность между большим и средним моментами инерции гиростата была больше разности между его средним и меньшим моментами инерции на величину, определяемую третьим слагаемым в правой части неравенства (19). Эта величина зависит от геометрических, массовых и жесткостных характеристик упругого стержня. Если учесть неравенство $I_1^K < I_l^K + I_m^K$, то из выражения (19) следует, что и меньший момент инерции гиростата I_m^K также должен быть больше разности между его средним и меньшим моментами инерции на ту же величину. □

Можно показать, что условие (16) выполняется при $J_{11}^E = \operatorname{mid}_i J_{ii}^E$, если вектор $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ таков, что вектор $\boldsymbol{J}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ лежит в "глубине"области между круговыми сечениями центрального гирационного эллипсоида (построенного для рассматриваемого равновесия системы), содержащими его меньшую ось ($J_{11}^E \neq J_{22}^E \neq J_{33}^E$). В “глубине” означает, что длина вектора $\boldsymbol{J}^{1/2}\hat{\boldsymbol{\gamma}}$, конец которого находится на поверхности указанного эллипсоида, меньше величины $(J_{11}^E - d_{11}^E/3)$, которая, очевидно, должна быть больше $\min J_{ii}^E$. Гирационный эллипсоид системы является взаимным к ее эллипсоиду инерции [10]. Здесь

$$J_{11}^E = \operatorname{mid}_i J_{ii}^E \Leftrightarrow J_{ll}^E \leq J_{11}^E \leq J_{kk}^E \ \ (\{l,k\} = \{2,3\},\ l \neq k).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (05-01-00623).

1. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. – М.: Наука, 1965. – 416 с.
2. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 192 с.
3. *Чайкин С.В.* Устойчивость одноосных нетривиальных равновесных ориентаций на притягивающий центр гиростата с упругим стержнем // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, вып. 6. – С. 971–983.
4. *Лебедев Н.Н., Скальская И.П., Уфлянд Я.С.* Сборник задач по математической физике. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 420 с.
5. *Meirovitch L.* Liapunov Stability Analysis of Hybrid Dynamical Systems in the Neighborhood of Nontrivial Equilibrium // AIAA J. – 1974. – **12**, № 7. – P. 889–898.
6. *Докучаев Л.В.* Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами. – М.: Машиностроение, 1987. – 231 с.
7. *Chaikin S.V.* Equilibria stability of the satellite as a system with a countable number of degrees of freedom // Acta Astronaut. – 2001. – **48**, № 4. – P. 193–202.
8. *Вулих Б.З.* Введение в функциональный анализ. – М.: Наука, 1967. – 415 с.
9. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. – М.:Наука, 1988. – 304 с.
10. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. – М.; Л.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.

Ин-т динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск
`schaik@yandex.ru`

Получено 11.08.05